4 次元球面上のポシェット手術

鈴木 龍正
丹下 基生氏 (筑波大学) との共同研究

東京工業大学理学院数学系数学コース博士 3 年

2023 年 12 月 24 日
結び目の数理 VI (東京女子大学)

目次

ポシェット

多様体は全て滑らか, 連結かつ向き付けられているとし,
写像は全て滑らかとする.

定義 (ポシェット)(Iwase-Matsumoto, 2004)

4 次元多様体 $S^1 \times D^3 \natural D^2 \times S^2$ をポシェット **(pochette)** と呼び,
P と表す.

- P は $S^1 \vee S^2$ にホモトピー同値である: $P \simeq S^1 \vee S^2$.

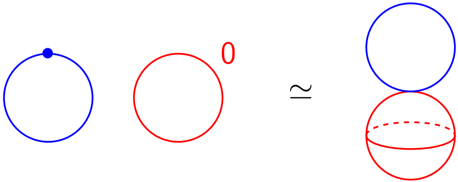

図 1: $P = S^1 \times D^3 \natural D^2 \times S^2$ のハンドル図式 (左) と $S^1 \vee S^2$ (右)

P の部分多様体

$l := S^1 \times \{*\}$: ロンジチュード **(longitude)**,
$m := \partial D^2 \times \{*\}$: メリディアン **(meridian)**,
$B := \{*\} \times \partial D^3$: ベルト球面 **(belt sphere)**,
$S := \{*\} \times S^2$: コア球面 **(core sphere)**.
$l, B \subset S^1 \times D^3 \subset P, \quad m, S \subset D^2 \times S^2 \subset P.$

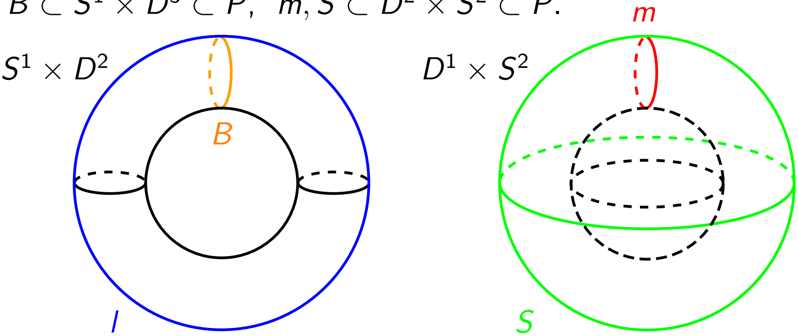

図 2: P の部分多様体 l, m, B, S の位置関係

ポシェット手術

M: 4 次元多様体, $X \subset M$, $E(X) := M - \mathrm{int}(X)$,
$e : P \hookrightarrow M$: 埋め込み写像, $g : \partial P \to \partial E(e(P))$: 微分同相写像.

定義 (ポシェット手術)(Iwase-Matsumoto, 2004)

4 次元多様体 $E(e(P)) \cup_g P$ を
M 上のポシェット手術 **(pochette surgery)** と呼ぶ.

- M 上のポシェット手術は, 2 次元結び目 $e(S)$ に沿う M 上の Gluck 手術 $\mathrm{Gl}(M, e(S))$ の一般化である.

mod 2 framing

- S^3 内の結び目の framing 係数と同様に, $\partial P = \#^2 S^1 \times S^2$ 内の $g(m)(\approx S^1)$ の framing 係数を定義できる.

P を $S^1 \times D^3$ に m をココア (cocore) に持つ 2 ハンドルを接着した 4 次元多様体と解釈できる. framing 係数の差が偶数かつ $g_1(m) = g_2(m)$ を満たす接着写像 $g_1, g_2 : \partial P \to \partial E(e(P))$ に対して,

$$g_1^{-1} \circ g_2|_{N(m)}$$

は P の 2 ハンドルの内側まで拡張可能であるので, g_1, g_2 で接着された 2 つの 4 次元多様体は互いに微分同相である.

