

レンズ空間の simple $(1, 1)$ -knot から得られるホモロジー球面の分類

$p < 1200$ のレンズ空間の手術で得られる, $\lambda = -2$ のホモロジー球面について

田内 光一

筑波大学 数学学位プログラム 修士 2 年

December 25, 2023

① 準備

② 主定理の紹介及びいくつかの予想

③ 主定理の証明

- ① 準備
- ② 主定理の紹介及びいくつかの予想
- ③ 主定理の証明

Definition 1.1.

- レンズ空間 $L(p, q)$ を unknot の p/q -surgery と定義する. ($p/q \in \mathbb{Q}$)
- Y をホモロジー球面, $K \subset Y$ を結び目とする.
また, $K \subset Y$ の p -surgery ($p \in \mathbb{Z}$) を $Y_p(K)$ とする.
- $H_1(Y_p(K)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の同一視の元 $[\tilde{K}] = k$ を dual class と呼ぶ.

このとき, 以下が成り立つ.

Lemma 1.1.

k を dual class とする. $L(p, q) = Y_p(K)$ ならば, $k^2 = q \pmod{p}$ である.

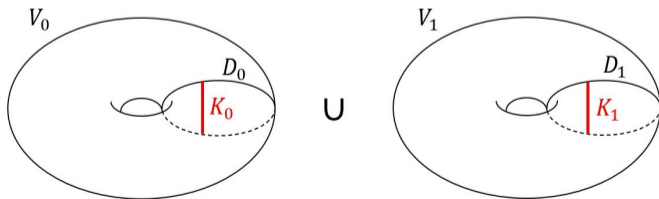
Definition 1.2.

レンズ空間 $L(p, q)$ の種数 1 の Heegaard splitting をとり, その 2 つの meridian disk を $D_i (i = 0, 1)$ とする. このとき, D_i の中に埋め込まれた arc K_i について,

$$\partial D_i \cap K_i = \partial K_i$$

を満たすものを考える. $L(p, q)$ の結び目 K が simple $(1, 1)$ -knot とは, そのような K_0 と K_1 の union として得られる結び目のことをいう.

また, dual class が k である simple $(1, 1)$ -knot は一意に定まり, それを $\tilde{K}_{p,k}$ とかく.



Lemma 1.2.

レンズ空間 $L(p, q)$ の simple $(1, 1)$ -knot $\tilde{K}_{p,k}$ の, ある整数手術によってホモロジー球面が得られる.

Lemma 1.2 より, 得られるホモロジー球面を $Y_{p,k}$ とする.

① 準備

② 主定理の紹介及びいくつかの予想

③ 主定理の証明

Theorem 2.1. [Berge]

S^3 の double primitive knot の, ある整数手術はレンズ空間である. また, 現在知られているレンズ空間結び目は全て double primitive knot である.

Berge 予想^[1]

S^3 内のすべてのレンズ空間手術は double primitive knot のみである.

Theorem 2.2.[Berge]

レンズ空間の simple $(1, 1)$ -knot の手術で S^3 になる手術について, 10 の族が存在する.

→のちに Greene によって, この族が simple $(1, 1)$ -knot の手術で S^3 になるもの全てであることが証明された.

また、丹下^[2]により、

Theorem 2.3.

レンズ空間の simple $(1, 1)$ -knot の手術で $\Sigma(2, 3, 5)$ になる手術について、20 の族が存在する。

→のちに Caudell によって、この族が simple $(1, 1)$ -knot の手術で $\Sigma(2, 3, 5)$ になるもの全てであることが証明された。

レンズ空間の $\tilde{K}_{p,k}$ から得られるホモロジー球面の例 (丹下^[3])

- $\Sigma(2, 2s + 1, 2(2s + 1) \pm 1)$
- $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$
- いくつかのグラフ多様体

Question.

レンズ空間の simple $(1, 1)$ -knot の手術によって得られるホモロジー球面には、他にどのようなものが現れるのか。

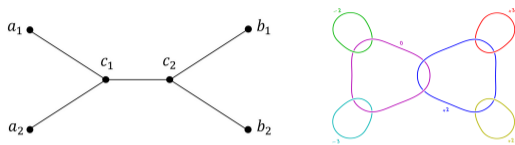
- λ : Casson 不変量
- $Y_{p,k}$: simple $(1,1)$ -knot $\tilde{K}_{p,k}$ の整数デー手術から得られるホモロジー球面
- k : dual class

Main Theorem 1.

