結び目の $(1, 1)$-分解の Goeritz 群

田中 勇輝 (広島大学 先進理工系科学研究科)

結び目の数理 VI (東京女子大学)

2023 年 12 月 23 日

概略

M: 向き付け可能閉 3 次元多様体.

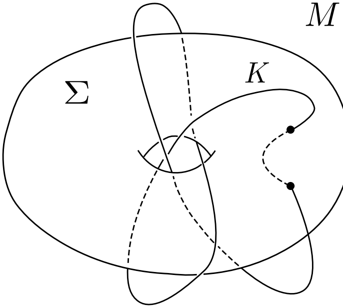
$\Sigma \subset M$: 種数 1 の Heegaard 曲面.　$K \subset M$: 結び目.

$\searrow$　　$\swarrow$

$(M, K; \Sigma)$: K の $(1,1)$-分解.

$\downarrow$ 対称性を記述.

$(M, K; \Sigma)$ の Goeritz 群.



(g,n)-分解の定義

定義

V: 種数 g のハンドル体.

$T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n \subset V$: 自明な n-タングル

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ・T_i: V に適切に埋め込まれた arc,

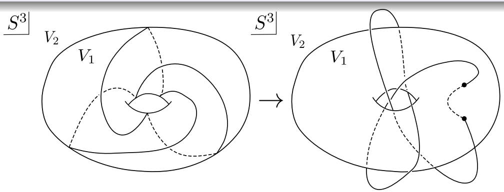
・${}^\forall i$, ${}^\exists D_i \subset V$: 円盤 s.t. $T_i \subset \partial D_i$ かつ $\partial D_i - T_i \subset \partial V$.

定義

M: 向き付け可能閉 3 次元多様体, $L \subset M$: 絡み目.

$(M, L; \Sigma)$: (g,n)-分解 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ・$M = V_1 \cup_\Sigma V_2$: 種数 g の Heegaard 分解,

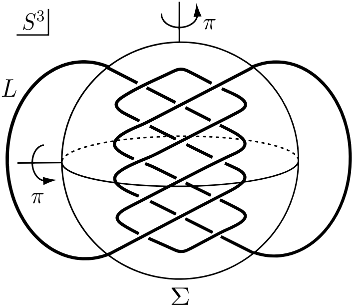
・$V_i \cap L \subset V_i$: 自明な n-タングル.



(g,n)-分解の Goeritz 群

定義

$(M, L; \Sigma)$: (g,n)-分解.
$\mathrm{MCG}^+(M, V_1, L) := \mathrm{Homeo}^+(M, V_1, L) / \underset{\text{isotopy}}{\sim}$: $(M, L; \Sigma)$ の Goeritz 群



$M = S^3$, L: 2 橋結び目,
$(g,n) = (0,2)$ の例となっている.

左図の分解の Goeritz 群は
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

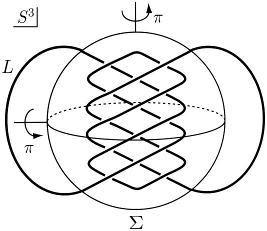
先行研究

絡み目の (g,n)-分解の Goeritz 群に関して, 次が知られている.

定理 (Iguchi–Koda 2021)

$(M,L;\Sigma)$: (g,n)-分解. ただし, $(g,n) \neq (0,1),(0,2),(1,1)$.
$d(M,L;\Sigma) \geq 6$ のとき, $(M,L;\Sigma)$ の Goeritz 群は有限群である.

L が $(1,1)$-分解を許容するとき,
自動的に結び目となるため, L ではなく K と書く.
また, V_i 側にあるタングル $K \cap V_i$ を T_i と書く.



$(1,1)$-分解の Goeritz 群の有限表示

$(M,K;\Sigma)$: $(1,1)$-分解 $\Rightarrow$ M は $S^2\times S^1$, S^3, レンズ空間のいずれか.