定義 (mod 2 framing)(Iwase-Matsumoto, 2004)

この $g(m)$ の framing 係数は, $g : \partial P \to \partial E(e(P))$ に対する **mod 2 framing** と呼び, $\varepsilon(\in \{0,1\})$ と表記する.

ポシェット手術の微分同相類

定理 (Iwase-Matsumoto, 2004)

M 上のポシェット手術 $E(e(P)) \cup_g P$ の微分同相類は,
以下の 3 つの条件により決まる:

(1) 埋め込み写像 $e : P \hookrightarrow M$.
(2) ホモロジー類 $g_*([m]) \in H_1(\partial E(e(P))) \cong \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[l]$.
(3) $g(m)$ の mod 2 framing $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

- $M(e, g) = E(e(P)) \cup_g P$ と表記する.

ポシェット手術のスロープとコード

- $g_*([m]) = p[m] + q[l]$ であり, $g(m)$ の向きは考慮しないので, 既約分数 p/q が well-defined に決まる.

定義 (スロープ)

p/q をポシェット手術のスロープ **(slope)** と呼ぶ.

- e, p/q, ε で得られるポシェット手術を $M(e, p/q, \varepsilon)$ と表記する.
- $E(e(S))$ に固有 (proper) に埋め込まれた弧 C の管状近傍を取り除くことで $E(e(P))$ が得られる.

定義 (コード)

C をポシェット手術のコード **(cord)** と呼ぶ.

ポシェット手術の絡み数

M: 4 次元ホモロジー球面, B^3: 3 次元ホモロジー球体.
このとき, 絡み数 $L(e(S), e(l))$ を与えることができる:

1. $e|_S : S \to M$ を写像 $B^3 \to M$ に拡張する.
2. B^3 と横断的に交わるように $e(l)$ を $E(e(S))$ 内で変形し, B^3 の向きは $e(S)$ の向きから誘導する.
3. B^3 の像と $e(l)$ との各交差点の符号は B^3 と $e(l)$ の連結の向きが M の向きと一致するとき $+1$, そうでないとき -1 とする.

定義 (絡み数)

$\ell := L(e(S), e(l))$ を埋め込み $e : P \hookrightarrow M$ の絡み数と呼ぶ.

- $L(e(l), e(S)) = -L(e(S), e(l)) = -\ell$.
- 絡み数 ℓ は埋め込み写像 $e : P \hookrightarrow M$ の不変量ではない.

P と $S^1 \times ST$ との関係 (1/2)

- $P = S^1 \times ST \cup H^2$
  ($ST := D^2 \times S^1$: ソリッドトーラス,
  H^2: 接着球面が $S^1 \times \{*\}$ である 2 ハンドル).

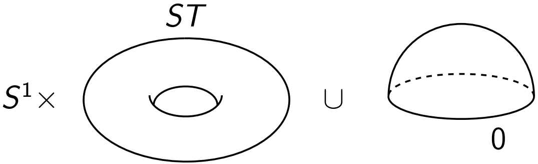

図 3: P の構成法の一種

P と $S^1 \times ST$ との関係 (2/2)

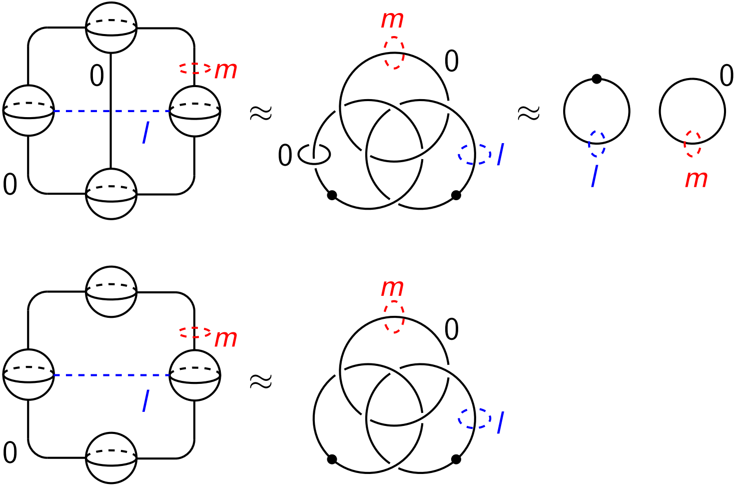

図 4: P のハンドル図式 (上) と $S^1 \times ST$ のハンドル図式 (下)

