グラフの被覆を保つ変形と被覆の性質

山田　寛之

埼玉大学大学院 理工学研究科
数理電子情報専攻 数学 PG

2023 年 12 月 23 日

研究の動機

多面体絡み目としてみて化合物の構造を研究していたことを背景に, 超分子を空間グラフと見たときにどのようなものであるのか理解したい.

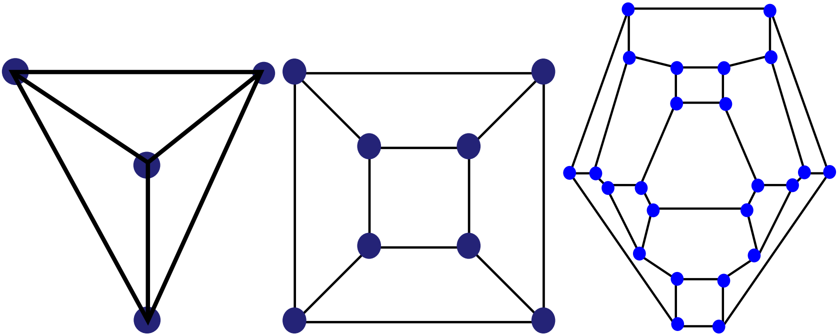
今回の研究の流れ

- 多面体絡み目での被覆の考え方をもとに整理したの定義ではどんな空間グラフを被覆できるのかを知りたい.
- 空間の被覆を調べる準備として抽象的なグラフでの被覆を定義してその性質を考察.
- 被覆の性質を証明.
- 空間グラフでの性質も調べている.

目次

定義 1 (グラフ)

グラフ G とは頂点集合 V とその頂点の非順序対を構成要素とする辺集合 E とから構成されるもののことである.



今回は多重辺も考える

定義 2 (n 重-被覆,(n,m)-被覆)

$G_1=(V_1,E_1), G_2=(V_2,E_2)$:ループを含まない有限グラフ

$n,m\in\mathbb{N}$

G_1 は G_2 を (n,m)-被覆する

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 以下を満たす $f:G_1\to G_2$ が存在する.

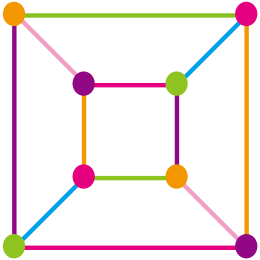
1. $f|_{V_1}:V_1\to V_2$ $f|_{E_1}:E_1\to E_2$
2. $\forall e\in E_1$ $\partial e=\langle v,u\rangle$ $\partial f(e)=\langle f(v),f(u)\rangle$
3. $\forall e'\in E_2$ $|f^{-1}(e')|=n$
4. $\forall v'\in V_2$ $|f^{-1}(v')|=m$

このときの $f:G_1\to G_2$ を (n,m)-被覆写像という

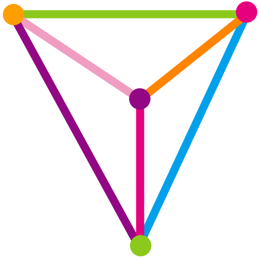
また,最後の条件を考えないとき G_1 は G_2 を n 重被覆するという.

G_1 が G_2 を $(2,2)$-被覆する例

G_1



G_2

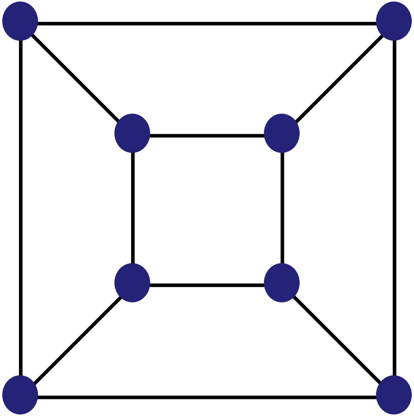


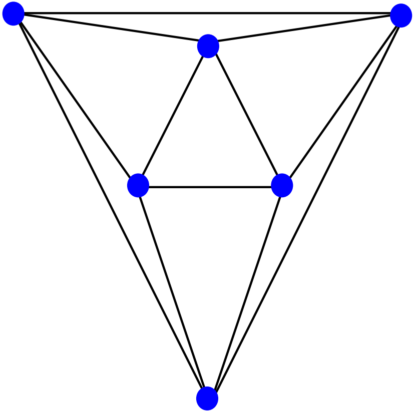
被覆の性質

定義 3 (k-正則グラフ)

$deg(v)$: v に接続する辺の本数

$G = (V, E)$ が k-正則グラフ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v \in V,\ deg(v) = k$

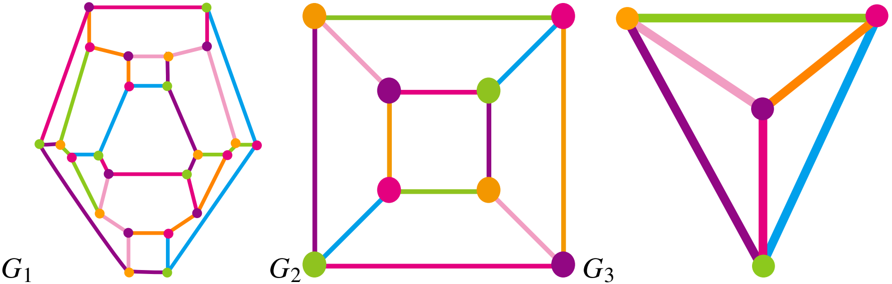




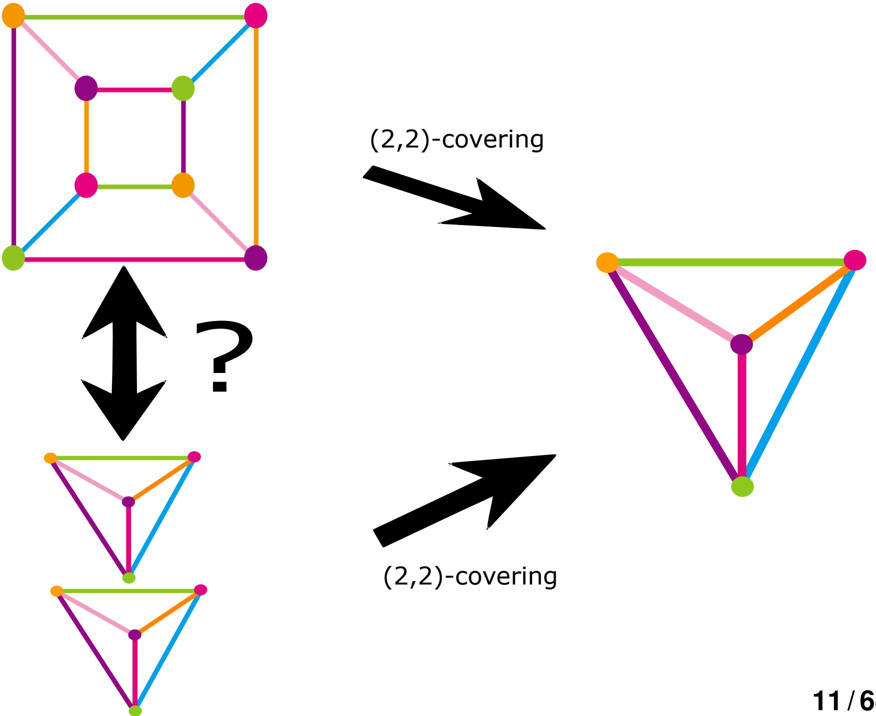
以下正則グラフを考える

命題 1

G_1 が G_2 を (n, m)-被覆し,G_2 が G_3 を (μ, λ)-被覆する.
$\Rightarrow$ G_1 は G_3 を $(n\mu, m\lambda)$-被覆する.