$K\subset M$: 自明な結び目 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ${}^{\exists}D$: M 内の円盤 s.t. $\partial D = K$.

$K\subset M$: コア結び目 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $M - \mathrm{Int}(\mathrm{Nbd}(K))$ がソリッドトーラス.

主定理

M: 向き付け可能閉 3 次元多様体, $K\subset M$: 結び目, $(M,K;\Sigma)$: $(1,1)$-分解.
$\mathcal{G} := \mathrm{MCG}^+(M,V_1,K)$: $(M,K;\Sigma)$ の Goeritz 群.
このとき, 以下の (1)–(5) が成立する.

(1) $M\neq S^2\times S^1$, K: 自明な結び目のとき, $\mathcal{G}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
(2) $M = S^2\times S^1$, K: 自明な結び目のとき, $\mathcal{G}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\langle\beta,\gamma\mid\gamma^2=1\rangle$.
(3) $M = S^2\times S^1$, K: コア結び目のとき, $\mathcal{G}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
(4) (p,q): 互いに素な整数, $p\neq 0$: 偶数,
$(L(p,q),K_{p/q};\Sigma)$: (p,q) から一意に定まる分解のとき, $\mathcal{G}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(5) (1)–(4) 以外のとき, $\mathcal{G}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

主定理 (1) の例

主定理

$(M, K; \Sigma)$: $(1,1)$-分解, $\mathcal{G} := \mathrm{MCG}^{+}(M, V_1, K)$: $(M, K; \Sigma)$ の Goeritz 群.

(1) $M \neq S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$.

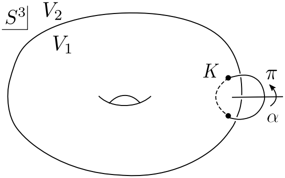
(2) $M = S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle$.

(3) $M = S^2 \times S^1$, K: コア結び目のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau'\rangle$.

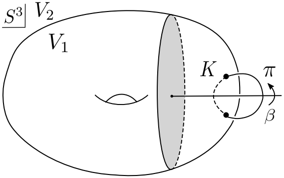
(4) (p, q): 互いに素な整数, $p \neq 0$: 偶数,
$(L(p,q), K_{p/q}; \Sigma)$: (p,q) から定まる分解のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$.

(5) (1)–(4) 以外のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$.

(1) $M = S^3$, K: 自明な結び目.



$\mathrm{ord}(\alpha) = 2$



$\mathrm{ord}(\beta) = \infty$

この分解の Goeritz 群は
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$.

主定理 (5) の例

主定理

$(M, K; \Sigma)$: $(1, 1)$-分解, $\mathcal{G} := \mathrm{MCG}^+(M, V_1, K)$: $(M, K; \Sigma)$ の Goeritz 群.

(1) $M \neq S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$.

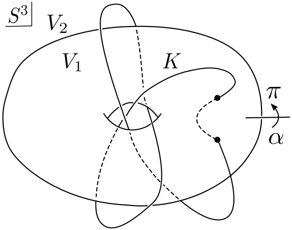
(2) $M = S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle$.

(3) $M = S^2 \times S^1$, K: コア結び目のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau'\rangle$.

(4) (p, q): 互いに素な整数, $p \neq 0$: 偶数,
$(L(p, q), K_{p/q}; \Sigma)$: (p, q) から定まる分解のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$.

(5) (1)–(4) 以外のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$.

(4) $M = S^3$, K: 三葉結び目.



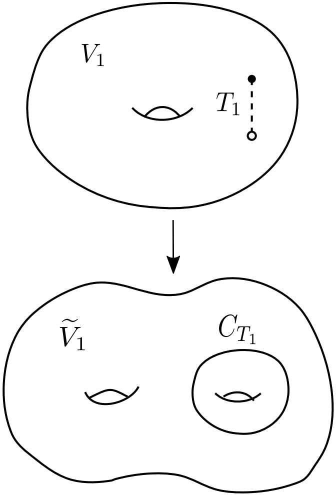
この分解の Goeritz 群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$.