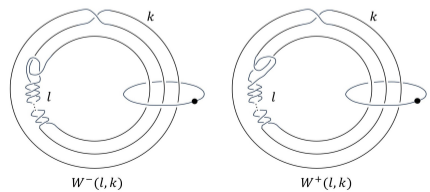
$p < 1200$ のレンズ空間 $L(p, k^2)$ の $\tilde{K}_{p,k}$ の手術から得られる, $\lambda = -2$ を満たすホモロジー球面 $Y_{p,k}$ は次の 8 つのみである.

- $\Sigma(2, 3, 11)$, $\Sigma(2, 3, 13)$, $\Sigma(2, 5, 7)$, $\Sigma(3, 4, 5)$
- $G\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2)\}$, $G\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1)\}$
- $\partial W^-(0, 6)$, $\partial W^-(0, 7)$

- $\Sigma(x, y, z)$: ザイフェルトホモロジー球面
- 図のようなグラフから得られる多様体を $G\{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, (c_1, c_2)\}$ と表す.



- 下図のような Kirby diagram で表される多様体を $W^-(l, k), W^+(l, k)$ とする. また, この多様体はコンパクトで可縮な 4 次元多様体である.



Main Theorem 2.

以下のホモロジー球面 $Y_{p,k}$ を得る, レンズ空間の手術の組 (p, k) の族が存在する. ただし $l \neq 0$. さらに, これらのホモロジー球面には double primitive knot が存在し, その正の整数手術からレンズ空間の無限族が得られる.

- $\Sigma(2, 3, 11)$, $\Sigma(2, 3, 13)$, $\Sigma(2, 5, 7)$, $\Sigma(3, 4, 5)$
- $G\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2)\}$, $G\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1)\}$

$\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$ については, 丹下^[3] によって無限族が得られており, その結果を紹介する.

$\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$ を得る (p, k) の無限族 ^[3]

p	k	p	k
$45\ell^2 + 35\ell + 7$	$5\ell + 2$	$55\ell^2 + 45\ell + 9$	$5\ell + 2$
$66\ell^2 + 21\ell + 2$	$6\ell + 1$	$78\ell^2 + 27\ell + 2$	$6\ell + 1$
$91\ell^2 + 51\ell + 7$	$7\ell + 2$	$105\ell^2 + 61\ell + 9$	$7\ell + 2$
$91\ell^2 + 103\ell + 29$	$7\ell + 4$	$105\ell^2 + 121\ell + 35$	$7\ell + 4$
$220\ell^2 + 79\ell + 7$	$11\ell + 2$	$264\ell^2 + 97\ell + 9$	$11\ell + 2$
$220\ell^2 + 119\ell + 16$	$11\ell + 3$	$264\ell^2 + 145\ell + 20$	$11\ell + 3$
$264\ell^2 + 40\ell + 2$	$12\ell + 1$	$312\ell^2 + 56\ell + 2$	$12\ell + 1$
$264\ell^2 + 84\ell + 7$	$12\ell + 2$	$312\ell^2 + 108\ell + 9$	$12\ell + 2$
$264\ell^2 + 224\ell + 47$	$12\ell + 5$	$312\ell^2 + 256\ell + 53$	$12\ell + 5$

$90l^2 + 27l + 2$	$45l + 7$	$54l^2 + 33l + 5$	$27l + 8$
$90l^2 + 63l + 11$	$45l + 16$	$54l^2 + 21l + 2$	$27l + 5$
$78l^2 + 47l + 7$	$13l + 4$	$66l^2 + 61l + 14$	$11l + 5$
$78l^2 + 83l + 22$	$13l + 7$	$66l^2 + 49l + 9$	$11l + 4$
$55l^2 + 49l + 11$	$11l + 5$	$91l^2 + 57l + 9$	$13l + 4$
$55l^2 + 39l + 7$	$11l + 4$	$91l^2 + 99l + 27$	$13l + 7$
$46l^2 + 27l + 4$	$23l + 7$	$106l^2 + 29l + 2$	$53l + 7$
$46l^2 + 19l + 2$	$23l + 5$	$106l^2 + 77l + 14$	$53l + 19$
151	9	173	9
416	15	484	15

