

Quandle coloring quivers for spatial graphs

伊藤大貴

大阪大学大学院理学研究科

December 24, 2020

目次

- ① Spatial graph
- ② Quandle coloring
- ③ Quandle coloring quiver

目次

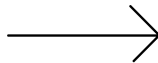
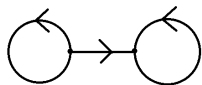
- ① Spatial graph
- ② Quandle coloring
- ③ Quandle coloring quiver

Spatial graph

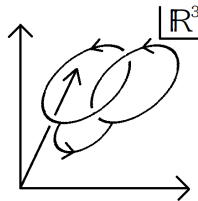
定義

抽象有向グラフ $G = (V(G), E(G))$ を, $\mathbb{R}^3$ へ埋め込んだものを G の空間グラフといい, $\tilde{G}$ と表記する.

また, 空間グラフ $\tilde{G}, \tilde{G}'$ に対して, 向きを保つ同相写像 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して, $\phi(\tilde{G}) = \tilde{G}'$, $\phi(V(\tilde{G})) = V(\tilde{G}')$ となるとき, $\tilde{G}, \tilde{G}'$ はアンビエント・イソトピックであるという.



埋め込み



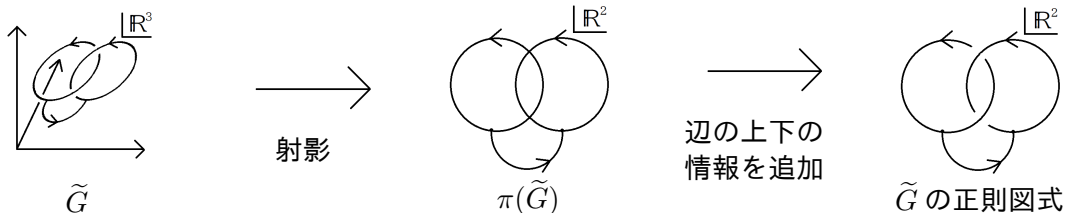
$\tilde{G}$

$$G = (V(G), E(G))$$

Spatial graph

定義

$\tilde{G}$ を空間グラフとする. $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を平面への射影であって, $\pi(\tilde{G})$ の多重点は有限個の2重点のみであるとする. そのとき, $\pi(\tilde{G})$ の2重点に辺の上下の情報を加えたものを, $\tilde{G}$ の正則図式という.

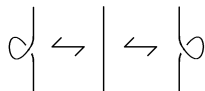


Spatial graph

g, g' をそれぞれ空間グラフ $\tilde{G}, \tilde{G}'$ の正則図式とする.

定義

$g \sim g' \Leftrightarrow g, g'$ が有限回の R-1 から R-5 の局所変形で移りあう.



R-1



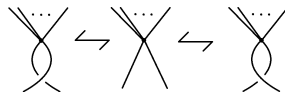
R-2



R-3



R-4



R-5

命題

$\tilde{G}, \tilde{G}'$ がアンビエント・イソトピックである $\Leftrightarrow g \sim g'$

目次

- ① Spatial graph
- ② Quandle coloring
- ③ Quandle coloring quiver

Quandle

定義 (Joyce, 1982)

X を集合とする. そのとき, X と 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が quandle である.
 $\Leftrightarrow$ 以下の 3 つの条件を満たす.

- (1) $\forall x \in X, x * x = x$
- (2) $\forall y \in X$, 写像 $S_y : X \rightarrow X; x \mapsto x * y$ が全単射
- (3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

以後, $(X, *)$ を単に X と書く.

Quandle

例

$n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x * y := 2y - x$ ($x, y \in X$) と定めると, $(X, *)$ は quandle になる. この quandle を 2 面体 quandle といい, R_n と表記する.

