# 交点数が 3 以下の long virtual knot について

吉田 立樹

神戸大学大学院理学研究科数学専攻

2023 年 12 月 25 日

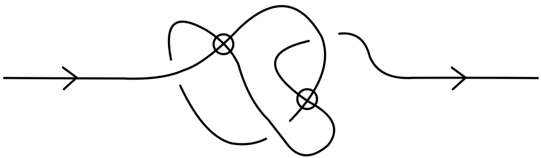
## Definition (long virtual knot)

はめこみ $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が,

(i) $x_0 > 0$ が存在して $|\, x \,| > x_0$ を満たす任意の $x$ について $\alpha(x) = (x, 0)$ である

(ii) $\alpha(\mathbb{R})$ の任意の交点には, real crossing か virtual crossing のどちらかの情報がついている

を満たすとき $D = \alpha(\mathbb{R})$ を<u>long virtual knot diagram</u> (単に diagram) という. diagram 全体の集合を generalized Reidemeister moves で移り合うという同値関係で割ったときの同値類を<u>long virtual knot</u>という.

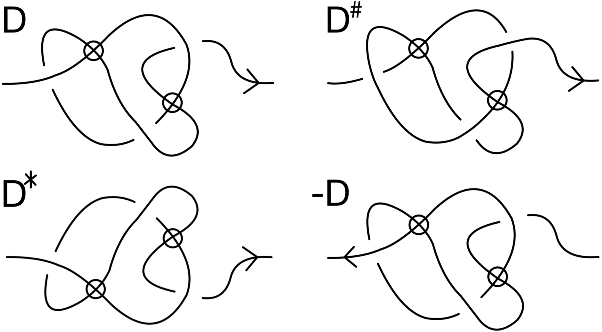


## Definition (交点数)

long virtual knot $K$ に対して, $K$ の<u>交点数</u> $c(K)$ を次で定義する.

$$c(K) = min\{D \text{ の real crossing の数} \mid D\colon K \text{ の diagram}\}$$

long virtual knot $K$ の diagram $D$ に対して，すべての real crossing の上下を入れかえたものを $D^{\#}$，鏡に映したものを $D^*$，向きを逆にしたものを $-D$ とする．また，3 つの diagram があらわす long virtual knot をそれぞれ $K^{\#}$, $K^*$, $-K$ とする．




## Notation

long virtual knot $K$ に対して

$$\overline{K} = \left\{K, K^{\#}, K^*, K^{\#*}, -K, -K^{\#}, -K^*, -K^{\#*}\right\}$$

$$c\left(\overline{K}\right) = c(K) : \overline{K} \text{ の交点数}$$

**Theorem (Y. '23)**

交点数が $3$ 以下の long virtual knot $\overline{K}$ について以下が成り立つ.

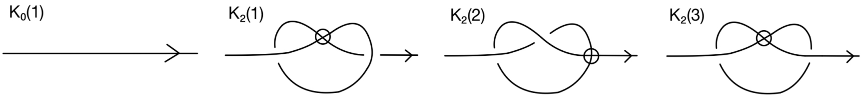
(i) $c\left(\overline{K}\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{K} = \overline{K_0(1)}$ (自明).

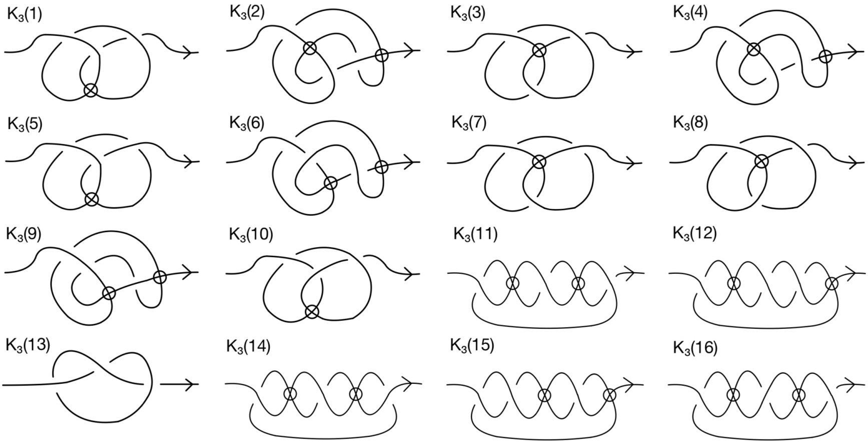
(ii) $c\left(\overline{K}\right) = 1$ となる $\overline{K}$ は存在しない.