タングルの写像類群 $\mathrm{MCG}^+(V_1, T_1)$

$\mathrm{MCG}^+(M, V_1, K) \hookrightarrow \mathrm{MCG}^+(V_1, T_1); [f] \mapsto [f|_{V_1}]$
より, $\mathrm{MCG}^+(M, V_1, K) < \mathrm{MCG}^+(V_1, T_1)$
とみなす.

右図のように (V_1, T_1) から $(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ を得る.

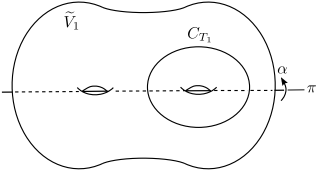
$\mathrm{MCG}^+(V_1, T_1) \cong \mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ であり,
以下では, $\mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ を求める.



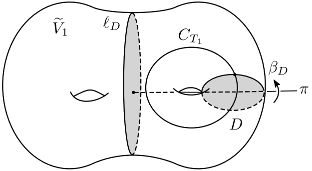
$\mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ の有限表示

命題

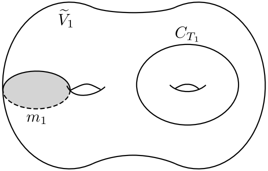
$$\mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle \beta_D, \gamma_{\{D,E\}} \mid \gamma_{\{D,E\}}^{\ 2} = 1\rangle.$$



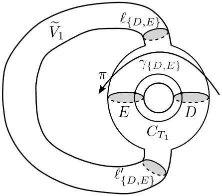
α: hyperelliptic involution.



β_D: ℓ_D に沿った half twist.



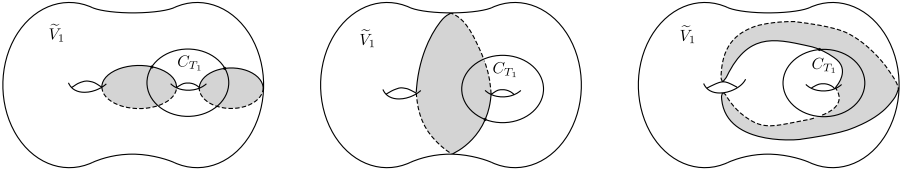
τ: m_1 に沿った Dehn twist.



$\gamma_{\{D,E\}}$: D と E を入れ替える写像.

Canceling 円盤のなす複体

タングル T_1 が自明 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ${}^\exists D \subset V_1$: 円盤 s.t. $T_1 \subset \partial D$ かつ $\partial D - T_1 \subset \partial V_1$.
この D を T_1 の canceling 円盤とよぶ.



$(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ 内で canceling 円盤とは, C_{T_1} と 1 点で交わる円盤となる.

定義 (Canceling 円盤のなす複体)

$C(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$: 頂点は $(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ の canceling 円盤のイソトピー類,
$D_1, \ldots, D_{k+1}$: k-単体を張る
$\Leftrightarrow D_1, \ldots, D_{k+1}$ が互いに交わらない代表元をとれる.

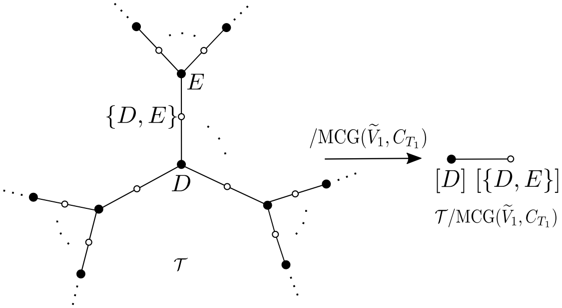
補題

複体 $C(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ は 1 次元複体であり, 可縮 i.e. 木である.