例

$n \in \mathbb{N}$, $X := R_n \sqcup \{\omega\}$, $*$: $X \times X \rightarrow X$ を以下のように定めると, X は quandle になる. この quandle を 準 2 面体 quandle といい, R'_n と表記する.

$$x * y := \begin{cases} 2y - x & (x, y \in R_n) \\ x & (otherwise) \end{cases}$$

	ω	0	1	2
ω	ω	ω	ω	ω
0	0	0	2	1
1	1	2	1	0
2	2	1	0	2

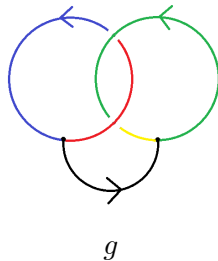
 R'_3

Quandle coloring

定義

g を空間グラフの正則図式とする. そのとき, $g \setminus V(g)$ の各連結成分を g の arc といい, $\mathcal{A}(g) := \{g \text{ の arc} \}$ と定める.

例 g を下図の正則図式とすると, g の arc は色を付けた 5 つの部分



Quandle coloring

定義 (Oshiro, 2012)

X を quandle とする. 任意の $a \in X$ と任意の $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対して, $a^\epsilon := (a, S_a^\epsilon)$ と表記する. また, $\tilde{X} := \{a^\epsilon | a \in X, \epsilon \in \{\pm 1\}\}$ とする. そのとき, $\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}^m$ の部分集合 P が X の pallet で

ある. $\Leftrightarrow$ 以下の 4 つの条件を満たす.

- (1) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, (a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_m^{\epsilon_m}, a_1^{\epsilon_1}) \in P$
- (2) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, S_{a_m}^{\epsilon_m} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = id_X$
- (3) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, \forall x \in X,$
 $(S_x(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x(a_m)^{\epsilon_m}) \in P, (S_x^{-1}(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x^{-1}(a_m)^{\epsilon_m}) \in P$
- (4) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P,$
 $(a_2^{\epsilon_2}, S_{a_2}^{\epsilon_2}(a_1)^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, (S_{a_1}^{-\epsilon_1}(a_2)^{\epsilon_2}, a_1^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P$

(1) は 頂点周りの coloring の well-defindness を保証する.

(2),(3) は R-4 変形, (4) は R-5 変形で彩色数が不変であることを保証する.

Quandle coloring

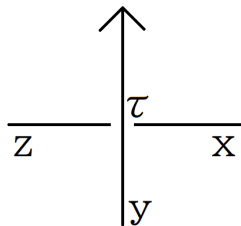
X を quandle, g を空間グラフの正則図式, P を X の pallet とする.

定義 (Oshiro, 2012)

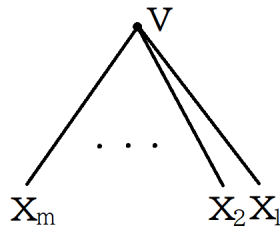
$C : \mathcal{A}(g) \rightarrow X$ が, g の (X, P) -coloring である.

$\Leftrightarrow g$ の各交点 τ と各頂点 v の周りの arc に対して, 以下の関係式が成り立つ.

($\deg(v) = m$ とする.)



$$C(x) * C(y) = C(z)$$



$$(C(x_1)^{\epsilon_1}, \dots, C(x_m)^{\epsilon_m}) \in P$$

但し, ϵ_i は arc x_i の向きが v に向かって入って来る時に $+1$, v から出ていく時に -1 をとる.

Example of pallet

例

R_n : 2 面体 quandle とする. そのとき,

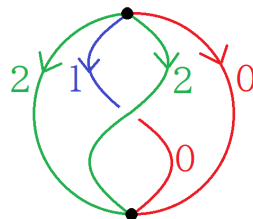
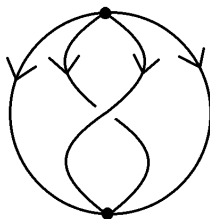
$$F_m := \begin{cases} \{(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in \widetilde{R}_n^m \mid \sum_{i=1}^m (-1)^i a_i = 0\} & (m : \text{even}) \\ \emptyset & (m : \text{odd}) \end{cases}, \quad F := \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$$

と定めると, F は R_n の pallet となる. このとき, F を R_n の Fox pallet という.

