

安定写像と双曲絡み目

古谷 凌雅

広島大学

2020 年 12 月 26 日

結び目の数理 III

Plan of Talk

- 1 安定写像について.
- 2 Shadow について.
- 3 安定写像と shadow の関係.
- 4 双曲絡み目と安定写像.

Plan of Talk

- 1 安定写像について.
- 2 Shadow について.
- 3 安定写像と shadow の関係.
- 4 双曲絡み目と安定写像.

本講演では M は向きづけ可能な閉 3 次元可微分多様体をあらわす.

定義 (安定写像)

可微分写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ が 安定写像

$\iff \exists U_f \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^2) : f$ の開近傍 s.t. $\forall g \in U_f$,

$\exists \Phi : M \rightarrow M : \text{diffeo.}, \exists \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \text{diffeo. s.t. } g = \varphi \circ f \circ \Phi^{-1}.$

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\exists \Phi} & M \\
 \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow g \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\exists \varphi} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

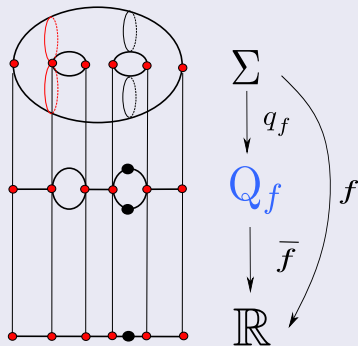
定義 (Stein 分解)

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$: 安定写像.

M に次の同値関係を定める.

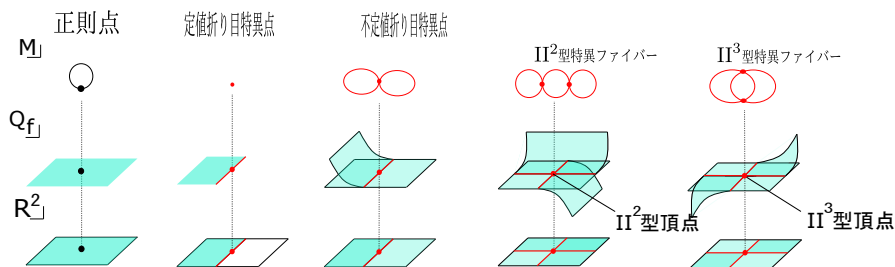
$x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1, x_2 \in (f \text{ のあるファイバーの連結成分})$

$Q_f := M / \sim : M$ の f による **Stein 分解**.



曲面の高さ関数の Stein 分解.

安定写像の特異点とファイバーの種類.



注意

本講演では安定写像はカusp特異点をもたないものとする (カusp特異点はホモトピー変形で除去可能である [Levine, 1965]).

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$: 安定写像.

定義

$Sing(f) := \{x \in M \mid x \text{ は } f \text{ の特異点}\}.$

$II^i(f) := f \text{ の } II^i \text{ 型特異ファイバーの総数 } (i = 2, 3).$

注意

$Sing(f)$ は M 内の絡み目となる.

$L : M$ 内の絡み目.

$E(L) : L$ の外部空間.

定義 (絡み目の安定写像)

安定写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ は (M, L) の安定写像である

$\stackrel{\text{def}}{\iff} L \subset \{x \in M \mid x \text{ は } f \text{ の定値折り目特異点} \}.$

定理 (佐伯, 1996)

$E(L)$ はグラフ多様体

$\iff \exists f : (M, L) \rightarrow \mathbb{R}^2 : \text{安定写像 s.t. } \textcolor{red}{II^2(f)} = 0 \text{ かつ } \textcolor{red}{II^3(f)} = 0.$

系

L は双曲絡み目

$\implies (M, L)$ の安定写像 f は $\textcolor{red}{II^2(f)} \neq 0$ または $\textcolor{red}{II^3(f)} \neq 0.$

問題

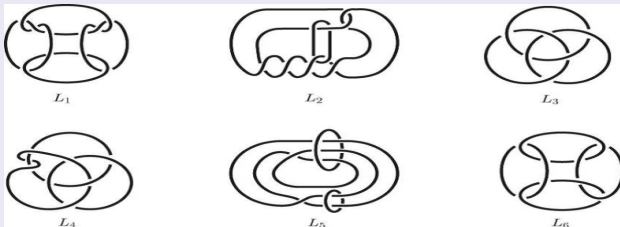
II^i 型特異ファイバー ($i = 2, 3$) を 1 本のみもつ双曲絡み目はどのようなものがあるか.

定理 (石川-古宇田, 2017)

$L : S^3$ 内の双曲絡み目.