Bass-Serre 理論

Bass-Serre 理論とは, 群 G が木 $\mathcal{T}$ に作用するとき,
商グラフ $\mathcal{T}/G$ によって, G の表示を得る理論である.

群 $\mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1})$ の木 $\mathcal{T} := \mathrm{Sd}(C(\widetilde{V}_1, C_{T_1}))$ への作用に
Bass-Serre 理論を適用する.



$$\begin{aligned}\mathrm{MCG}^+(V_1, T_1) &\cong \mathrm{MCG}^+(\widetilde{V}_1, C_{T_1}) \\ &= \mathrm{Stab}([D]) *_{\mathrm{Stab}([D],[E])} \mathrm{Stab}([\{D, E\}]) \quad \text{(Bass-Serre 理論より)} \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \alpha \rangle \times \mathbb{Z}\langle \tau \rangle \times \langle \beta_D, \gamma_{\{D,E\}} \mid \gamma_{\{D,E\}}^2 = 1 \rangle.\end{aligned}$$

m_2 による場合分け

m_i: T_i と交わらない V_i のメリディアン円盤の境界.

補題

$\phi \in \mathrm{MCG}^+(V_1, T_1)$ としたとき,

$$\phi(m_2) = m_2 \Leftrightarrow \phi \in \mathrm{MCG}^+(M, V_1, K) < \mathrm{MCG}^+(V_1, T_1).$$

以下のような m_2 による場合分けによって, 群が決定される.

$$\begin{cases} \text{(I) } m_1 \cap m_2 = \emptyset & \begin{cases} \text{(i) } m_1 \approx m_2 \\ \text{(ii) } m_1 \not\approx m_2 \end{cases} \\ \text{(II) } m_1 \cap m_2 \neq \emptyset & \begin{cases} \text{(iii) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤が一意} \\ \text{(iv) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤がちょうど 2 つ} \end{cases} \end{cases}$$

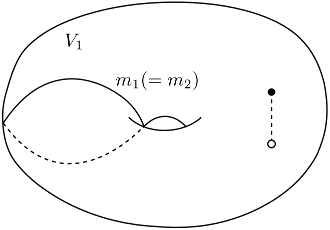
(iii) , (iv) の場合, さらに場合分けを行う.

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{(a) } D \cap m_2 = \emptyset \\ \text{(b) } D \cap m_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{(iv)} \begin{cases} \text{(c) } \iota(D \cup E, m_2) = \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \\ \text{(d) } \iota(D \cup E, m_2) \neq \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \end{cases}$$

主定理の証明 1

$$\begin{cases} \text{(I) } m_1 \cap m_2 = \emptyset & \begin{cases} \text{(i) } m_1 \approx m_2 \\ \text{(ii) } m_1 \not\approx m_2 \end{cases} \\ \text{(II) } m_1 \cap m_2 \neq \emptyset & \begin{cases} \text{(iii) } m_2 \text{ と交わりが最小の canceling 円盤が一意} \\ \text{(iv) } m_2 \text{ と交わりが最小の canceling 円盤がちょうど 2 つ} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{(a) } D \cap m_2 = \emptyset \\ \text{(b) } D \cap m_2 \neq \emptyset \end{cases} \qquad \text{(iv)} \begin{cases} \text{(c) } \iota(D \cup E, m_2) = \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \\ \text{(d) } \iota(D \cup E, m_2) \neq \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \end{cases}$$



(i) のとき, 主定理の (2)

$M = S^2 \times S^1$, K: 自明な結び目のときに対応.