この講演では, 任意の頂点の次数が偶数である空間グラフを空間オイラーグラフという.
 g が空間オイラーグラフの正則図式の時, Fox pallet を用いて g を彩色できる.

Example of (R_n, F) -coloring

例 g を左下図の正則図式, R_3 : 2 面体 quandle とすると, 右下図の coloring は $0 - 2 + 1 - 2 \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_3}$, $2 - 2 + 0 - 0 \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_3}$ を満たすので, $(0^{-1}, 2^{-1}, 1^{-1}, 2^{-1}) \in F$, $(2^{+1}, 2^{+1}, 0^{+1}, 0^{+1}) \in F$ 故に, (R_3, F) -coloring である.



Quandle coloring

g, g' を空間グラフの正則図式とする.

定義 (Oshiro, 2012)

$\text{Col}_{(X,P)}(g) := \{g \text{ の } (X, P)\text{-coloring}\}$, $\text{col}_{(X,P)}(g) := \#\text{Col}_{(X,P)}(g)$ と定める.

命題 (Oshiro, 2012)

$\text{col}_{(X,P)}(g)$ は空間グラフの不変量である. 即ち,
 $g \sim g' \Rightarrow \text{col}_{(X,P)}(g) = \text{col}_{(X,P)}(g')$

目次

- ① Spatial graph
- ② Quandle coloring
- ③ Quandle coloring quiver

Quandle coloring quiver

定義

X を quandle とする. そのとき, $f: X \rightarrow X$ が X の quandle 自己準同型

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in X, f(x * y) = f(x) * f(y)$$

また, $\text{End}(X) := \{f: X \text{ の quandle 自己準同型} \}$

と定める.

P を X の pallet とする.

定義

$$\text{End}(X, P) := \left\{ f \in \text{End}(X) \mid \begin{array}{l} \forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, \\ (f(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, f(a_m)^{\epsilon_m}) \in P \end{array} \right\}$$

と定める.

Quandle coloring quiver

X を quandle, g を空間グラフの正則図式, P を X の pallet とする.

定義 (I.) (cf. Cho-Nelson, 2018)

$S \subset \text{End}(X, P)$ を任意の部分集合とする. そのとき,
 g の quandle coloring quiver $Q_{(X,P)}^S(g) = (V, E)$ を次で定義する.

(1) $V = \text{Col}_{(X,P)}(g)$

(2) $E = \{(v, w, f) \in V \times V \times S \mid w = f \circ v\}$

但し, 辺は第 1 成分を始点, 第 2 成分を終点として向きを定める.

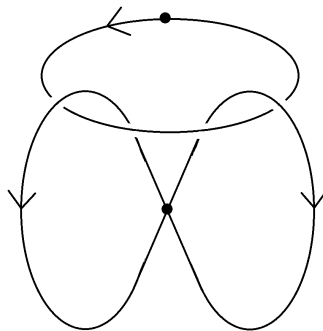
g, g' を空間グラフの正則図式とする.

定理 A (I.)

任意の $S \subset \text{End}(X, P)$ に対して, $Q_{(X,P)}^S(g)$ は空間グラフの不変量である. 即ち,
 $g \sim g' \Rightarrow Q_{(X,P)}^S(g) \cong Q_{(X,P)}^S(g')$ が成り立つ.

Example of quandle coloring quiver

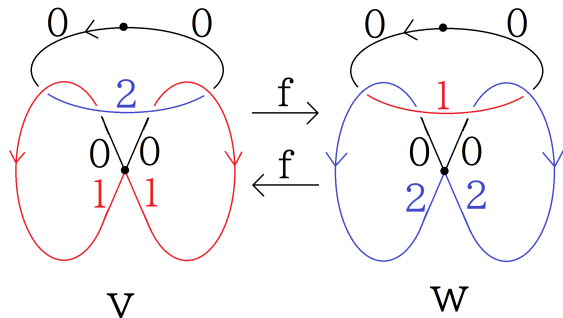
例 g を下図の正則図式, F を R_3 の Fox pallet と定めると, $\text{col}_{(R_3, F)}(g) = 9$ となる.