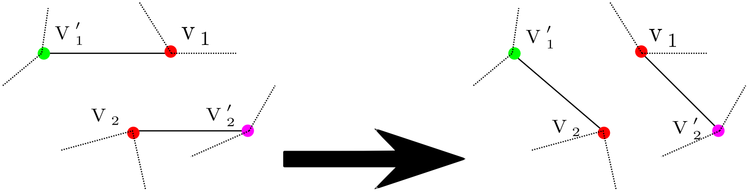
G_1 が G_2 を $(3, 3)$-被覆,G_2 は G_3 を $(2, 2)$-被覆しているので
G_1 は G_3 を $(6, 6)$-被覆している.


(2,2)-covering
?
(2,2)-covering

定義 4 (2 辺入れ換え)

$G=(V,E), G_1=(V_1,E_1)$:正則グラフ
G_1 が G を (n,m)-被覆する
$f: G_1 \to G$:(G_1,G) の被覆写像
このとき以下の一連の変形を 2 辺入れ換えとよぶ.

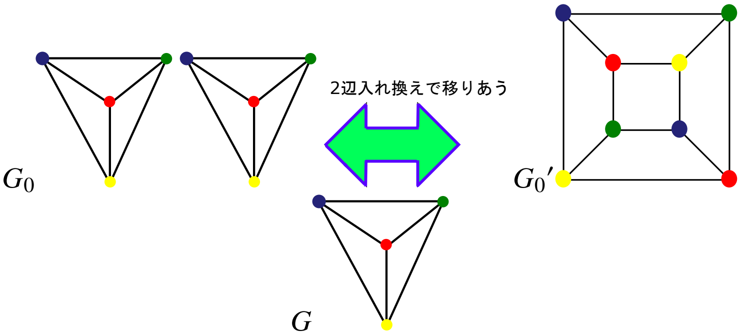
1. 次を満たす v_1, v_2 を選ぶ.
   $v_1, v_2 \in V_1, v \in V \ f(v_1)=f(v_2)=v$
2. 次を満たす e_1, e_2 を選ぶ.
   $v_1{}', v_2{}' \in V_1 \ e_1, e_2 \in E_1 \ \partial e_1 = (v_1, v_1{}'), \partial e_2 = (v_2, v_2{}')$
3. $e_1=(v_1,v_1{}'), e_2=(v_2,v_2{}') \in E_1$ を取り除き, $\partial e_{12}=(v_1,v_2{}'), \partial e_{21}=(v_2,v_1{}')$ を満たす辺 e_{12}, e_{21} 加えて新たなグラフ $G_1{}'$ を得る.



定理 1

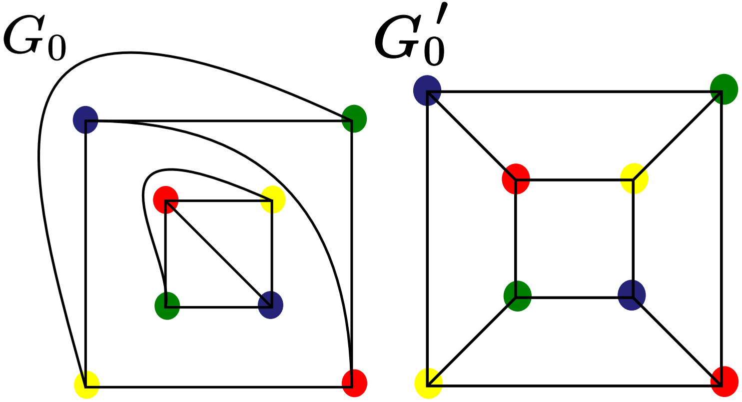
G_0, G:ループを含まない正則グラフ
G_0 が G を (n,m)-被覆するとする.
このとき, 以下は同値である.

- G_0 に有限回 2 辺入れ換えを施すと $G_0{}'$ が得られる.
- $G_0{}'$ は G を (n,m)-被覆する.

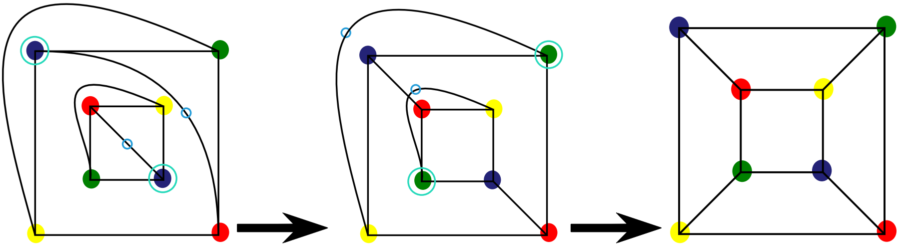


例

実際に自明に四面体を $(2,2)$-被覆している G_0 に有限回 2 辺入れ換えを施して $G_0{}'$(立方体) を得ることで $G_0{}'$ が四面体を $(2,2)$-被覆することを証明する.



四面体二つから２辺入れ換えを使って立方体を作る例



定理の証明の概要

G_0 に有限回 2 辺入れ換えを施すと ${G_0}'$ が得られる.
$\Rightarrow$ ${G_0}'$ は G を (n,m)-被覆する.

補題 1

2 辺入れ換えで得られた ${G_0}'$ は G を (n,m)-被覆する.

証明 (G_0, G) の (n,m)-被覆写像を f とする. $f' : {G_0}' \to G$ を

$$f'(X) = \begin{cases} f((v_1, {v_1}')) & X = (v_2, {v_1}') \\ f((v_2, {v_2}')) & X = (v_1, {v_2}') \\ f(X) & otherwise \end{cases}$$

とおくと f' は $({G_0}', G)$ の (n,m)-被覆写像である.
よって ${G_0}'$ は G を (n,m)-被覆する.

定理の証明の概要

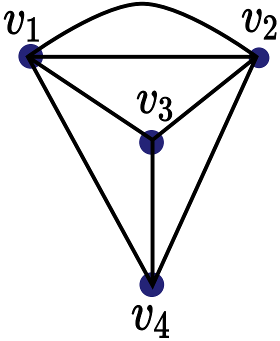
G_0 に有限回２辺入れ換えを施すと $G_0{}'$ が得られる．
$\Leftarrow G_0{}'$ は G を (n,m)-被覆する．

証明の方針

- グラフ G に対応する行列である隣接行列 $A(G)$ を定義する．
- ２辺入れ換えに対応する行列である２辺入れ換え行列を定義する．２辺入れ換えは隣接行列に２辺入れ換え行列を足すことで実現できる．
- $A(G_0{}') - A(G_0)$ が２辺入れ換え行列の有限個の和であらわせることを示す．

定義 5 (隣接行列)

$G = (V, E)$:グラフ
$A(G)$ が G の隣接行列である
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A(G) = (a_{ij})$ を $|V| \times |V|$ 行列として,(i, j) 成分は頂点 v_i, v_j を結ぶ辺の本数とする.