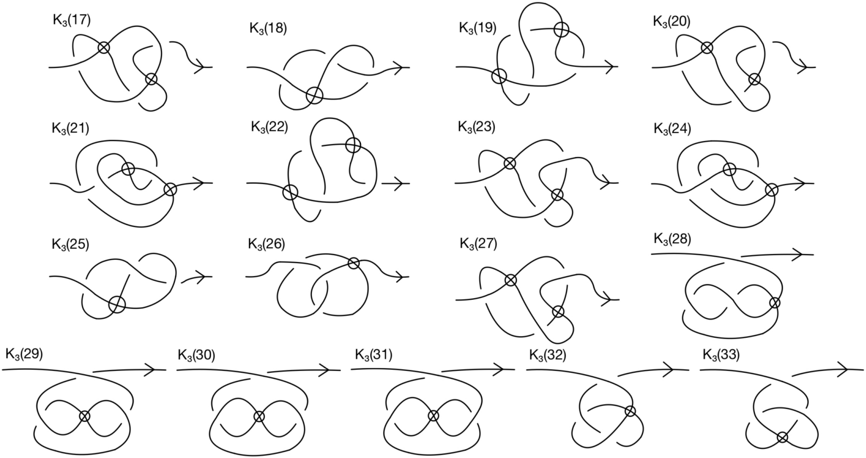
(iii) $c\left(\overline{K}\right) = 2 \Leftrightarrow \overline{K} = \overline{K_2(1)}, \overline{K_2(2)}, \overline{K_2(3)}$.
またこれらは互いに異なる.

(iv) $c\left(\overline{K}\right) = 3 \Leftrightarrow \overline{K} = \overline{K_3(1)}, \dots, \overline{K_3(33)}$.
また以下の $3$ 組をのぞく任意の $2$ つは異なる.

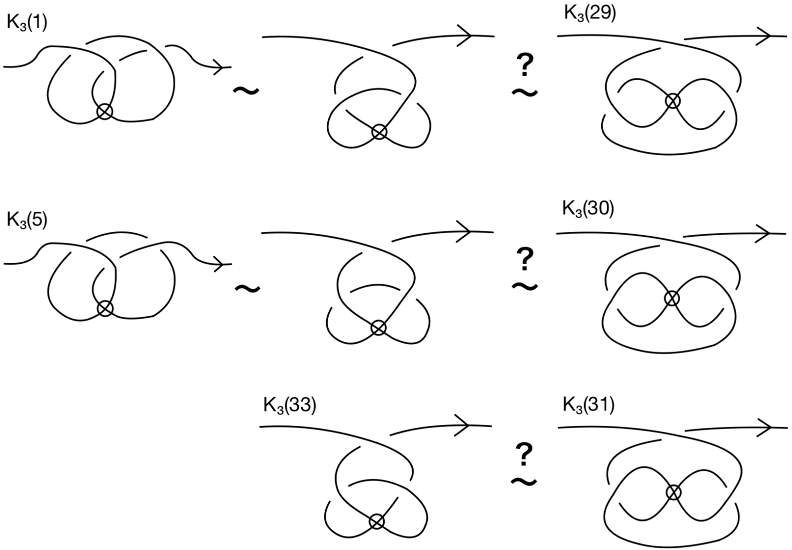
$$\left\{\overline{K_3(1)}, \overline{K_3(29)}\right\}, \left\{\overline{K_3(5)}, \overline{K_3(30)}\right\}, \left\{\overline{K_3(31)}, \overline{K_3(33)}\right\}.$$




$K_3(1)$
$K_3(2)$
$K_3(3)$
$K_3(4)$
$K_3(5)$
$K_3(6)$
$K_3(7)$
$K_3(8)$
$K_3(9)$
$K_3(10)$
$K_3(11)$
$K_3(12)$
$K_3(13)$
$K_3(14)$
$K_3(15)$
$K_3(16)$


K3(17)
K3(18)
K3(19)
K3(20)
K3(21)
K3(22)
K3(23)
K3(24)
K3(25)
K3(26)
K3(27)
K3(28)
K3(29)
K3(30)
K3(31)
K3(32)
K3(33)

**以下の 3 組** $\left\{\overline{K_3(1)}, \overline{K_3(29)}\right\}, \left\{\overline{K_3(5)}, \overline{K_3(30)}\right\}, \left\{\overline{K_3(31)}, \overline{K_3(33)}\right\}$ **は等しいか否かを区別できていない**.



タイプ A： $K,\ K^{\#},\ K^{*},\ K^{\#*},\ -K,\ -K^{\#},\ -K^{*},\ -K^{\#*}$ が異なる.

タイプ B： $K=-K,\ \ K^{\#}=-K^{\#},\ \ K^{*}=-K^{*},\ \ K^{\#*}=-K^{\#*}$ が異なる.

タイプ C： $K=-K^{*},\ \ K^{\#}=-K^{\#*},\ \ K^{*}=-K,\ \ K^{\#*}=-K^{\#}$ が異なる.

タイプ D： $K=-K^{\#*},\ \ K^{\#}=-K^{*},\ \ K^{*}=-K^{\#},\ \ -K=K^{\#*}$ が異なる.

タイプ E： $K=-K=K^{\#*}=-K^{\#*},\ \ K^{\#}=-K^{\#}=K^{*}=-K^{*}$ が異なる.