$E(L) \approx E(L_i)$ または $E(L_i)$ with Dehn filling

$\iff \exists f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $II^2(f) = 1$ かつ $II^3(f) = 0$.



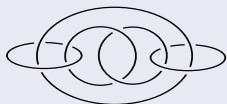
出典: Ishikawa, M., Koda, Y.: Stable maps and branched shadows of 3-manifold. Math. Ann. **367**, 1819-1863 (2017).

主定理

$L : S^3$ 内の双曲絡み目.

$E(L) \approx E(L'_i)$ または $E(L'_i)$ with Dehn filling

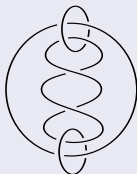
$\iff \exists f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 0$ かつ $\text{II}^3(f) = 1$.



L'_1



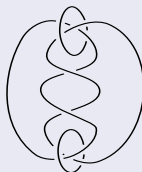
L'_2



L'_3



L'_4



L'_5

主定理の証明のプラン.

$L : S^3$ 内の双曲絡み目.

$E(L) \approx E(L'_i)$ または $E(L'_i)$ with Dehn filling

$\iff \exists f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 0$ かつ $\text{II}^3(f) = 1$.

キーワード

Shadow (絡み目外部空間を 2 次元多面体であらわしたもの)

$\Leftarrow$) Stein 分解を "shadow" とみなし, この shadow があらかず絡み目外部空間を調べることで定義域 (S^3, L) を特徴づける.

$\Rightarrow$) $E(L)$ の "shadow" を基に II^3 型特異ファイバーを 1 つのみもつ (S^3, L) の安定写像を構成する.

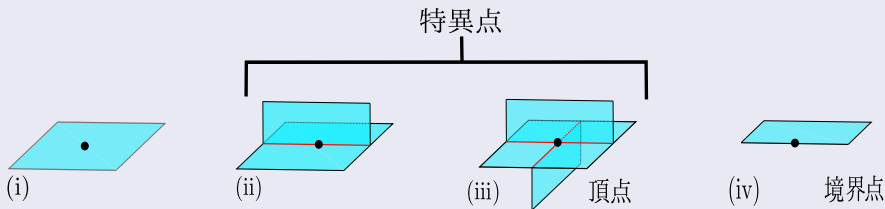
Plan of Talk

- 1 安定写像について.
- 2 Shadow について.
- 3 安定写像と shadow の関係.
- 4 双曲絡み目と安定写像.

定義 (Simple polyhedron)

コンパクト空間 P が **simple polyhedron**

$\iff_{\text{def}} \forall x \in P, \text{Nbd}(x; P)$ は次のいずれかと同相である.



定義

$Sing(P) := \{x \in P \mid x \text{ は } P \text{ の特異点}\}.$

$P - Sing(P)$ の連結成分を P の領域とよぶ.

定義 (Shadow)

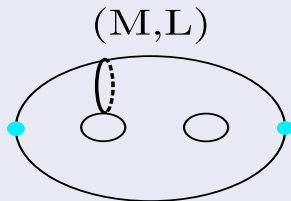
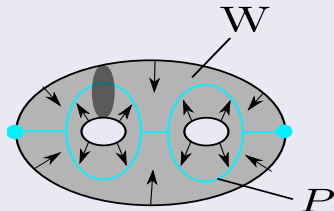
P : simple polyhedron.

L : M 内の絡み目.

P : $\mathbf{E}(L)$ の shadow

$\iff_{\text{def}} \exists W$: 向き付け可能な 4 次元可微分多様体 s.t.

- $\partial W = M$.
- $P \subset W$: 局所平坦.
- W は P に collapse する.
- $P \cap \partial W = \partial P$ かつ $L \subset \partial P$.



定理 (Turaev, 1992)

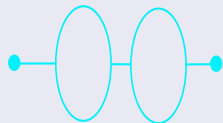
L : M 内の絡み目.

P : $E(L)$ の shadow.

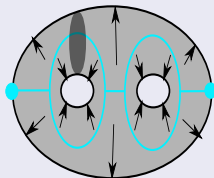
$\exists g : \{P \text{ の領域} \} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

$(P, g) \rightsquigarrow E(L)$ (Turaev's reconstruction).

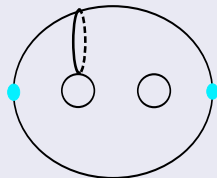
(P, g)



(W, P)



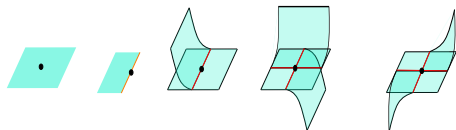
(M, L)



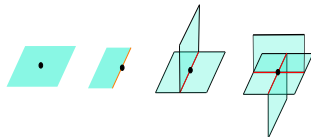
Plan of Talk

- 1 安定写像について.
- 2 Shadow について.
- 3 安定写像と shadow の関係.
- 4 双曲絡み目と安定写像.

