

曲面絡み目の plat form 表示

安田 順平

大阪大学

結び目の数理 III

① ブレイド

- ブレイドの閉包
- 絡み目の plat form 表示

② 曲面ブレイド

- 曲面ブレイドの閉包
- 曲面絡み目の plat form 表示

③ 主結果

- 主定理
- plat index

ブレイド

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$: 正整数, $I = [0, 1]$: 閉区間,

$Q_m := \{(\frac{1}{2}, \frac{k}{m+1}) \in D^2 \mid k = 1, 2, \dots, m\}$: D^2 上の m 点集合.

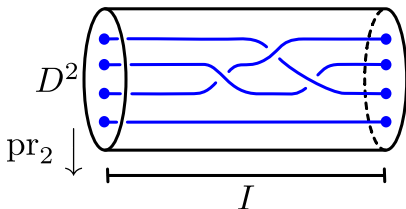
Definition 1.1

$\beta \subset D^2 \times I$: プロパーに埋め込まれたコンパクト曲線.

$\text{pr}_i : D^2 \times I \rightarrow D^2$ or I ($i = 1, 2$): 第 i 成分の射影.

β が m -ブレイドであるとは次を満たすことをいう.

- ① $\pi := \text{pr}_2|_{\beta} : \beta \rightarrow I$ は m 次の被覆写像である.
- ② I の境界 $y \in \partial I$ において, $\text{pr}_1(\pi^{-1}(y)) = Q_m$ を満たす.



ブレイドの閉包

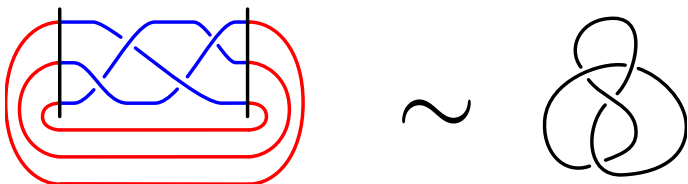
$S^3 = D^2 \times I \cup_{\partial} D^2 \times I'$ (I' は閉区間) とする.

Definition 1.2

$\beta \subset D^2 \times I$ を m -ブレイドとする. このときブレイド β の閉包 $\bar{\beta}$ を

$$\bar{\beta} := \beta \cup_{\partial} (Q_m \times I') \subset S^3$$

によって定める. $\bar{\beta}$ を閉ブレイドともいう.



ブレイドの閉包

Fact 1.3 (Alexander, 1923)

任意の有向絡み目は或るブレイドの閉包として表すことができる.

Definition 1.4

L を絡み目とする. このとき絡み目不変量 $\text{braid}(L)$ を以下で定める.

$$\text{braid}(L) := \min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \beta : m\text{-ブレイド}, L \sim \overline{\beta} \right\}$$

これを絡み目 L の **braid index** という.

絡み目の plat form 表示

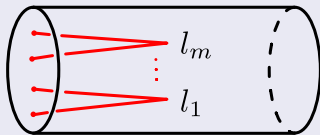
Definition 1.5

$l_k: D^2 \times I_0$ へプロパーに埋め込まれたコンパクト曲線 ($k = 1, \dots, m$) を以下で定義する.

$$\text{pr}_1(l_k \cap \text{pr}_2^{-1}(t)) := \begin{cases} Q_t^k & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \emptyset & (\frac{1}{2} < t \leq 1) \end{cases}$$

$$Q_t^k := \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{2k-1+t}{2m+1} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2k-t}{2m+1} \right) \right\} \subset D^2.$$

$l := l_1 \cup \dots \cup l_m \subset D^2 \times I_0$: **plat m -tangle** という.



絡み目の plat form 表示

$S^3 = D^2 \times I \cup_{\partial} D^2 \times I'$ (I, I' は閉区間).

$N = S^0 \times I = I_1 \cup I_2$: $\partial I'$ の I' における正則近傍.

$D^2 \times N = D^2 \times I_1 \cup D^2 \times I_2$.

A : 各 $D^2 \times I_i \curvearrowright$ plat m -tangle を埋め込んだ $D^2 \times I'$ 内の $2m$ 本の曲線.

Definition 1.6

β を $2m$ -ブレイドとする. このとき β の **plat closure** $\tilde{\beta}$ を

$$\tilde{\beta} := \beta \cup_{\partial} A \subset S^3$$

によって定める. このとき $\tilde{\beta}$ を絡み目の **plat form** という.