$\Sigma(3, 4, 5)$ を得る (p, k) の無限族

p	k	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$60\ell^2 + 9\ell$	$12\ell + 1$	$[3, 2, \ell, -2, 1, -\ell, -4]$
$60\ell^2 + 7\ell$	$15\ell + 1$	$[-3, \ell, 3, 2, -\ell, -3]$
$60\ell^2 + 17\ell + 1$	$15\ell + 2$	$[-4, -\ell, 2, 3, \ell, -3]$
$152\ell^2 + 49\ell + 4$	$19\ell + 3$	$[3, 3, -\ell, -4, -5, \ell]$
$152\ell^2 + 65\ell + 7$	$19\ell + 4$	$[3, 3, -\ell, -5, -4, \ell]$
$240\ell^2 + 16\ell$	$24\ell + 1$	$[2, -2, \ell, 2, -3, 2, -\ell, -3]$
$240\ell^2 + 36\ell + 1$	$24\ell + 2$	$[2, -2, \ell, 3, 2, 3, -\ell, -4]$
$86\ell^2 + 37\ell + 4$	$43\ell + 9$	$[2, -\ell, -3, 3, -4, \ell]$
$86\ell^2 + 49\ell + 7$	$43\ell + 12$	$[2, -\ell, -4, 3, -3, \ell]$

$\Sigma(2, 5, 7)$ を得る (p, k) の無限族

p	k	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$35l^2 + 21l + 3$	$7l + 2$	$[3, 2, -l, -7, l]$
$117l^2 + 37l + 3$	$13l + 2$	$[2, -4, -l, 3, -4, l]$
$117l^2 + 89l + 17$	$13l + 5$	$[2, -4, l, -4, 3, -l]$
$204l^2 + 49l + 3$	$17l + 2$	$[2, -2, 2, -l, -2, 1, -5, l]$
$51l^2 + 25l + 3$	$17l + 4$	$[-3, -l, 1, -2, -6, l]$
$204l^2 + 121l + 18$	$17l + 5$	$[2, -2, 2, -l, -6, -3, l]$
$51l^2 + 43l + 9$	$17l + 7$	$[-3, -l, 1, -5, -3, l]$
$280l^2 + 24l$	$20l + 1$	$[2, -3, l, 3, 3, -l, -5]$
$280l^2 + 60l + 3$	$20l + 2$	$[2, -3, -l, 2, -5, -2, l, 2]$
$280l^2 + 256l + 59$	$20l + 9$	$[2, -3, -l, 2, 2, -2, l, -5]$
$92l^2 + 33l + 3$	$23l + 4$	$[-4, -l, 3, 2, -4, l]$
$92l^2 + 79l + 17$	$23l + 10$	$[-4, l, -4, 2, 3, -l]$

$G\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2)\}$ を得る (p, k) の無限族

p	k	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$69\ell^2 + 37\ell + 5$	$23\ell + 6$	$[-3, -\ell, 2, 4, -3, \ell]$
$69\ell^2 + 55\ell + 11$	$23\ell + 9$	$[-3, -\ell, 1, -2, 3, -2, \ell]$
$42\ell^2 + 5\ell$	$14\ell + 1$	$[-3, \ell, 2, -3, -\ell, 2]$
$42\ell^2 + 19\ell + 2$	$14\ell + 3$	$[-3, -\ell, 1, -3, -2, \ell, 2]$
$85\ell^2 + 41\ell + 5$	$17\ell + 4$	$[3, 2, -\ell, -2, 2, -3, \ell]$
$85\ell^2 + 61\ell + 11$	$17\ell + 6$	$[3, 2, -\ell, -3, 2, -2, \ell]$

$G\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1)\}$ を得る (p, k) の無限族

p	k	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$30\ell^2 + 5\ell$	$10\ell + 1$	$[3, \ell, -5, -\ell, 2]$

無限族が得られなかった (p, k) の組 ($p < 1200$)

$\Sigma(2, 3, 11)$	$\Sigma(2, 3, 13)$	$\Sigma(2, 5, 7)$	$\Sigma(3, 4, 5)$
(15, 103)	(15, 122)	(23, 190)	(21, 181)
(17, 134)	(17, 155)	(27, 263)	(23, 142)
(19, 166)	(19, 195)		(27, 76)
(21, 205)	(21, 236)		(29, 127)