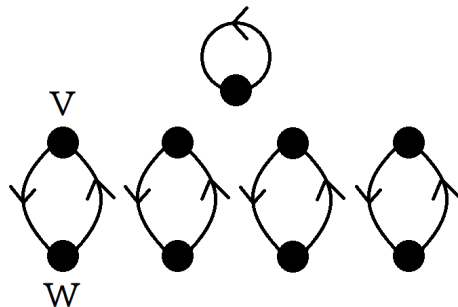
g

Example of quandle coloring quiver

$f \in \text{End}(R_3, F)$, $f(x) = 2x$, $S = \{f\}$ とすると, $Q_{(R_3, F)}^S(g)$ は以下のようにになる.



$$w = f \circ v, v = f \circ w$$



$$Q_{(R_3, F)}^S(g)$$

Result 1

F を R_n の Fox pallet とする.

命題 A (I.)

$$\text{End}(R_n, F) = \text{End}(R_n)$$

命題 B (I.)

以下の 2 つの条件を満たす空間オイラーグラフの正則関式 $g, g', n \in \mathbb{N}, S \subset \text{End}(R_n)$ が存在する.

$$(1) \text{col}_{(R_n, F)}(g) = \text{col}_{(R_n, F)}(g')$$

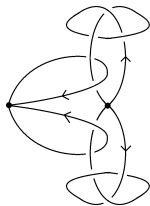
$$(2) Q_{(R_n, F)}^S(g) \not\cong Q_{(R_n, F)}^S(g')$$

注意

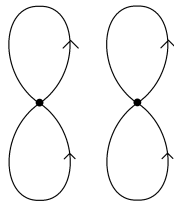
命題 B より, $Q_{(R_n, F)}^S(g)$ は $\text{col}_{(R_n, F)}(g)$ より真に強い不変量である.

Result 1

命題 B の証明 g, g' を下図の正則図式, $n = 9$ とすると,
 $\text{col}_{(R_9, F)}(g) = \text{col}_{(R_9, F)}(g') = 6561$ となる.



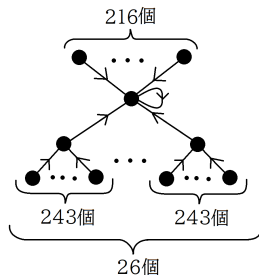
g



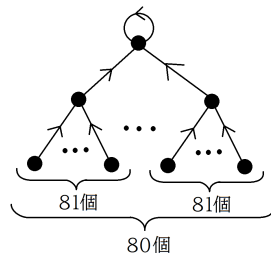
g'

Result 1

ここで, $f \in \text{End}(R_9, F)$, $f(x) = 3x$, $S = \{f\}$ とすると,
 $Q_{(R_9, F)}^S(g)$, $Q_{(R_9, F)}^S(g')$ はそれぞれ以下のようになる.



$$Q_{(R_9, F)}^S(g)$$



$$Q_{(R_9, F)}^S(g')$$

故に, $Q_{(R_9, F)}^S(g) \not\cong Q_{(R_9, F)}^S(g')$

□

Result 1

g, g' を空間オイラーグラフの正則図式とする.

定理 B (I.) (cf. Taniguchi, 2020)

p を奇素数, F を R_p の Fox pallet とする. そのとき,
 $\text{col}_{(R_p, F)}(g) = \text{col}_{(R_p, F)}(g') \Rightarrow$ 任意の $S \subset \text{End}(X)$ に対して, $Q_{(R_p, F)}^S(g) \cong Q_{(R_p, F)}^S(g')$

注意

定理 B より, $Q_{(R_p, F)}^S(g)$ は $\text{col}_{(R_p, F)}(g)$ と同じ強さの不変量である.