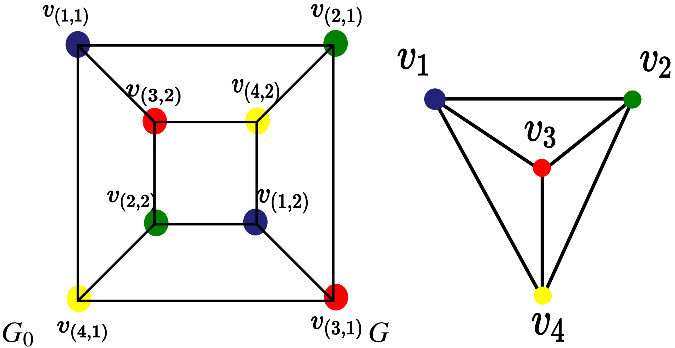


$$\mathrm{A(G)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

規約 1

$G=(V,E)$, $G_0=(V_0,E_0)$:ループを含まない有限グラフ
G_0 は G を (n,m)-被覆する
$f:G_0\to G$:被覆写像
このとき以下のように G, G_0 の頂点に添え字をつける.

$$a,b\in\mathbb{N}\ ,1\le a\le |V|,\ 1\le b\le m$$
$$v_a\in V,\ v_{(a,b)}\in V_0\ f(v_{(a,b)})=v_a$$



補題 2

G_0 : k_0-正則グラフ
$A(G_0) = (a_{i,j})$: G_0 の隣接行列
このとき以下が成立する.

$$\sum_{1 \leq i \leq m|V|} a_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq m|V|} a_{i,j} = k_0$$

G_0 は k_0-正則グラフなのである頂点を結ぶ辺の合計は k_0

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,m|V|} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,m|V|} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m|V|,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m|V|,m|V|} \end{pmatrix}$$

補題 3

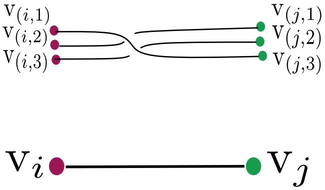
規約の添え字付けを考える. G, G_0:ループを持たない正則有限グラフ, $A(G_0) = (a_{(a,b)(c,d)})$:$G_0$ の隣接行列, $v_i, v_j \in G$, このとき $A(G_0)$ は以下を満たす.

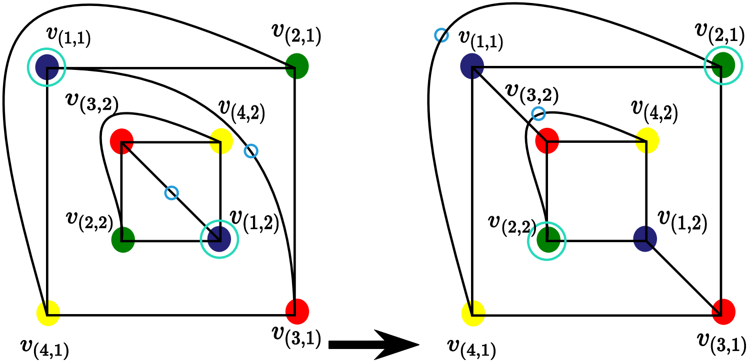
1. G に v_i, v_j を端点に持つ辺が存在するとき,

$$\sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq l \leq m} a_{(i,k)(j,l)} = n$$

2. G に v_i, v_j を端点に持つ辺が存在しないとき, $\forall k, l \in \mathbb{N}\ 1 \leq k, l \leq m$ $a_{(i,k)(j,l)} = 0$

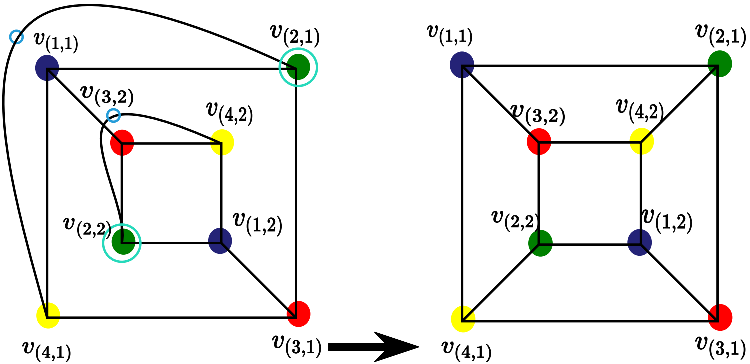
$$\begin{pmatrix}
a_{(1,1)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(1,1)(j,1)} & \cdots & a_{(1,1)(j,m)} & \cdots & a_{(1,1)(|V|,m)} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{(i,1)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(i,1)(j,1)} & \cdots & a_{(i,1)(j,m)} & \cdots & a_{(i,1)(|V|,m)} \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{(i,m)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(i,m)(j,1)} & \cdots & a_{(i,m)(j,m)} & \cdots & a_{(i,m)(|V|,m)} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{(|V|,m)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(|V|,m)(j,1)} & \cdots & a_{(|V|,m)(j,m)} & \cdots & a_{(|V|,m)(|V|,m)}
\end{pmatrix}$$





$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
+
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

2辺入れ換え行列（この後定義します）



$$
\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1\\ \hdashline
1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1\\ \hdashline
0&1&1&0&0&0&1&0\\
1&0&0&1&0&0&0&1\\ \hdashline
1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0
\end{array}\right)
+
\underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\ \hdashline
0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&-1\\ \hdashline
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\ \hdashline
0&0&-1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&-1&0&0&0&0
\end{array}\right)}_{\text{2辺入れ換え行列（この後定義します）}}
=
\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1\\ \hdashline
1&0&0&0&1&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&1&0\\ \hdashline
0&1&1&0&0&0&1&0\\
1&0&0&1&0&0&0&1\\ \hdashline
1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&1&1&0&0&1&0&0
\end{array}\right)
$$

定義 6 (2 辺入れ換え行列)

規約 1 の添え字付けを考える. $A(G_0) = (a_{(a,b)(c,d)})$:$G_0$ の隣接行列, $A(G_0)$ の 1 以上の成分 $a_{(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)}, a_{(\alpha,\gamma)(\nu,\xi)}$ が存在するとする. このとき以下の性質を満たす行列 B を 2 辺入れ換え行列とよぶ.