$G\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2)\}$	$\partial W^-(0, 6)$		$\partial W^-(0, 7)$
(23, 112)	(19, 84)	(22, 85)	(15, 43)
(23, 155)	(21, 101)	(25, 111)	(19, 55)
(33, 322)	(25, 146)	(28, 179)	
(37, 290)	(29, 192)	(33, 94)	
	(33, 194)	(37, 141)	
	(37, 159)	(37, 208)	

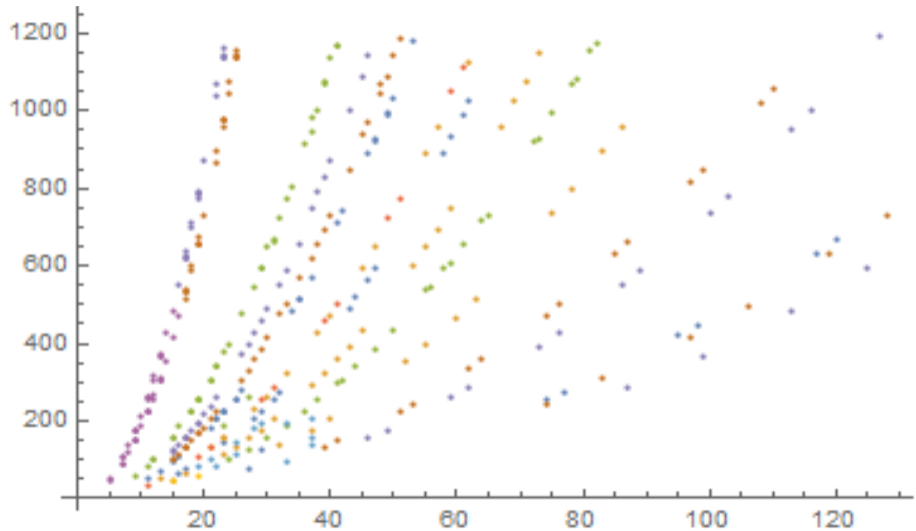
Conjecture 2.1.

レンズ空間 $L(p, k^2)$ の $\tilde{K}_{p,k}$ の手術から得られる, $\lambda = -2$ を満たすホモロジー球面 $Y_{p,k}$ は, これで全てである.

- $\Sigma(2, 3, 11)$, $\Sigma(2, 3, 13)$, $\Sigma(2, 5, 7)$, $\Sigma(3, 4, 5)$
- $G\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2)\}$, $G\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1)\}$
- $\partial W^-(0, 6)$, $\partial W^-(0, 7)$

Conjecture 2.2.

$\partial W^-(0, 6), \partial W^-(0, 7)$ を得るレンズ空間の手術は, 高々有限個である.



Fact.

p.18 の $\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$ における無限族に含まれない組について、以下が成り立つ。

$$\Sigma(2, 3, 11)_p(K_{p,k}) = L(p, q)$$

$$\Sigma(2, 3, 13)_q(K_{q,k}) = L(q, p).$$

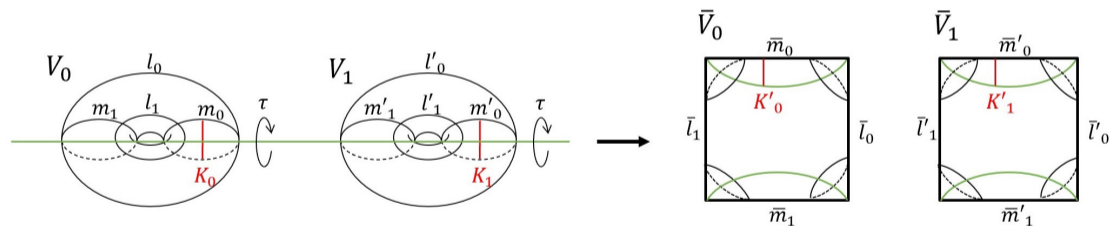
Question.

$\partial W^-(0, t)$ ($t \in \mathbb{Z}, t \leq 1, 8 \leq t$) を得るレンズ空間の手術は存在するか。

- ① 準備
- ② 主定理の紹介及びいくつかの予想
- ③ 主定理の証明

証明の準備

- $V_0 \cup V_1$: レンズ空間 $L(p, q)$ の種数 1 の Heegaard splitting
- $\bar{V}_i : V_i/\tau$



$\bar{V}_i (i = 0, 1)$ は B^3 と同相であり, これらを pillowcase (枕カバー) と呼ぶ.

