ニット状曲面の構成とアレキサンダーの定理

安田順平

結び目の数理（12 月 26 日）

大阪大学

中村伊南沙氏（佐賀大学）との共同研究に基づく

Notation

- $n \geq 1$: 整数
- $I = [0, 1]$
- D^2, B^2: 2 次元円板
- 滑らかなカテゴリーまたは PL カテゴリーで議論する。

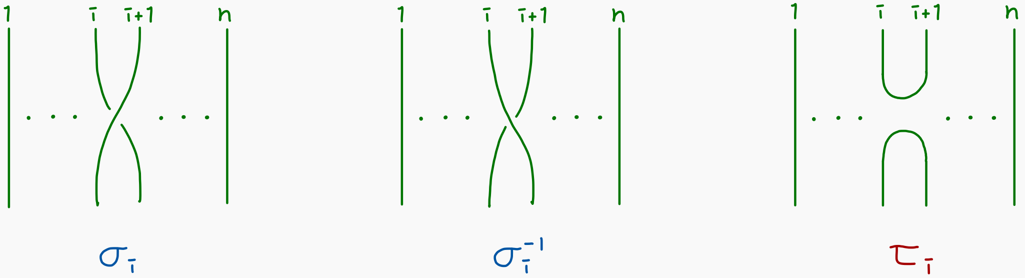
導入 (1/2)

次数 n のブレイド (braid)

:⇔ σ_i, σ_i^{-1} $(i = 1, \ldots, n-1)$ の組み合わせで得られる $D^2 \times I$ 内のタングル

次数 n のニット (knit)

:⇔ $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ の組み合わせで得られる $D^2 \times I$ 内のタングル



導入 (2/2)

$D^2 \times I$: 3 次元球体 $\longrightarrow$ $D^2 \times B^2$: 4 次元球体

- ブレイド $\longrightarrow$ ブレイド状曲面 (Rudolph, 1983)
- ニット $\longrightarrow$ ニット状曲面 (Today!)

事実 (Rudolph, 1983)
$F: D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた境界付き曲面
F はブレイド状曲面と全同位である $\Leftrightarrow$ F はリボンである。

主定理
$D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた境界付き曲面は、ニット状曲面と全同位である。

$\longrightarrow$ そのような全ての曲面はチャート表示を持つ！

チャート (1/3)

$$\begin{cases}\Gamma\text{: チャート} \\ h : B^2 \to [0,1]\text{: 高さ関数}\end{cases} \quad \to \quad S\text{: ニット状曲面}$$

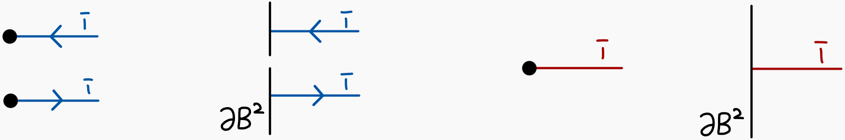
次数 n のチャート (chart, BMW chart) とは、以下の情報を持つ B^2 上の平面グラフ $\Gamma = (V, E)$ である：

1. $\lambda : E \to \{\sigma_i, \tau_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)\}$: ラベリング
2. $e \in E$: 有向な辺 $\Leftrightarrow \lambda(e) = \sigma_i$.
3. 各頂点の次数は $1, 3, 4, 6$ のいずれかである。
4. 各頂点に隣接する辺のラベリングは次のいずれかである：

$$\begin{cases}\lambda(e) = \sigma_i : \xrightarrow{\qquad i \qquad} \\ \lambda(e) = \tau_i : \overset{i}{\text{―――――}}\end{cases}$$

チャート (2/3)