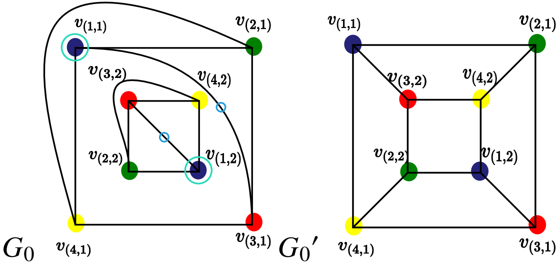
- $B = (b_{(a,b)(c,d)})$ は $m|v|$ 次正方行列.
- $b_{(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)} = b_{(\lambda,\mu)(\alpha,\beta)} = b_{(\alpha,\gamma)(\nu,\xi)} = b_{(\nu,\xi)(\alpha,\gamma)} = -1$
- $b_{(\alpha,\gamma)(\lambda,\mu)} = b_{(\lambda,\mu)(\alpha,\gamma)} = b_{(\alpha,\beta)(\nu,\xi)} = b_{(\nu,\xi)(\alpha,\beta)} = 1$
- 上記以外の成分は 0

補題 4

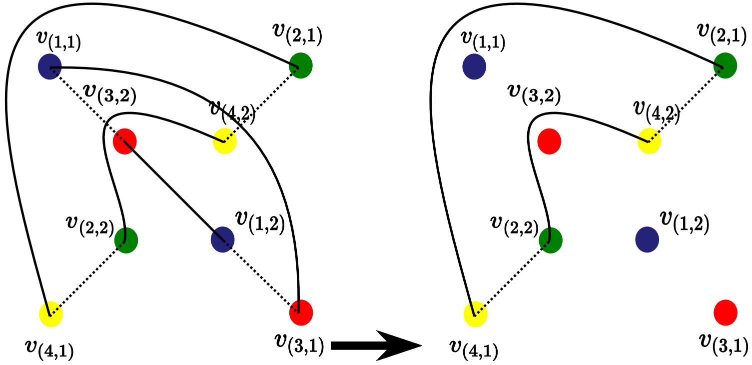
規約 1 の添え字付けを考える, $A(G_0) = (a_{(a,b)(c,d)})$:$G_0$ の隣接行列, $a_{(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)}, a_{(\alpha,\gamma)(\lambda,\nu)} \geq 1$ とする.
定義 6 のように 2 辺入れ換え行列 B_0 を決める.
G_0 の辺 $(v_{(\alpha,\beta)}, v_{(\lambda,\mu)}), (v_{(\alpha,\gamma)}, v_{(\lambda,\mu)})$ を取り除き, 新たな辺 $(v_{(\alpha,\beta)}, v_{(\gamma,\xi)})(v_{(\alpha,\gamma)}, v_{(\lambda,\mu)})$ を加えるような 2 辺入れ換えによって得られたグラフを G_1 とする.
このとき $A(G_0) + B_0 = A(G_1)$ が成立する.

定理の証明の方針

$A(G_0{}') - A(G_0)$ が 2 辺入れ換え行列の有限和であらわせることを示すために $A(G_0) - A(G_0{}')$ に 2 辺入れ換え行列を足していって零行列を目指す.

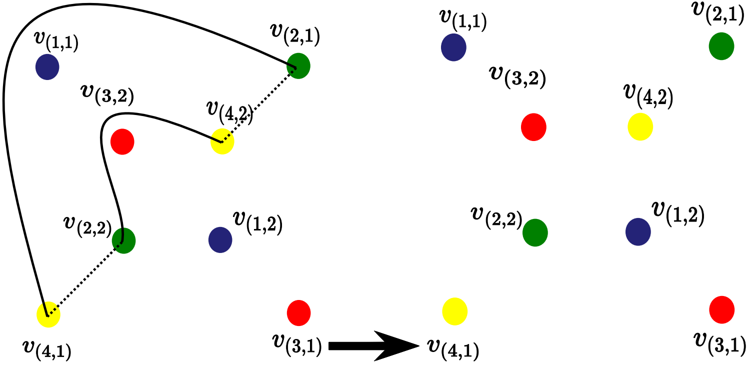


$G_0 - G_0{}'$



$A(G_0) - A(G_0{}')$

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
+
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$



$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
+
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

よって

$$A(G_0{}') - A(G_0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

補題 5

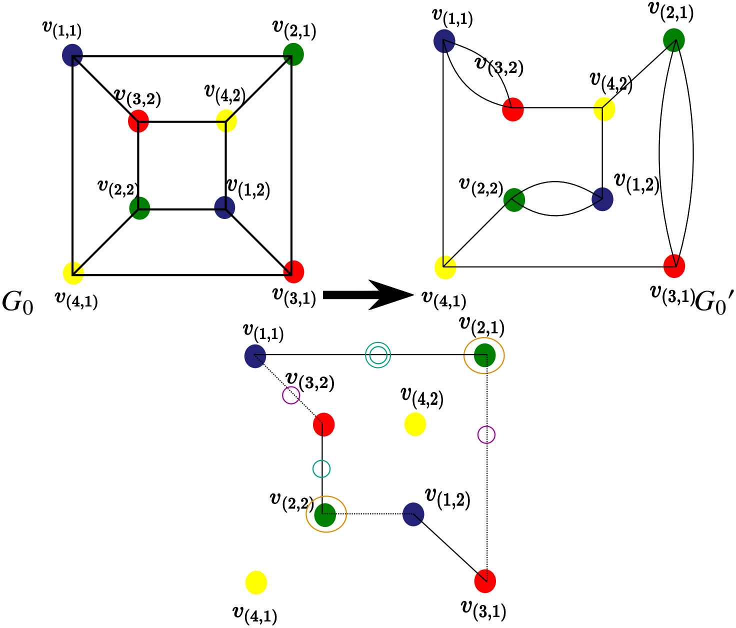
$G_0, G_0{}'$:G を (n,m)-被覆する k_0-正則グラフ, 規約 1 の添え字付けを考える. $A_0 = (A_{0(a,b)(c,d)}) := A(G_0) - A(G_0{}')$ このとき, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{1\le a\le |V|}\sum_{1\le b\le m} A_{0(a,b)(c,d)} = \sum_{1\le c\le |V|}\sum_{1\le d\le m} A_{0(a,b)(c,d)} = 0$$

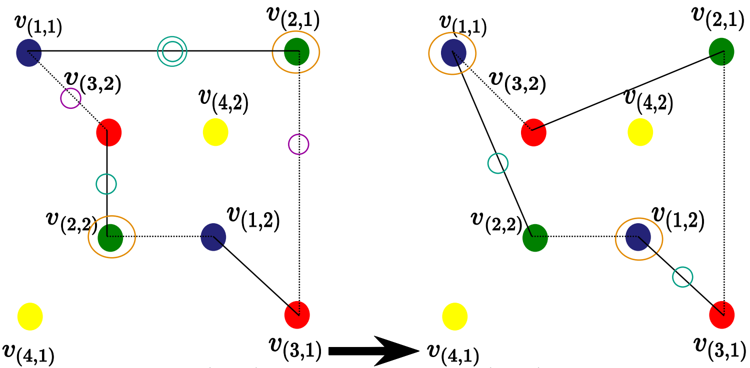
$$\sum_{1\le b\le m}\sum_{1\le d\le m} A_{0(a,b)(c,d)} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,m|V|} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,m|V|} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m|V|,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m|V|,m|V|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1,1)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(1,1)(j,1)} & \cdots & a_{(1,1)(j,m)} & \cdots & a_{(1,1)(|V|,m)} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i,1)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(i,1)(j,1)} & \cdots & a_{(i,1)(j,m)} & \cdots & a_{(i,1)(|V|,m)} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i,m)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(i,m)(j,1)} & \cdots & a_{(i,m)(j,m)} & \cdots & a_{(i,m)(|V|,m)} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(|V|,m)(1,1)} & \cdots & \cdots & a_{(|V|,m)(j,1)} & \cdots & a_{(|V|,m)(j,m)} & \cdots & a_{(|V|,m)(|V|,m)} \end{pmatrix}$$

簡単にいかない例



$v_{(1,1)}$
$v_{(2,1)}$
$v_{(3,2)}$
$v_{(4,2)}$
$v_{(2,2)}$
$v_{(1,2)}$
G_0
$v_{(4,1)}$
$v_{(3,1)}$
$v_{(1,1)}$
$v_{(2,1)}$
$v_{(3,2)}$
$v_{(4,2)}$
$v_{(2,2)}$
$v_{(1,2)}$
$v_{(4,1)}$
$v_{(3,1)}$
$G_0{}'$
$v_{(1,1)}$
$v_{(2,1)}$
$v_{(3,2)}$
$v_{(4,2)}$
$v_{(2,2)}$
$v_{(1,2)}$
$v_{(4,1)}$
$v_{(3,1)}$



$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
+
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

証明の概要終わり

命題 2

G_1:k_1-正則グラフ G_2:k_2-正則グラフ　G_1 は G_2 を n 重被覆
$\frac{nk_2}{k_1} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad G_1$ は G_2 を $(n, \frac{nk_2}{k_1})$-被覆する.