Example of pallet

$F = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$ を R_n の Fox pallet とする.

例

$R'_n = R_n \sqcup \{\omega\}$: 準 2 面体 quandle とする. その時,

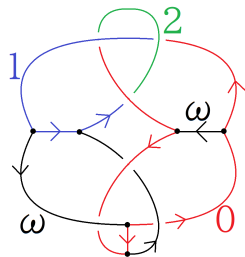
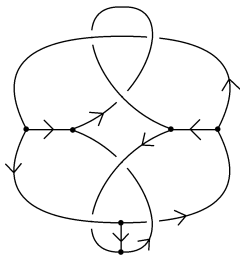
$$F'_m := \begin{cases} F_m & (m : \text{even}) \\ \left\{ (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in \widetilde{R'_n}^m \mid \begin{array}{l} \exists! i \text{ s.t. } a_i = \omega \\ (a_1^{\epsilon_1}, \dots, \widehat{a_i^{\epsilon_i}}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in F_{m-1} \end{array} \right\} & (m : \text{odd}) \end{cases},$$

$$F' := \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F'_m$$

と定めると, F' は R'_n の pallet となる. このとき, F' を R'_n の 準 Fox pallet という.

Example of (R'_n, F') -coloring

例 g を左下図の正則図式, R'_3 : 準 2 面体 quandle とすると,
右下図の coloring は, (R'_3, F') -coloring である.



Result 2

F' を R'_n の 準 Fox pallet とする.

命題 C (I.)

以下の 3 つの条件を満たす正則図式 $g, g', n \in \mathbb{N}, S \subset \text{End}(R'_n, F')$ が存在する.

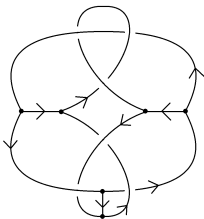
- (1) g, g' は奇数次数の頂点を持つ.
- (2) $\text{col}_{(R'_n, F')}(g) = \text{col}_{(R'_n, F')}(g')$
- (3) $Q^S_{(R'_n, F')}(g) \not\cong Q^S_{(R'_n, F')}(g')$

注意

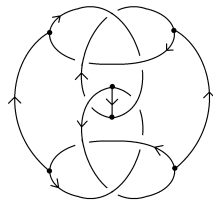
命題 C より, $Q^S_{(R'_n, F')}(g)$ は $\text{col}_{(R'_n, F')}(g)$ より真に強い不変量である.

Result 2

命題 C の証明 g, g' を下図の正則図式, $n = 3$ とすると,
 $\text{col}_{(R'_3, F')}(g) = \text{col}_{(R'_3, F')}(g') = 36$ となる.



g

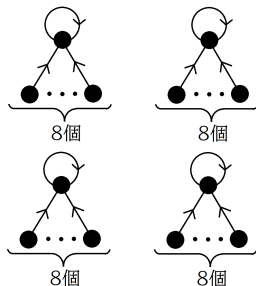


g'

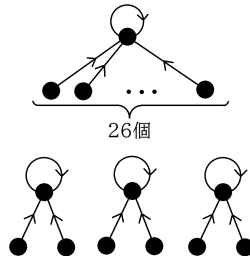
Result 2

ここで, $f \in \text{End}(R'_3, F')$, $f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0, 1, 2) \\ \omega & (x = \omega) \end{cases}$ とし, $S = \{f\}$ とすると,

$Q^S_{(R'_3, F')}(g)$, $Q^S_{(R'_3, F')}(g')$ はそれぞれ以下のようなになる.



$$Q^S_{(R'_3, F')}(g)$$



$$Q^S_{(R'_3, F')}(g')$$

故に, $Q^S_{(R'_3, F')}(g) \not\cong Q^S_{(R'_3, F')}(g')$

□

Thank you for your attention.