絡み目の plat form 表示

Example 1

$$\beta = \left(\text{cylinder with 4 blue strands crossing} \right), \quad A = \left(\text{cylinder with 4 red strands} \right)$$
$$\tilde{\beta} = \left(\text{cylinder with 4 blue strands and 2 red strands} \right) \sim \left(\text{trefoil knot} \right)$$

Fact 1.7

任意の絡み目は *plat form* に変形できる.

Definition 1.8

$L \subset S^3$ を絡み目とする. 絡み目不変量 $\text{plat}(L)$ を以下のように定義し, これを絡み目 L の **plat index** という.

$$\text{plat}(L) := \min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \beta : 2m\text{-ブレイド}, L \sim \tilde{\beta} \right\}$$

Fact 1.9

任意の絡み目 L に対して $\text{bridge}(L) = \text{plat}(L)$ が成り立つ.

曲面ブレイド

Definition 2.1

S^4 内に埋め込まれた閉曲面を**曲面絡み目**という．特に連結な曲面絡み目を**曲面結び目**という．

Definition 2.2

曲面絡み目 F, F' が S^4 の *ambient isotopy* で移りあうとき，それらは**同値**であるといい， $F \sim F'$ と記す．

Definition 2.3

向き付け可能な曲面絡み目が S^4 内の 3 次元球面に埋め込まれた曲面と同値であるとき，その曲面絡み目は**自明**であるという．

曲面ブレイド

D_1, D_2 : 2次元円板.

$y_0 \in \partial D_2$: 基点として1つ固定する.

Definition 2.4 (L. Rudolph, 1983)

$S \subset D_1 \times D_2$: プロパーに埋め込まれた向き付け可能なコンパクト曲面.

$\text{pr}_i : D_1 \times D_2 \rightarrow D_i$ ($i = 1, 2$): 第 i 成分の射影.

このとき S が m 次の**ブレイド状曲面**であるとは次を満たすことをいう.

- ① $\pi := \text{pr}_2|_S : S \rightarrow D_2$ は m 次の分岐被覆写像である.
- ② $\text{pr}_1(\pi^{-1}(y_0)) = Q_m$ を満たす.
- ③ ∂S は $D_1 \times \partial D_2$ 内の閉 m -ブレイドである.

特に $\partial S = Q_m \times \partial D_2$ であるとき, S を**曲面 m -ブレイド** という.

曲面ブレイド

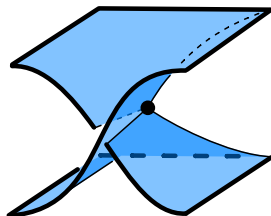
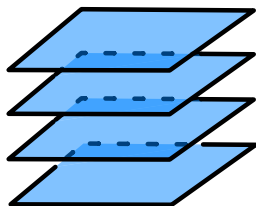
Example 2

$S = Q_m \times D_2$ は曲面 m -ブレイドとなる. この S を**自明**な曲面ブレイドという.

Definition 2.5

ブレイド状曲面 S が**単純**であるとは, m 次の分岐被覆写像 $\pi: S \rightarrow D_2$ の各ファイバーが m または $m-1$ 個の点からなることをいう.

以下, ブレイド状曲面は単純であると仮定する.



曲面ブレイドの閉包

$S^4 = D_1 \times D_2 \cup_{\partial} D_1 \times D'_2$ とする.

Definition 2.6

$S \subset D_1 \times D_2$ を曲面 m -ブレイドとする. このとき曲面ブレイド S の閉包 $\overline{S}$ を

$$\overline{S} := S \cup_{\partial} (Q_m \times D'_2) \subset S^4$$

によって定める.

Fact 2.7 (S. Kamada, 1994, cf: O. Ya. Viro, 1990)

任意の向き付け可能な曲面絡み目はある曲面ブレイドの閉包と同値である.

曲面ブレイドの閉包

Definition 2.8

F を向き付け可能な曲面絡み目とする. このとき次によって曲面絡み目の不変量 $\text{Braid}(F)$ を定める.

$$\text{Braid}(F) := \min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S: \text{曲面 } m\text{-ブレイド}, F \sim \overline{S} \right\}$$

これを曲面絡み目 F の **braid index** という.

$$S^4 = D_1 \times D_2 \cup_{\partial} D_1 \times D'_2.$$

$N = S^1 \times I$: $\partial D'_2$ の D'_2 における正則近傍.

$$y_0 = (0, 0) \in S^1 \times I = N.$$

Definition 2.9

複数のアニュラスまたは *Möbius* の帯の非交和を **annular surface system** という.