Table: 超分子が被覆する多面体の候補

多面体	(n, m) 被覆の候補	被覆するのか
正四面体	$(30, 30)$	○
立方体	(15,15)	?
正八面体	(15,20)	?
正十二面体	(6,6)	?
切頂四面体	(10,10)	?
切頂六面体	(5,5)	?
切頂八面体	(5,5)	?
切頂十二面体	(2,2)	○
切頂二十面体	(2,2)	×
二十・十二面体	(3,4)	?
斜方切頂二十・十二面体	(1,1)	×

空間グラフ

有限グラフ $G = (V, E)$ の頂点を 0– 胞体, 辺を 1– 胞体とする胞体複体としての $\mathbb{R}^3$ への埋め込み $g : G \to \mathbb{R}^3$ を空間埋め込み $g(G)$ を空間グラフという.

同型

G:グラフ $f(G), g(G)$:空間グラフ $f(G), g(G)$ が同型 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ自己同相写像 Φ が存在して $\Phi(f(G)) = g(G)$ となる

アンビエント・アイソトピック

G:グラフ $f(G), g(G)$:空間グラフ

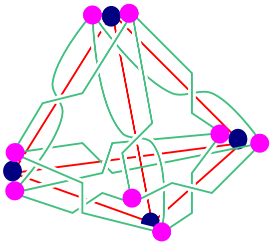
$f(G), g(G)$ がアンビエント・アイソトピック $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ自己同相写像 Φ が存在して $\Phi \circ f = g$ となる

空間 (n, m)-被覆

$g(G_1)$, $h(G_2)$:連結で各頂点の次数が 2 以上の空間グラフ, $g(G_1) \subset N(h(G_2))$
このときある $n \in \mathbb{N}$ に対して以下の全ての条件を満たす胞体写像
$f\colon g(G_1) \to h(G_2)$ が存在するとき $g(G_1)$ が $h(G_2)$ を**空間 (n,m)-被覆する**という.
また, このときの f を**空間被覆写像**とよぶ.

1. $r\colon N(h(G_2)) \times [0, 1] \to N(h(G_2))$ を $N(h(G_2))$ の $h(G_2)$ への変異レトラクションとすると,
   $r(g(G_1), 1) = f(g(G_1))$ が成立する.
2. $\forall e' \in E(h(G_2))\ \forall x \in e'\ |f^{-1}(x)| = n$
3. $\forall v \in V(h(G_2))\ |f^{-1}(v)| = m$

六面体が四面体を空間 (2, 2)-被覆する例



平面的, 自明

グラフ G が平面的であるとは,G の $\mathbb{R}^2$ への埋め込みが存在することをいう.
平面的グラフ G の空間グラフ $f(G)$ が自明であるとは,$f(G)$ が $\mathbb{R}^3$ 内の平面に含まれるある空間グラフ $g(G)$ に同型であることをいう.

自明な空間被覆

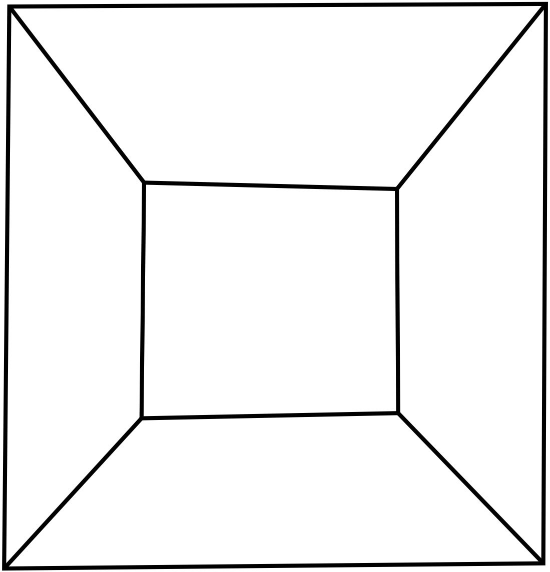
空間グラフ $g(G_1)$ が空間グラフ $h(G_2)$ を空間 (n, m)-被覆するとき,$g(G_1)$ が自明な空間グラフになるならば, この空間 (n, m)-被覆は自明であるという.

定理 2

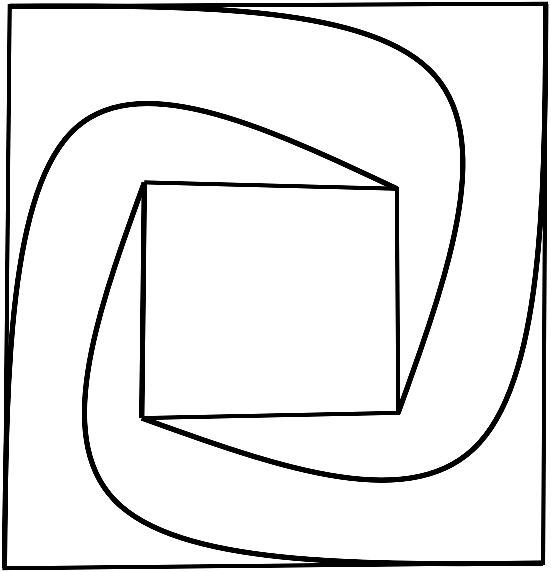
P_4: 正四面体グラフ, P_6: 正六面体グラフ
P_{12}: 正十二面体グラフ, P_{20}: 正二十面体グラフ
正多面体同士の空間 (n, m)-被覆 $(n \geq 2)$ は以下のみであり, 全て自明な空間被覆が存在する.