○ Pillowcase method

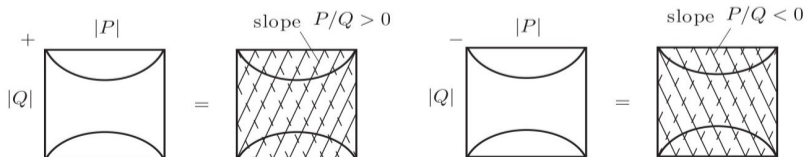
証明の肝である Pillowcase method について説明する。

この method の目的は, simple $(1, 1)$ -knot $(K_0 \cup K_1)$ を 2-bridge knot の band として実際に描くことである。

それを実現するために, 2つの pillowcase の貼り合わせの写像を恒等写像にすることで, \bar{V}_0 における simple $(1, 1)$ -knot の像を追跡する。

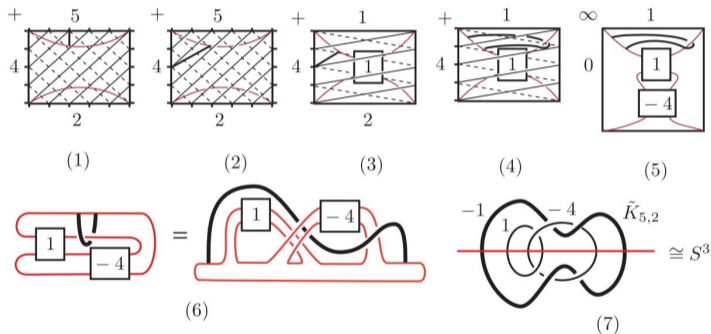
今回は概要のみ簡単に説明する。

pillowcase の slope を P/Q とし, 以下のように表すことにする。



ここでは例として、 $L(5, 2^2)$ を扱う。

(1) (5) は pillowcase の slope を解く過程を示しており、(6), (7) で simple $(1, 1)$ -knot $\tilde{K}_{p,k}$ を示す。



この method を用いて、レンズ空間手術で得られるホモロジー球面を特定する。

Proof

まず, (p, k) の組を $p < 1200$ まで計算する.

- $K_{p,k}$ の Alexander 多項式に関する公式 (Ichihara-Saito-Teragaito^[4])

$$\Delta_{K_{p,k}}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} t^{\Phi(i)p - \Psi(i)k} / (t^{k-1} + t^{k-2} + \dots + t + 1).$$

- Casson 不変量に関する公式

$$\lambda(\Sigma_{p/q}(K)) = \lambda(\Sigma) - \lambda(L(p, q)) + \frac{q}{2p} \Delta_K''(1)$$

- $q = 1$, $\Sigma_p(K) = L(p, k^2)$, $\lambda(\Sigma) = -2$, $\lambda(L(p, q)) = s(q, p)/2$ ($s(a, b)$: Dedekind sum) より,

$$s(k^2, p) = \frac{-p^2 - 21p - 2 + 6\Delta_K''(1)}{6p}$$

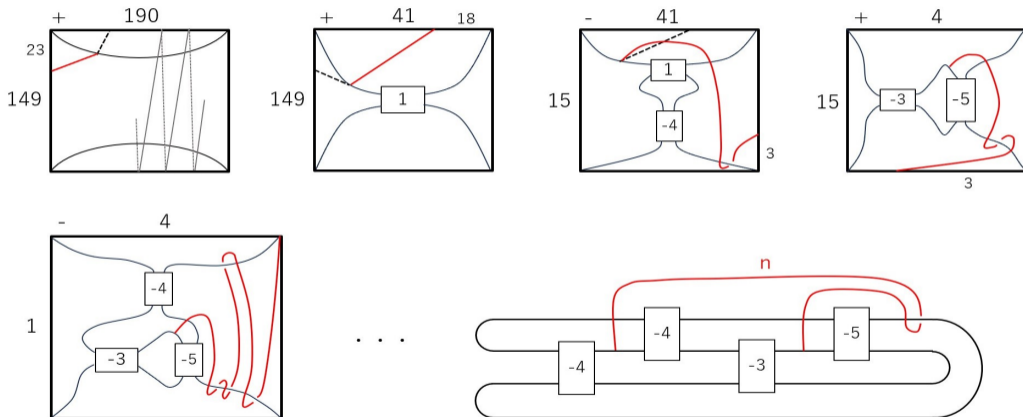
を満たす組 (k, p) を求めればよい.