曲面絡み目の plat form 表示

$$S^4 = D_1 \times D_2 \cup_{\partial} D_1 \times D'_2.$$

$N = S^1 \times I$: $\partial D'_2$ の D'_2 における正則近傍.

$$y_0 = (0, 0) \in S^1 \times I = N.$$

Definition 2.10

$S \subset D_1 \times D_2$: $2m$ 次のブレイド状曲面.

$A \subset D_1 \times N$: プロパーに埋め込まれた *annular surface system*.

A が S に**適合している (adequate)** とは次の3つを満たすことをいう.

- ① $\partial A \cap \partial S = \partial A = \partial S$,
- ② $A|_{D_1 \times (\{0\} \times I)} = l$: *plat m -tangle*,
- ③ $\forall \theta \in S^1$, $l_\theta := A|_{D_1 \times (\{\theta\} \times I)}$: 自明な m -tangle.

特に $A = l \times S^1$ のとき, A は**真 (genuine)**であるという.

Remark

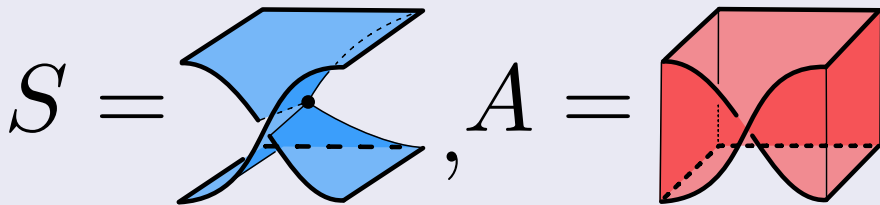
A が *genuine* であるとき, S は曲面ブレイドである.

曲面絡み目の plat form 表示

Proposition 2.11 (Y.)

ブレイド状曲面 S の adequate annular surface system A が存在するとき,
 S に対して A は ambient isotopy の差を除いて一意である.

Example 3



このとき $S \cup_{\partial} A$ は射影平面となる.

Definition 2.12

$S \subset D_1 \times D_2$: ブレイド状曲面.

$A \subset D_1 \times N$: S の adequate annular surface system.

このとき S の **plat closure** $\tilde{S} \subset S^4$ を

$$\tilde{S} := S \cup_{\partial} A$$

として定める. また $\tilde{S}$ を曲面絡み目の **plat form** という.

特に A が genuine であるとき, $\tilde{S}$ を **genuine plat form** という.

Theorem 1 (Y.)

任意の曲面絡み目は plat form に変形できる.

Theorem 2 (Y.)

任意の向き付け可能な曲面絡み目は genuine plat form に変形できる.

Definition 3.1

$F \subset S^4$ を曲面絡み目とする.

$$\text{plat}(F) := \min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S: 2m \text{ 次のブレイド状曲面}, F \sim \tilde{S} \right\}$$

$$\text{g.plat}(F) := \min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S: \text{曲面 } 2m\text{-ブレイド}, F \sim \tilde{S} \right\}$$

をそれぞれ曲面絡み目 F の **plat index**, **genuine plat index** という.

Remark

$\text{plat}(F)$, $\text{g.plat}(F)$ は曲面絡み目の不変量である.

1次元における事実との比較

Fact 3.2

L を絡み目とするとき, 次が成立する.

$$\text{bridge}(L) = \text{plat}(L) \leq \text{braid}(L).$$

Theorem 3 (Y.)

任意の向き付け可能な曲面絡み目 F に対して次が成り立つ.

$$\text{plat}(F) \leq \text{g.plat}(F) \leq \text{Braid}(F)$$

1次元における事実との比較

Definition 3.3 (J.Meier - A.Zupan, 2015)

絡み目における 橋分解の高次元化として曲面絡み目の **bridge trisection** が定まる. 曲面絡み目 F において "最小な" *bride trisection* から得られる正整数 $b(F)$ は曲面絡み目の不変量となり, これを曲面絡み目の **bridge number** という.

Remark

任意の絡み目 L に対して $\text{bridge}(L) = \text{plat}(L)$ が成り立つ.

Proposition 3.4 (Y.)

一般に $b(F)$ と $\text{plat}(F)$ は一致しない.

- ① adequate annular surface system が存在する必要十分条件は何か？
- ② genuine plat form を持つ曲面絡み目のクラス.
- ③ $\text{plat}(F) < \text{g.plat}(F)$ を満たす曲面絡み目の具体例.
- ④ $b(F)$ と $\text{plat}(F)$ の関係性.