1. P_6 が P_4 を空間 $(2, 2)$-被覆する
2. P_{12} が P_4 を空間 $(5, 5)$-被覆する
3. P_{20} が P_4 を空間 $(5, 3)$-被覆する

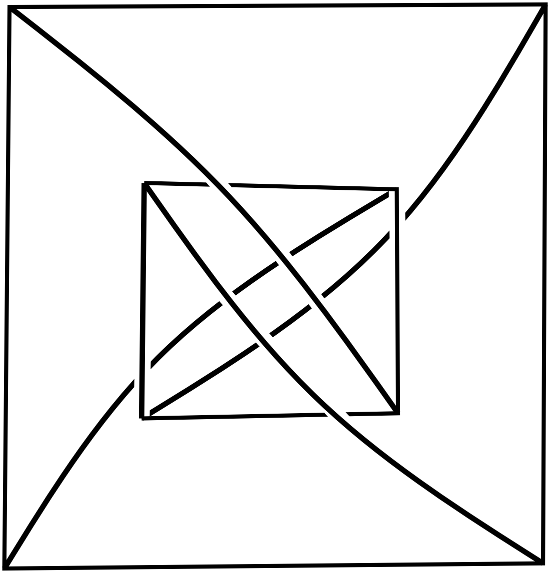
P_6 が P_4 を自明に空間 $(2,2)$-被覆する例



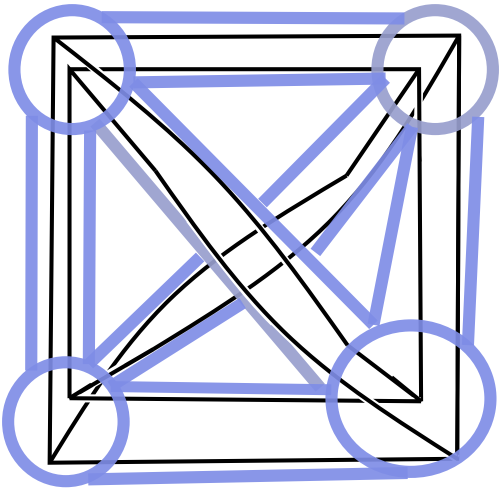
P_6 が P_4 を自明に空間 $(2,2)$-被覆する例



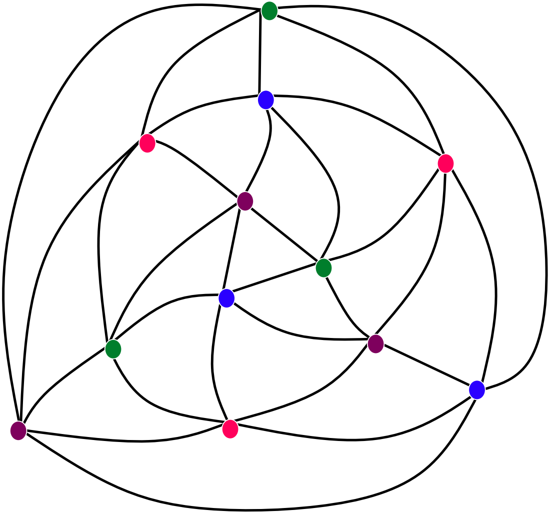
P_6 が P_4 を自明に空間 $(2,2)$-被覆する例



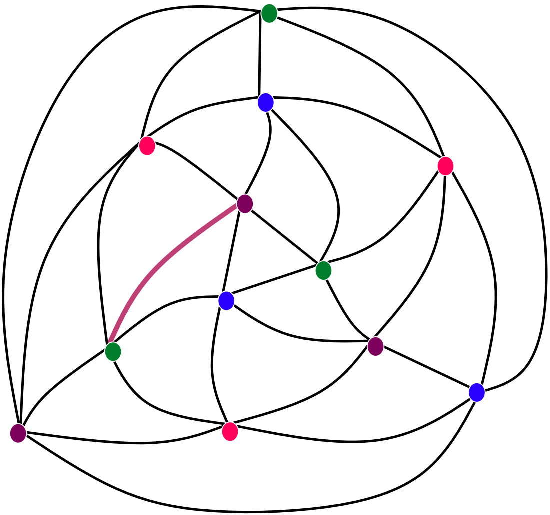
P_6 が P_4 を自明に空間 $(2,2)$-被覆する例



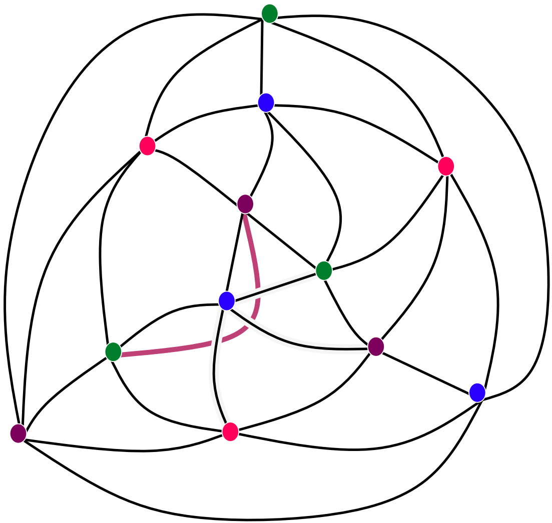
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



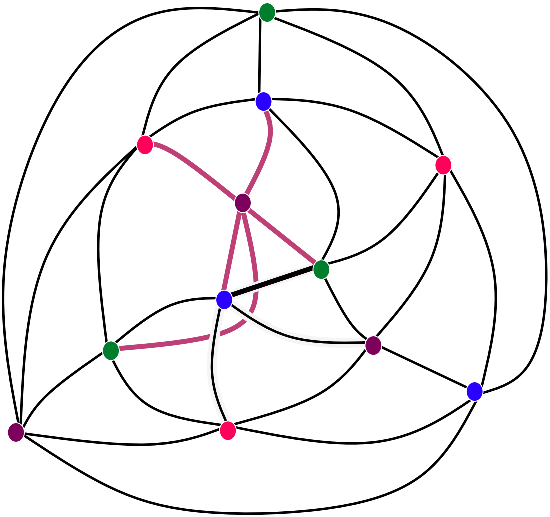
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



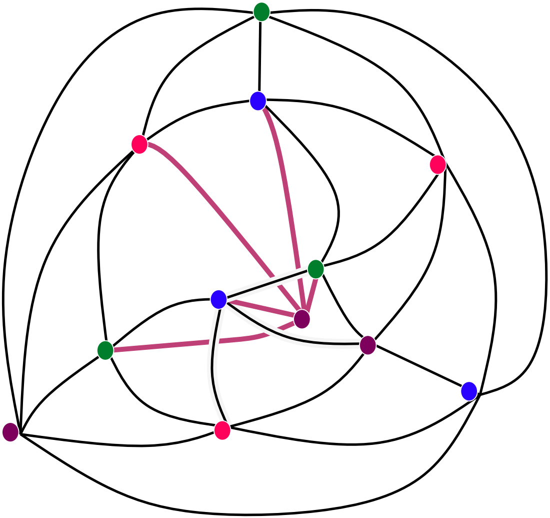
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



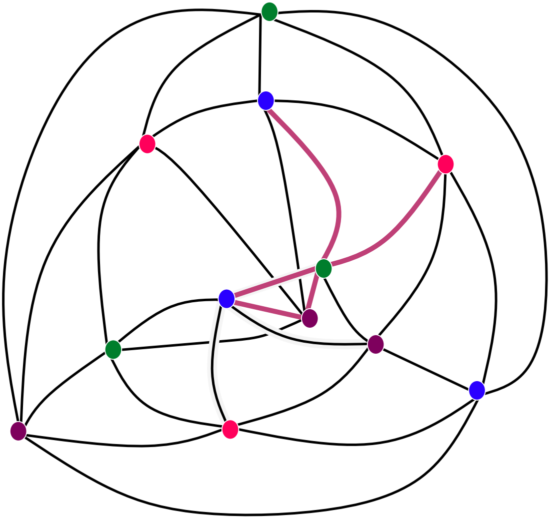
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5, 3)$-被覆する例