実際に得られた $p < 1200$ の組 (k, p) は次の通り.

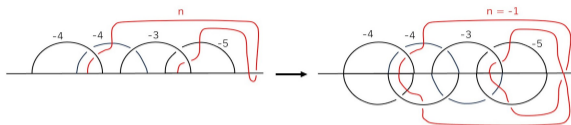
{5, 47}, {5, 53}, {7, 87}, {7, 89}, {7, 107}, {7, 109}, {8, 117}, {8, 139}, {9, 59}, {9, 148}, {9, 149}, {9, 151}, {9, 173}, {9, 175}, {9, 176}, {10, 187}, {10, 213}, {11, 35},
 {11, 51}, {11, 83}, {11, 223}, {11, 224}, {11, 226}, {11, 258}, {11, 260}, {11, 261}, {12, 101}, {12, 257}, {12, 269}, {12, 307}, {12, 319}, {13, 49}, {13, 69}, {13, 306},
 {13, 307}, {13, 308}, {13, 368}, {13, 369}, {13, 370}, {14, 355}, {14, 429}, {15, 43}, {15, 47}, {15, 94}, {15, 101}, {15, 103}, {15, 122}, {15, 124}, {15, 157},
 {15, 158}, {15, 416}, {15, 484}, {16, 67}, {16, 107}, {16, 115}, {16, 141}, {16, 185}, {16, 473}, {16, 551}, {17, 63}, {17, 78}, {17, 132}, {17, 133}, {17, 134},
 {17, 155}, {17, 156}, {17, 157}, {17, 517}, {17, 533}, {17, 535}, {17, 539}, {17, 617}, {17, 621}, {17, 623}, {17, 639}, {18, 149}, {18, 175}, {18, 223}, {18, 587},
 {18, 599}, {18, 697}, {18, 709}, {19, 55}, {19, 84}, {19, 110}, {19, 166}, {19, 168}, {19, 193}, {19, 195}, {19, 255}, {19, 256}, {19, 655}, {19, 658}, {19, 659},
 {19, 673}, {19, 771}, {19, 785}, {19, 786}, {19, 789}, {20, 183}, {20, 217}, {20, 729}, {20, 871}, {21, 101}, {21, 130}, {21, 131}, {21, 181}, {21, 205}, {21, 236},
 {21, 304}, {21, 307}, {22, 85}, {22, 205}, {22, 225}, {22, 259}, {22, 343}, {22, 867}, {22, 895}, {22, 1041}, {22, 1069}, {23, 112}, {23, 142}, {23, 155}, {23, 157},
 {23, 190}, {23, 222}, {23, 224}, {23, 381}, {23, 957}, {23, 974}, {23, 978}, {23, 979}, {23, 1137}, {23, 1138}, {23, 1142}, {23, 1159}, {24, 103}, {24, 397}, {24, 1045},
 {24, 1073}, {25, 111}, {25, 132}, {25, 146}, {25, 256}, {25, 258}, {25, 1134}, {25, 1138}, {25, 1142}, {25, 1157}, {26, 277}, {26, 305}, {26, 371}, {26, 479}, {27, 76},
 {27, 127}, {27, 158}, {27, 263}, {27, 329}, {27, 400}, {28, 179}, {28, 207}, {28, 229}, {28, 359}, {28, 425}, {28, 545}, {29, 127}, {29, 178}, {29, 192}, {29, 226},
 {29, 255}, {29, 385}, {29, 456}, {29, 592}, {29, 595}, {30, 157}, {30, 263}, {30, 413}, {30, 487}, {30, 647}, {31, 208}, {31, 254}, {31, 285}, {31, 663}, {31, 667},
 {32, 135}, {32, 275}, {32, 475}, {32, 549}, {32, 721}, {33, 94}, {33, 188}, {33, 194}, {33, 322}, {33, 500}, {33, 589}, {33, 773}, {34, 485}, {34, 803}, {35, 513},
 {35, 514}, {35, 568}, {35, 657}, {36, 227}, {36, 917}, {37, 141}, {37, 159}, {37, 177}, {37, 208}, {37, 290}, {37, 567}, {37, 619}, {37, 750}, {37, 945}, {37, 983},
 {38, 257}, {38, 427}, {38, 653}, {38, 791}, {38, 1003}, {39, 134}, {39, 323}, {39, 460}, {39, 695}, {39, 826}, {39, 1072}, {39, 1076}, {40, 207}, {40, 473}, {40, 731},
 {40, 869}, {40, 1137}, {41, 148}, {41, 299}, {41, 363}, {41, 500}, {41, 710}, {41, 1167}, {41, 1168}, {42, 305}, {42, 745}, {43, 393}, {43, 490}, {43, 850}, {43, 999},
 {44, 339}, {44, 519}, {45, 437}, {45, 593}, {45, 938}, {45, 1087}, {46, 155}, {46, 561}, {46, 889}, {46, 973}, {46, 1143}, {47, 387}, {47, 592}, {47, 647}, {47, 924},
 {47, 928}, {48, 1043}, {48, 1067}, {49, 176}, {49, 725}, {49, 992}, {49, 996}, {49, 1087}, {50, 437}, {50, 1033}, {50, 1141}, {51, 224}, {51, 775}, {51, 1187}, {52, 355},
 {53, 242}, {53, 598}, {53, 1180}, {55, 397}, {55, 537}, {55, 652}, {55, 893}, {56, 543}, {57, 692}, {57, 959}, {58, 597}, {58, 893}, {59, 260}, {59, 608}, {59, 750},
 {59, 932}, {59, 1050}, {60, 467}, {61, 653}, {61, 988}, {61, 1110}, {62, 287}, {62, 337}, {62, 1029}, {62, 1127}, {63, 515}, {64, 359}, {64, 719}, {65, 732}, {67, 957},
 {69, 1025}, {71, 1075}, {72, 919}, {73, 392}, {73, 930}, {73, 1147}, {74, 245}, {74, 253}, {74, 473}, {75, 737}, {75, 997}, {76, 425}, {76, 499}, {77, 274}, {78, 797},
 {78, 1069}, {79, 1082}, {81, 1153}, {82, 1173}, {83, 308}, {83, 895}, {85, 632}, {86, 551}, {86, 961}, {87, 284}, {87, 662}, {89, 590}, {95, 422}, {97, 416}, {97, 814},
 {98, 449}, {99, 368}, {99, 848}, {100, 737}, {103, 782}, {106, 497}, {108, 1019}, {110, 1057}, {113, 484}, {113, 950}, {116, 1001}, {117, 634}, {119, 632}, {120, 667},
 {125, 592}, {127, 1190}, {128, 731}, {138, 889}, {140, 737}, {141, 928}, {142, 893}, {151, 1010}, {152, 869}, {160, 1187}, {164, 1199}, {166, 1043}, {178, 1199}