Stein 分解の局所モデル



Shadow の局所モデル



定義 (branched shadow)

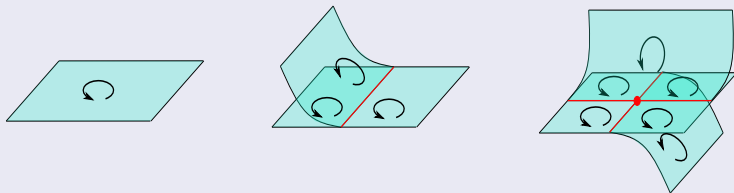
P : simple polyhedron.

L : M 内の絡み目.

P : $E(L)$ の **branched shadow**



- P は $E(L)$ の shadow.
- 各領域に向きが入っており P にはそれによる分岐構造が入っている.

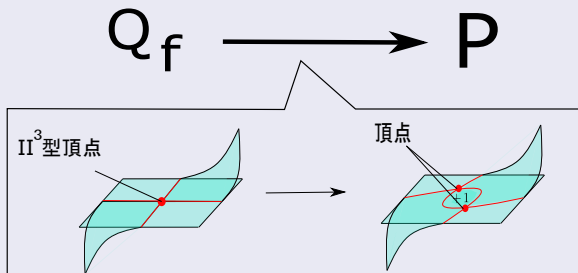


$L : M$ 内の絡み目.

定理 (Costantino-D. Thurston, 2008)

$f : (M, L)$ の安定写像.

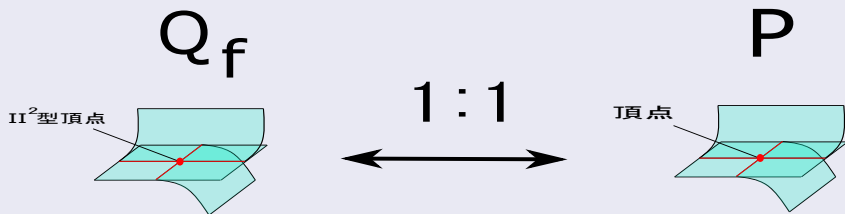
Stein 分解 Q_f に下図の取り換えを施すことで $E(L)$ の branched shadow P を得る.



定理 (石川-古宇田, 2017)

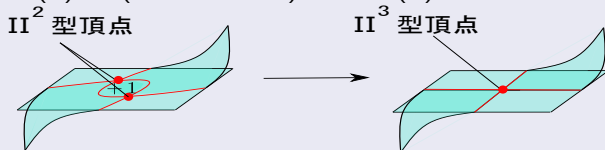
$P : E(L)$ の branched shadow.

$\exists f : (M, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = (P \text{ の頂点数})$, $\text{II}^3(f) = 0$.



注意

$f \rightarrow \tilde{f}$ s.t. $\text{II}^2(\tilde{f}) = (P \text{ の頂点数}) - 2$, $\text{II}^3(\tilde{f}) = 1$.



Plan of Talk

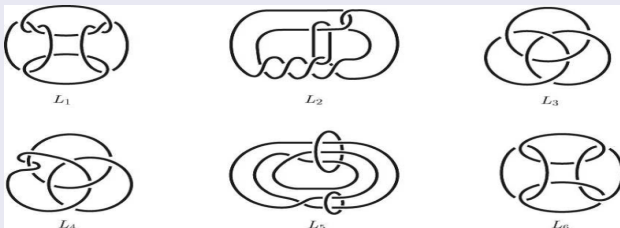
- 1 安定写像について.
- 2 Shadow について.
- 3 安定写像と shadow の関係.
- 4 双曲絡み目と安定写像.

定理 (石川-古宇田, 2017(再録))

$L : S^3$ 内の双曲絡み目.

$E(L) \approx E(L_i)$ または $E(L_i)$ with Dehn filling

$\iff \exists f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 1$ かつ $\text{II}^3(f) = 0$.



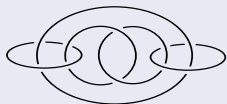
出典: Ishikawa, M., Koda, Y.: Stable maps and branched shadows of 3-manifold. Math. Ann. **367**, 1819-1863 (2017).

主定理 (再録)

$L : S^3$ 内の双曲絡み目.

$E(L) \approx E(L'_i)$ または $E(L'_i)$ with Dehn filling

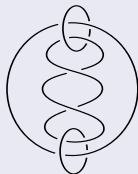
$\iff \exists f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 0$ かつ $\text{II}^3(f) = 1$.