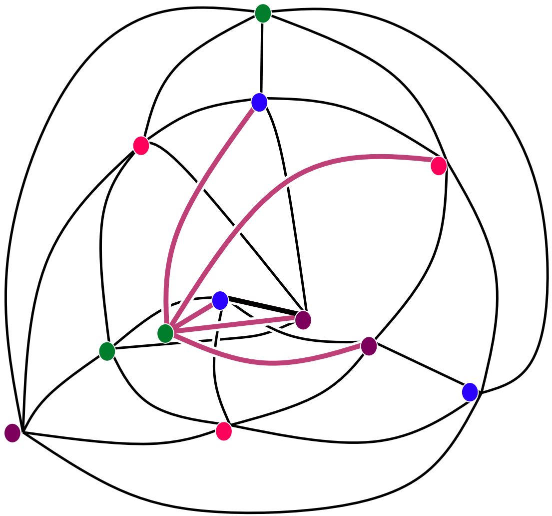
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



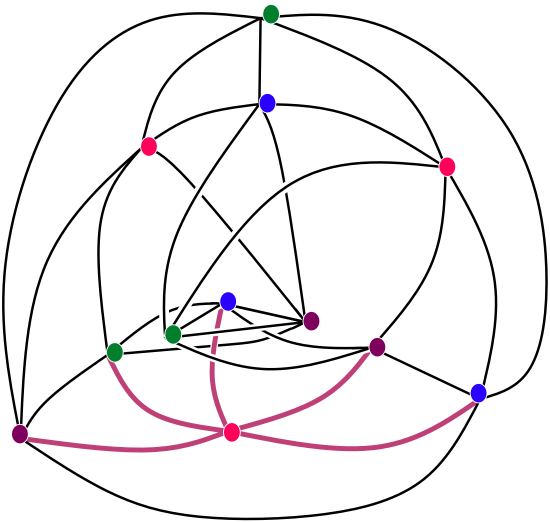
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



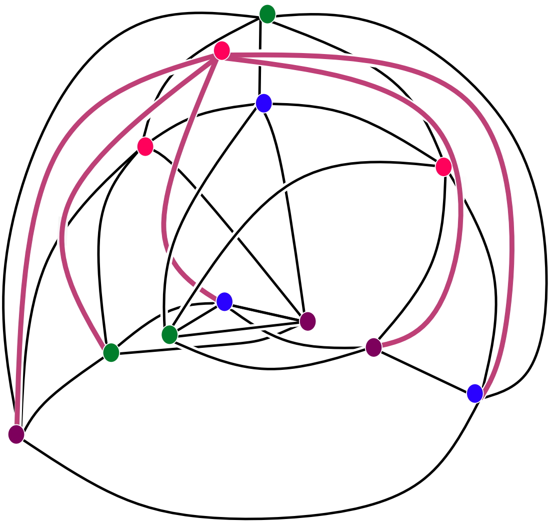
P_{20} が P_4 を自明に空間 (5, 3)-被覆する例



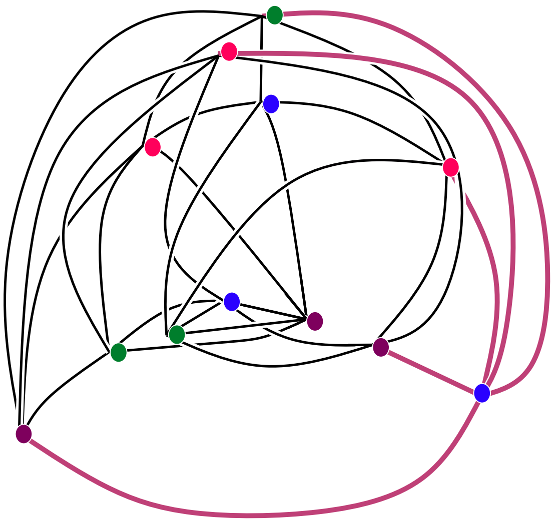
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



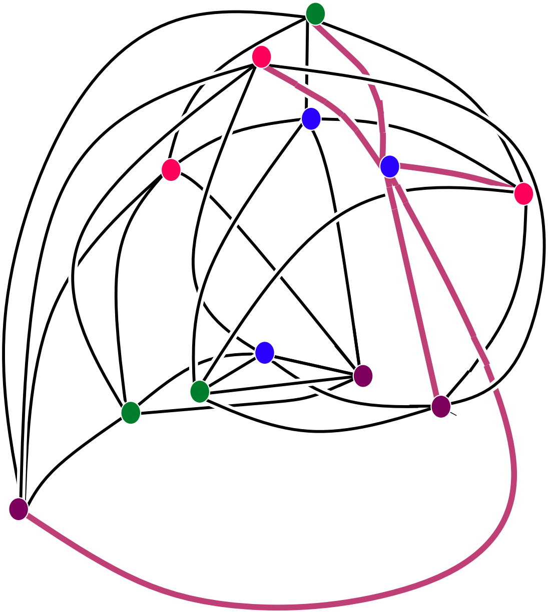
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



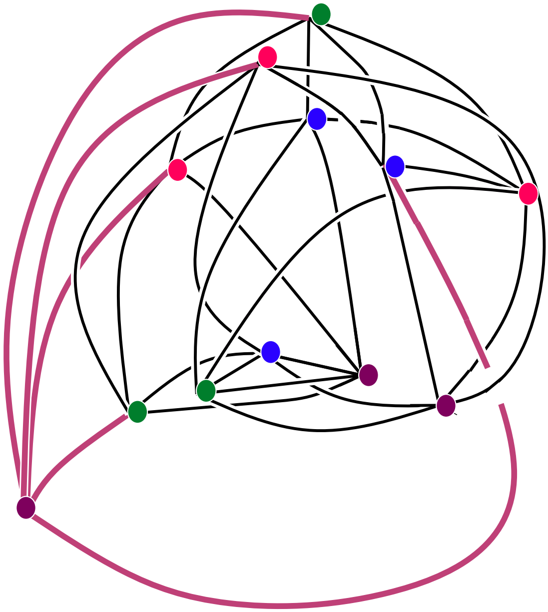
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



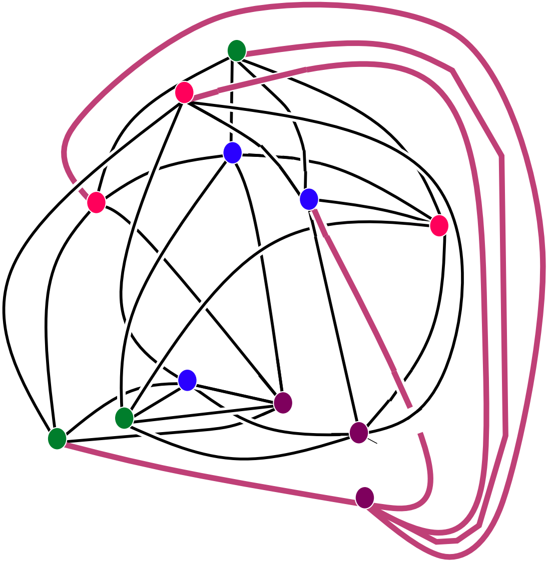
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