- 次数 1 の頂点



- 次数 3 の頂点

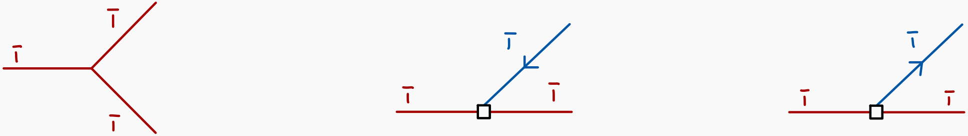
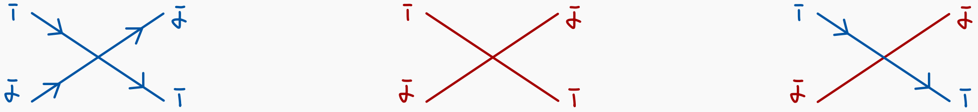
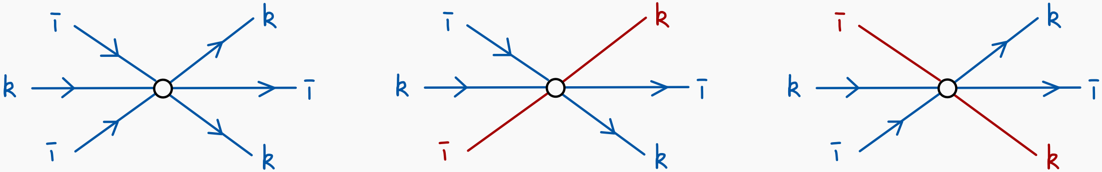


チャート (3/3)

- 次数 4 の頂点 ($|i - j| \geq 2$)



- 次数 6 の頂点 ($|i - k| = 1$)

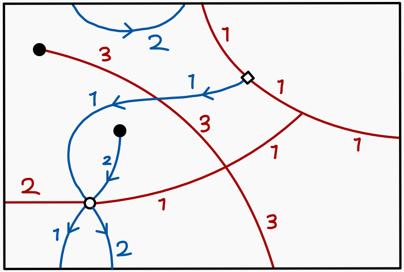


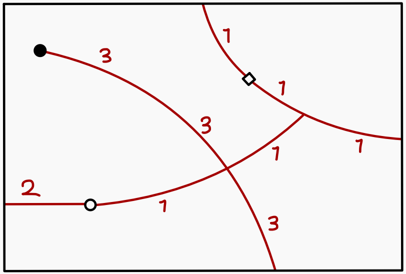
チャートの高さ関数 (1/3)

Γ: 次数 n のチャート

$\Gamma_\tau := (V_\tau, E_\tau)$: Γ の部分グラフを以下で定める：

- $E_\tau := \lambda^{-1}(\tau_1) \cup \lambda^{-1}(\tau_2) \cup \cdots \cup \lambda^{-1}(\tau_{n-1})$.
- $V_\tau := \bigcup_{e \in E_\tau} \partial e$.





チャートの高さ関数 (2/3)

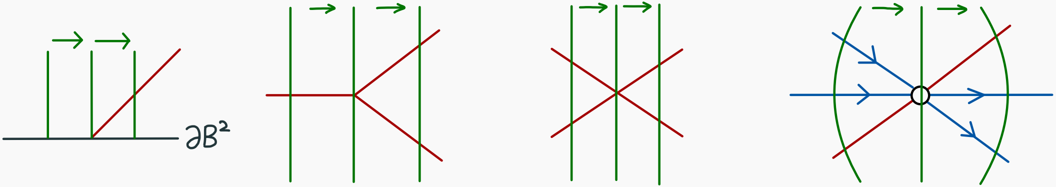
$h : B^2 \twoheadrightarrow [0,1]$: Γ の高さ関数 (height function) :$\Leftrightarrow$

1. ${}^\forall t \in [0,1]$, $h^{-1}(t) \approx I$.
2. ${}^\forall e \in E_\tau, {}^\forall t \in [0,1]$, $h^{-1}(t) \pitchfork e$ （横断的である）
3. ${}^\forall v \in V_\tau, {}^\exists N \subset B^2$: v の近傍, $0 <^\forall \varepsilon << 1$ s.t.

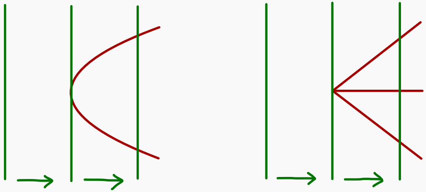
$$\left|\sharp(N_{t+\varepsilon} \cap E_\tau) - \sharp(N_{t-\varepsilon} \cap E_\tau)\right| \leq 1 \quad \left(t := h(v),\ N_t := h^{-1}(t) \cap N\right).$$

チャートの高さ関数 (3/3)

- 高さ関数の例



- 高さ関数でない例



ニット状曲面の構成 (1/8)