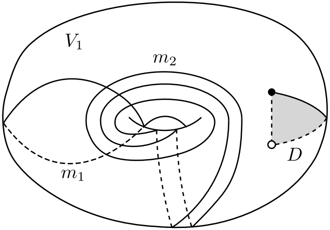
このとき, $\mathcal{G} = \mathrm{MCG}^+(V_1, T_1)$

$$= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle.$$

主定理の証明 2

$$\begin{cases} \text{(I) } m_1 \cap m_2 = \emptyset & \begin{cases} \text{(i) } m_1 \approx m_2 \\ \text{(ii) } m_1 \not\approx m_2 \end{cases} \\ \text{(II) } m_1 \cap m_2 \neq \emptyset & \begin{cases} \text{(iii) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤が一意} \\ \text{(iv) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤がちょうど 2 つ} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{(a) } D \cap m_2 = \emptyset \\ \text{(b) } D \cap m_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{(iv)} \begin{cases} \text{(c) } \iota(D \cup E, m_2) = \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \\ \text{(d) } \iota(D \cup E, m_2) \neq \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \end{cases}$$



(iii)-(a) のとき, 主定理の (1)

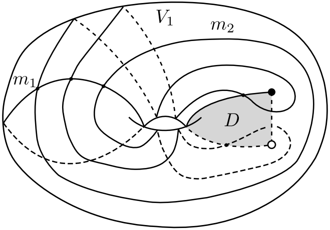
$M \neq S^2 \times S^1$, K: 自明な結び目のときに対応.

このとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta_D\rangle$.

主定理の証明 3

$$\begin{cases} \text{(I) } m_1 \cap m_2 = \emptyset & \begin{cases} \text{(i) } m_1 \approx m_2 \\ \text{(ii) } m_1 \not\approx m_2 \end{cases} \\ \text{(II) } m_1 \cap m_2 \neq \emptyset & \begin{cases} \text{(iii) } m_2 \text{ と交わりが最小の canceling 円盤が一意} \\ \text{(iv) } m_2 \text{ と交わりが最小の canceling 円盤がちょうど 2 つ} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{(a) } D \cap m_2 = \emptyset \\ \text{(b) } D \cap m_2 \neq \emptyset \end{cases} \qquad \text{(iv)} \begin{cases} \text{(c) } \iota(D \cup E, m_2) = \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \\ \text{(d) } \iota(D \cup E, m_2) \neq \hat{\iota}(D \cup E, m_2) \end{cases}$$



(iii)-(b) のとき, 主定理の (5)

(1)–(4) 以外のときに対応.
(左図は $M = S^3$, $K = T(3,2)$: 三葉結び目)

このとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$.

まとめ

主定理

$(M,K;\Sigma)$: $(1,1)$-分解, $\mathcal{G} := \mathrm{MCG}^+(M,V_1,K)$: $(M,K;\Sigma)$ の Goeritz 群.

(1) $M \neq S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$.

(2) $M = S^2 \times S^1$, K: 自明のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta,\gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle$.

(3) $M = S^2 \times S^1$, K: コア結び目のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau'\rangle$.

(4) (p,q): 互いに素な整数, $p \neq 0$: 偶数,
$(L(p,q),K_{p/q};\Sigma)$: (p,q) から定まる分解のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$.

(5) (1)–(4) 以外のとき, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$.

$$\begin{cases} \text{(I) } m_1 \cap m_2 = \emptyset & \begin{cases} \text{(i) } m_1 \approx m_2 & (2) \\ \text{(ii) } m_1 \not\approx m_2 & (3) \end{cases} \\ \text{(II) } m_1 \cap m_2 \neq \emptyset & \begin{cases} \text{(iii) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤が一意} \\ \text{(iv) } m_2 \text{と交わりが最小の canceling 円盤が 2 つ} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{(a) } D \cap m_2 = \emptyset & (1) \\ \text{(b) } D \cap m_2 \neq \emptyset & (5) \end{cases} \qquad \text{(iv)} \begin{cases} \text{(c) } \iota(D \cup E, m_2) = \hat{\iota}(D \cup E, m_2) & (4) \\ \text{(d) } \iota(D \cup E, m_2) \neq \hat{\iota}(D \cup E, m_2) & (5) \end{cases}$$

ご清聴ありがとうございました.