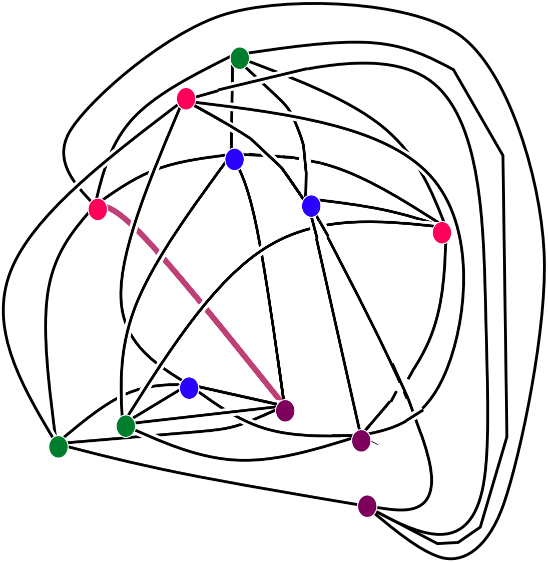
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



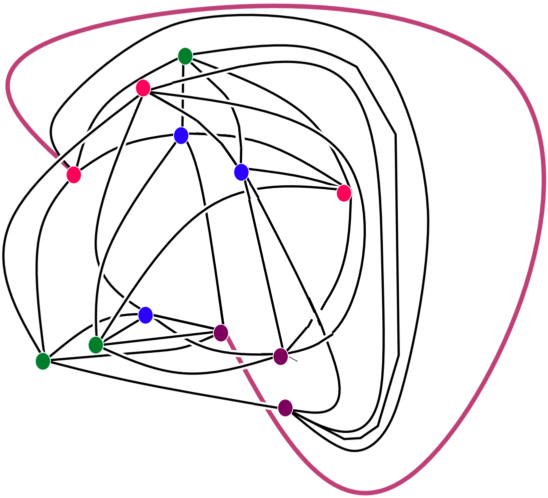
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



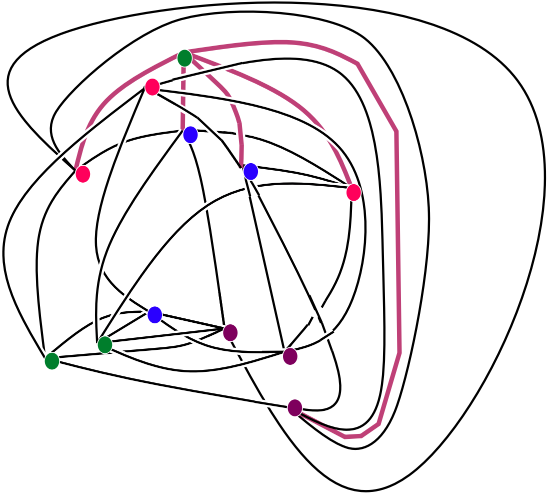
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



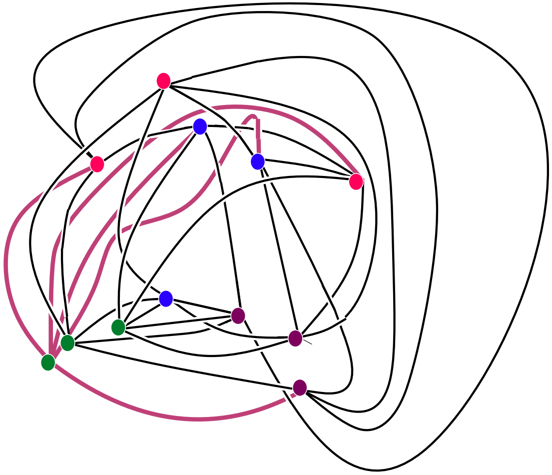
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



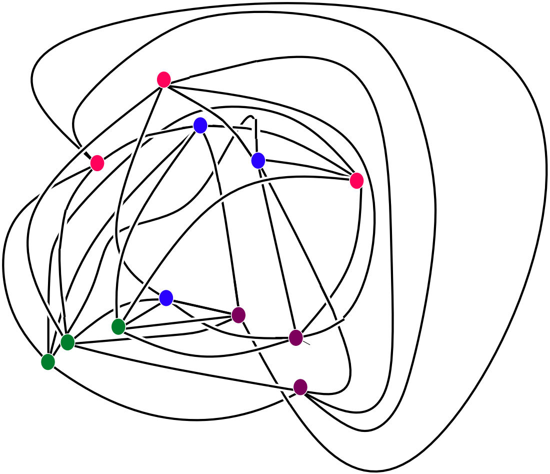
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



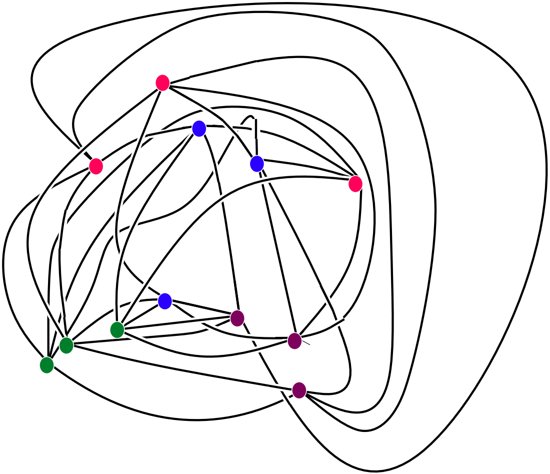
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



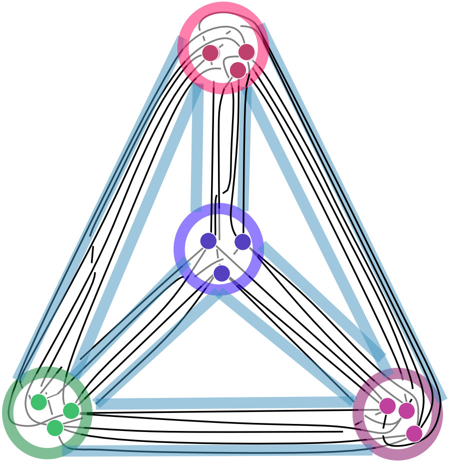
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



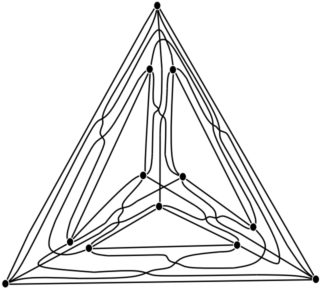
P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例

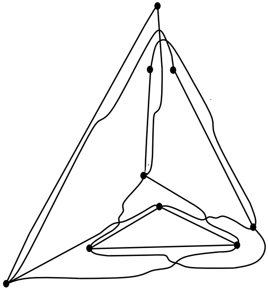


P_{20} が P_4 を自明に空間 $(5,3)$-被覆する例



どのような上下関係を入れても非自明な正則射影図





- Wen-Yuan Qiu, Xin-Dong Zhai,Yuan-Yuan Qiu, Architecture of Platonic and Archimedean polyhedral links,Science in China Series B: Chemistry, 51(1):13-18, August 2008
- Guang Hu, Xin-Dong Zhai, Dan Lu, Wen-Yuan Qiu, The architecture of Platonic polyhedral links,Journal of Mathematical Chemistry, 46(2):592-603, August 2009
- Dan Lu, Guang Hu, Yuan-Yuan Qiu, Wen-Yuan Qiu, Topological transformation of dual polyhedral links, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 63(1), January 2010