**Theorem (Y. '23)**

| $K_2(k)$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **タイプ** | D | B | C |

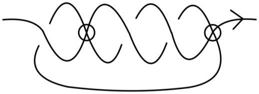
| $K_3(k)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **タイプ** | D | A | D | A | A | A | A | D | A | D |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| D | A/B | E | A | A/B | D | A | A/B | A | A | A | A |

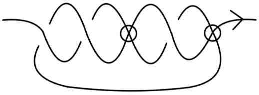
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | |
| A | A | A/B | B | A | A/B | D | A | D | A/B | D | |

**以下の 6 つは $K$ と $-K$ が等しいか否かを区別できていない.**

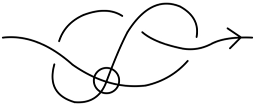
$K_3(12)$



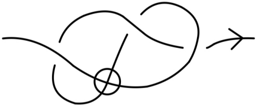
$K_3(15)$



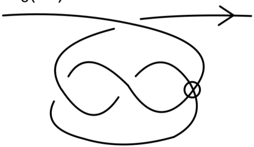
$K_3(18)$



$K_3(25)$



$K_3(28)$



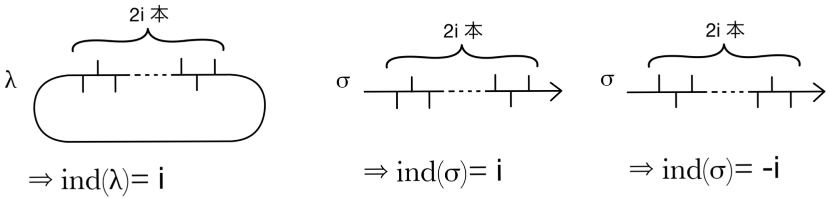
$K_3(32)$

## 証明の概略

- Gauss diagram **を用いて** real crossing **が** $3$ **個以下の** diagram **を構成**.
- **宮澤多項式**, writhe **多項式**, closure, $3$ **彩色数を用いて分類**.

(long virtual knot **の宮澤多項式の定義**)

long virtual knot diagram **の** state $S$ **は**, **いくつかの** loop **と** $1$ **本の** string **から構成される**. loop $\lambda$ **上にポールが** $2i$ **本あるとき**, $ind(\lambda) = i$ **とする**. **また** $S$ **に対して**, $ind(\lambda) = i$ **となる** loop **の個数を** $c_i(S)$ **とする**. string $\sigma$ **に対して**, $ind(\sigma)$ **を図のように定める**.



## Definition (long virtual knot の宮澤多項式)

$D$ を long virtual knot $K$ の diagram とする. $D$ の各 state $S$ に対して, $a(S)$, $b(S)$ をそれぞれ A 平滑化, B 平滑化の回数とし, $\langle D \mid S\rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, \boldsymbol{x}, y]$ を次で定義する.

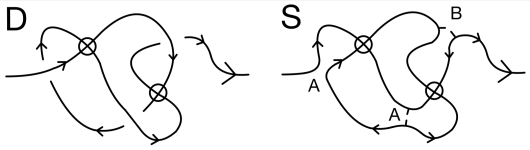
$$\langle D \mid S\rangle = A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{c_0(S)} \cdot \prod_{i \geq 1} x_i^{c_i(S)} \cdot y^{ind(\sigma)}.$$

このとき $K$ の宮澤多項式 $R(K)$ を次で定義する.

$$R(K) = (-A^3)^{-\omega(D)} \sum_{S \in S(D)} \langle D \mid S\rangle.$$

## Example

$\langle D \mid S\rangle = A^{2-1}(-A^2 - A^{-2})^0 x_1 y^1 = A x_1 y, \quad R(K) = -A^{-2} x_1 y - A^{-4} y^2.$



## Proposition

long virtual knot $K$ に対して，次が成り立つ.

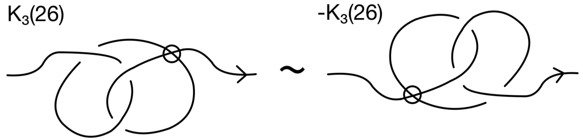
(i) $R(K^{\#})(A, \boldsymbol{x}, y) = R(K)(A^{-1}, \boldsymbol{x}, y)$.

(ii) $R(K^{*})(A, \boldsymbol{x}, y) = R(K)(A^{-1}, \boldsymbol{x}, y^{-1})$.

(iii) $R(-K)(A, \boldsymbol{x}, y) = R(K)(A, \boldsymbol{x}, y)$.

## Example

$K = K_3(26)$ のとき，$K = -K$，$K^{\#} = -K^{\#}$，$K^{*} = -K^{*}$，$K^{\#*} = -K^{\#*}$ はそれぞれ異なる.




$$R(K) = 1 - A^4 + A^8 + (A^{-2} - A^2)y^{-1},$$

$$R(K^{\#}) = 1 - A^{-4} + A^{-8} + (A^2 - A^{-2})y^{-1},$$

$$R(K^{*}) = 1 - A^{-4} + A^{-8} + (A^2 - A^{-2})y,$$

$$R(K^{\#*}) = 1 - A^4 + A^8 + (A^{-2} - A^2)y.$$