入力：

- Γ: 次数 n のチャート
- $h : B^2 \to [0, 1]$: Γ の高さ関数

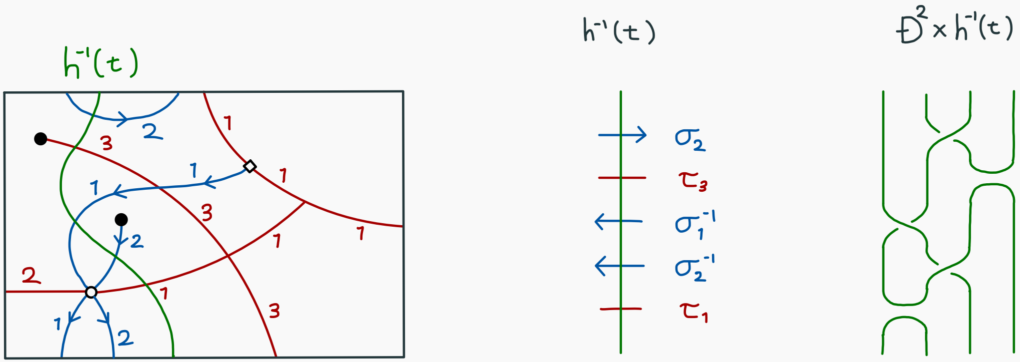
出力：

- β_t: $D^2 \times h^{-1}(t)$ 内のニット ($t \in [0, 1]$)

$\to D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた曲面 $S(\Gamma, h) := \bigcup_{t\in[0,1]} \beta_t$ が定まる。

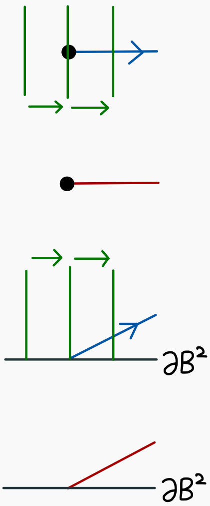
定義
$S = S(\Gamma, h)$: 次数 n のニット状曲面 (knitted surface, BMW surface)

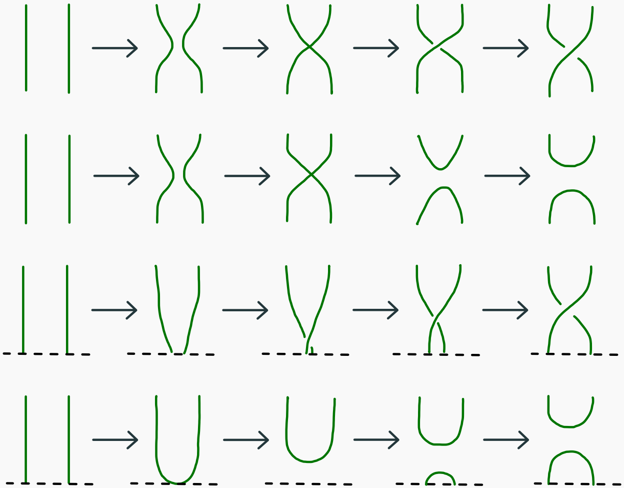
ニット状曲面の構成 (2/8)



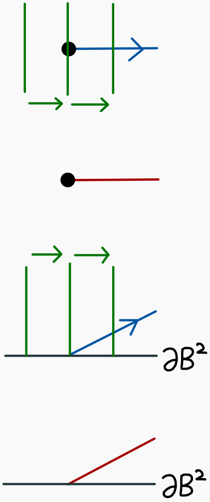
intersection word $\longrightarrow$ knit word $\longrightarrow$ knit

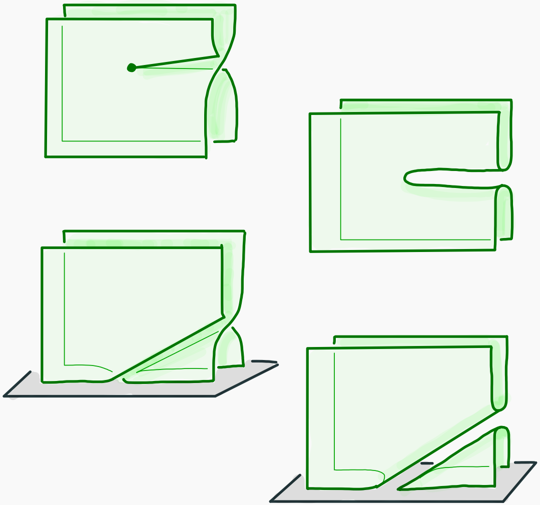
ニット状曲面の構成 (3/8)