今回は $(23,190)$ について証明する.

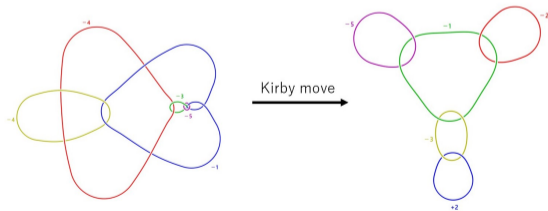
- $L(190, 149)$, $k = 23$ レンズ空間の involution をとり, Pillowcase method を適用する.



得られた 2-bridge knot の double cover をとる.



最後に, 得られた double cover を Kirby calculator を用いて特定する.



したがって、 $(23,190)$ の手術で得られるホモロジー球面は $\Sigma(2, 5, 7)$ である。
同様の操作を残りの (p, k) にも適応することで、定理が証明される。



Reference I

- [1] Berge, J.: Some knots with surgeries yielding lens spaces, *arXiv preprint arXiv:1802.09722* (2018).
- [2] Tange, M.: Lens spaces given from L-space homology 3-spheres, *Experimental Mathematics*, Vol. 18, No. 3, pp. 285–301 (2009).
- [3] Tange, M.: Homology spheres yielding lens spaces, *Proceedings of Gokova Geometry-Topology*, pp. 73–121 (2018).
- [4] Ichihara, K., Saito, T. and Teragaito, M.: Alexander polynomials of doubly primitive knots, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 135, No. 2, pp. 605–615 (2007).