L'_1



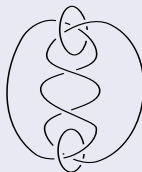
L'_2



L'_3



L'_4



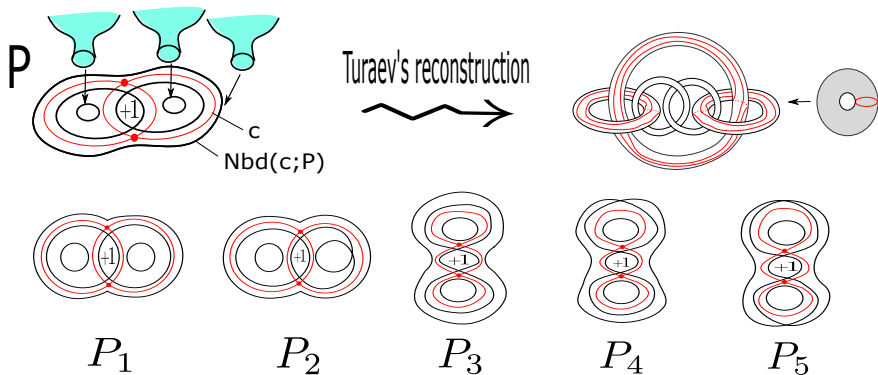
L'_5

(証明: $\Leftarrow$)

$f : (S^3, L)$ の安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 0$ かつ $\text{II}^3(f) = 1$.

P : Stein 分解 Q_f を $E(L)$ の branched shadow とみなしたものの.

c : $\text{Sing}(P)$ の連結成分 s.t. P のすべての頂点を含む.



$\text{Nbd}(c; P)$ は $P_1, P_2, \dots, P_5$ のいずれかと同型.

$E(L_i)$ は P_i を shadow にもつ ($i = 1, 2, \dots, 5$).

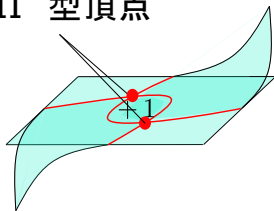
(証明: $\implies$)

$L : S^3$ 内の双曲絡み目 s.t.

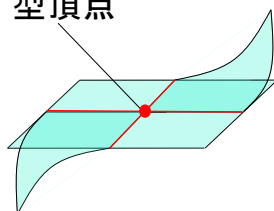
$E(L) \approx E(L'_i)$ または $E(L'_i)$ with Dehn filling.

- $E(L)$ の branched shadow P を P_i に適当な branched polyhedron を接着することで構成する.
- P から (S^3, L) の安定写像 f を構成する.
- f に写像の局所的な取り換えを施す.

II² 型頂点



II³ 型頂点



L'_i : 定理の絡み目.

$\exists f : (S^3, L'_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$: 安定写像 s.t. $\text{II}^2(f) = 0$ かつ $\text{II}^3(f) = 1$
 かつ II^3 型特異ファイバーは以下の位置にある.

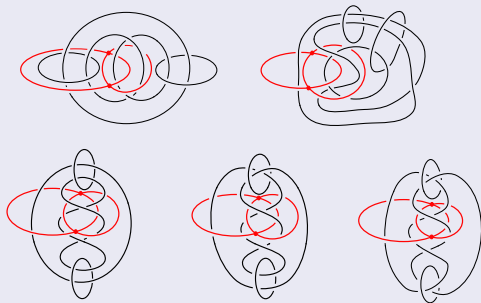
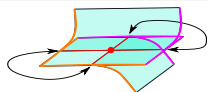


Figure: L'_i と II^3 型特異ファイバーの位置.

注意 (Costantino-D. Thurston, 2008)

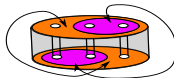
$vol(L_i) = 2 \times (\text{理想双曲正 8 面体の体積}) = 7.2 \dots$

$vol(L'_i) = 10 \times (\text{理想双曲正 4 面体の体積}) = 10.14 \dots$

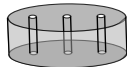
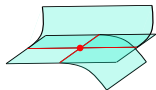


$E(L_i)$ のshadow

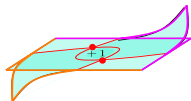
Turaev's reconstruction



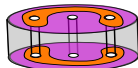
$E(L_i)$



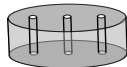
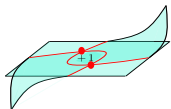
by $2 \times (\text{切頂理想双曲正 8 面体})$



$E(L'_i)$ のshadow



$E(L'_i)$



by $10 \times (\text{切頂理想双曲正 4 面体})$

ご清聴ありがとうございました.