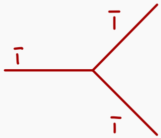


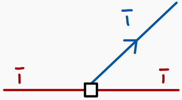
ニット状曲面の構成 (3/8)

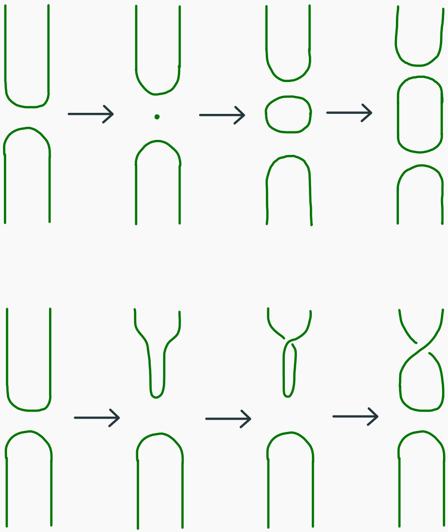




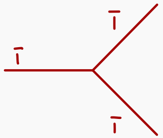
ニット状曲面の構成 (4/8)

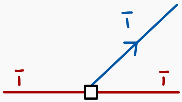


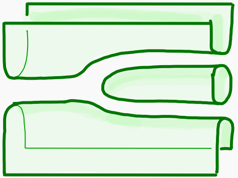


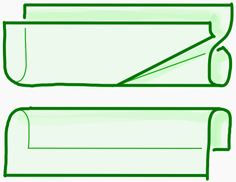


ニット状曲面の構成 (4/8)

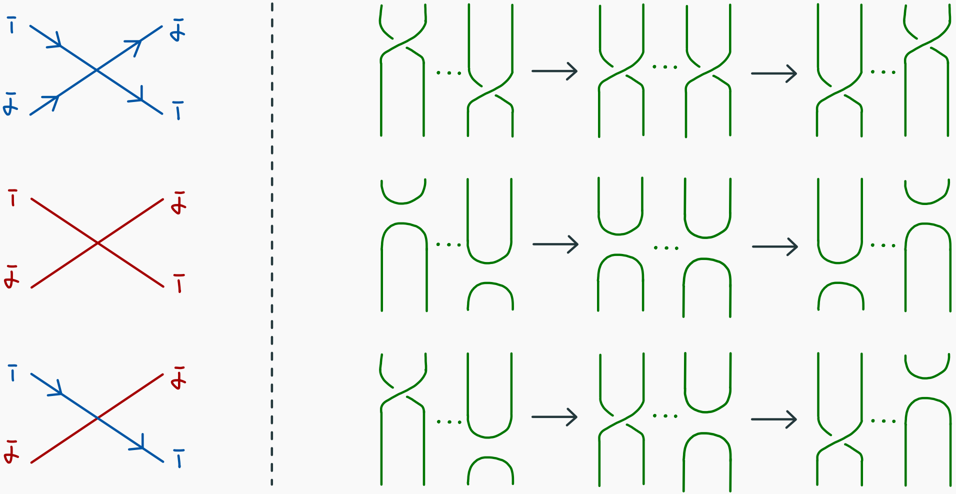




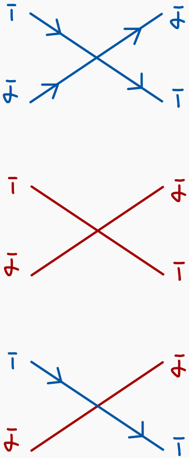


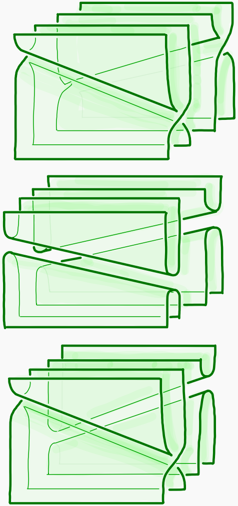


ニット状曲面の構成 (5/8)

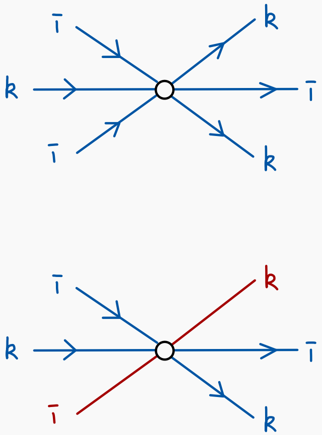


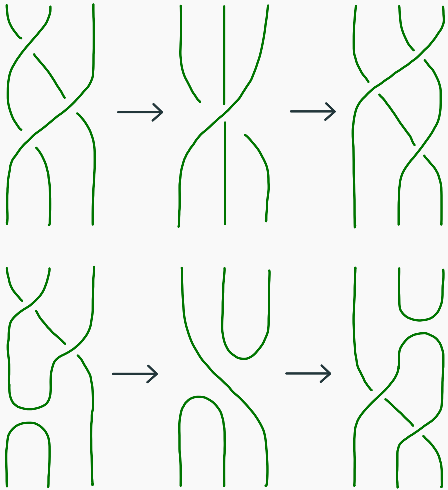
ニット状曲面の構成 (5/8)



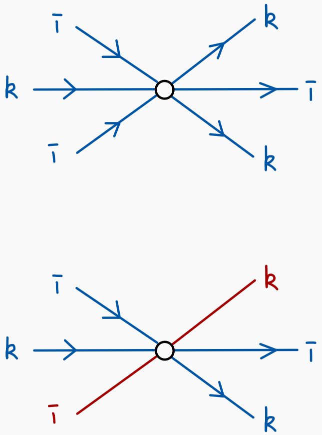


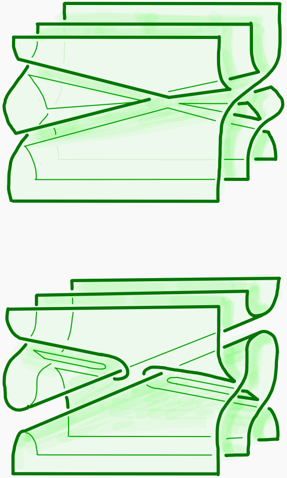
ニット状曲面の構成 (6/8)



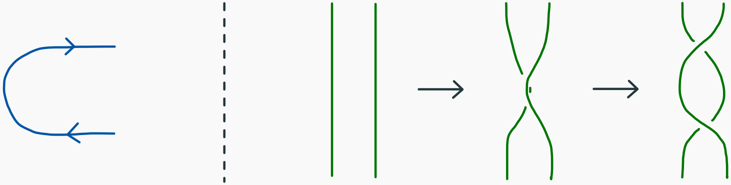


ニット状曲面の構成 (6/8)





ニット状曲面の構成 (7/8)



定義

Γ: 次数 n のチャート， $h: B^2 \to [0,1]$:Γ の高さ関数

$S = S(\Gamma, h)$: 次数 n のニット状曲面 (knitted surface, BMW surface)

ニット状曲面の構成 (8/8)

定義
Γ: 次数 n のチャート，$h : B^2 \to [0, 1]$:Γ の高さ関数
$S = S(\Gamma, h)$: 次数 n のニット状曲面 (knitted surface, BMW surface)

Remark (Kamada, 1992)
$S = S(\Gamma, h)$ がブレイド状曲面 (braided surface) である
$\Leftrightarrow$ Γ が τ でラベル付けされた辺を持たない（または $\Gamma_\tau = \emptyset$）。

主定理
$D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた境界付き曲面は、ニット状曲面と全同位である。

参考文献

- S. Kamada, Braid and knot theory in dimension four, Mathematical Surveys and Monographs, 95, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- J. Murakami, The Kauffman polynomial of links and representation theory, Osaka J. Math. 24(1987), 745-758.
- I. Nakamura, Knotted surfaces constructed using generators of the BMW algebras and their graphical description, arXiv:2306.10479v1.
- L. Rudolph, Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids, Comment. Math. Helv. 58(1983), 001-037.