ポシェット手術とトーラス手術

$s := S^1 \times \{*\} \times \{*\} \subset S^1 \times ST$, $e_0 : S^1 \times ST \to M$: $e(S^1 \times ST)$ が自明な法束を持つ埋め込み写像,
$g_0 : \partial(S^1 \times ST) \to \partial E(e_0(S^1 \times ST))$: 微分同相写像.

定義 (トーラス手術)

4 次元多様体 $E(e_0(S^1 \times ST)) \cup_{g_0} (S^1 \times ST)$ を M 上のトーラス手術 **(torus surgery)** と呼ぶ.

- M 上のトーラス手術 $E(e_0(S^1 \times ST)) \cup_{g_0} (S^1 \times ST)$ の微分同相類は, e_0 と $(g_0)_*([m]) \in H_1(S^1 \times \partial ST) = \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[l] \oplus \mathbb{Z}[s]$ で決まる.
- $e_0 = e|_{S^1 \times ST} \Longrightarrow M(e, p/q, \varepsilon)$: e_0 と $(g_0)_*([m]) = p[m] + q[l] + \varepsilon p[s]$ による M 上のトーラス手術.

ポシェット手術のホモロジー群

- M: 連結かつ向き付けられている 4 次元閉多様体
  $\Longrightarrow$ $H_n(M(e, p/q, \epsilon)) \cong \mathbb{Z}$ $(n = 0, 4)$.

命題 (S.-Tange, 2023)

M: 4 次元ホモロジー球面, $e : P \hookrightarrow M$: 絡み数が ℓ の埋め込み写像.

(i) $p + q\ell \neq 0$ のとき,

$$H_n(M(e, p/q, \epsilon)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(p+q\ell)\mathbb{Z} & (n = 1, 2), \\ 0 & (n = 3). \end{cases}$$

(ii) $p + q\ell = 0$ のとき, $H_n(M(e, p/q, \epsilon)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 1, 3), \\ \mathbb{Z}^2 & (n = 2). \end{cases}$

- p, q は互いに素であるから,
  $p + q\ell = 0 \iff (p, q) = (\ell, -1), (-\ell, 1)$.

コードまたはコア球面が自明な場合

定理 (S.-Tange, 2023)

M: 4 次元閉多様体, $e : P \hookrightarrow M$: 自明なコード (boundary parallel なコード)C を持つ埋め込み写像．このとき，$M(e, 1/q, \varepsilon) \approx M(e, \infty, \varepsilon)$ であり，$M(e, \infty, 0) = M$, $M(e, \infty, 1) = \mathrm{Gl}(M, e(S))$.

定理 (S.-Tange, 2023)

$e(S)$: 自明なコア球面．このとき，コードは自明であり，
$S^4(e, g)$: 4 次元ホモロジー球面 $\Longrightarrow$ $S^4(e, g) \approx S^4$.

- 柏木 信一氏, 村瀬 裕一氏の結果と磯島 司氏の助言:
  $DP(i_P, p/q, 0) \approx \mathrm{Spin}(L(q, p))$, $DP(i_P, p/q, 1) \approx \widetilde{\mathrm{Spin}}(L(q, p))$
  と上記の 2 つの定理から，$e(S)$ が自明なコア球面であるとき，
  $S^4(e, p/q, 0) \approx \mathrm{Spin}(L(p, q))$, $S^4(e, p/q, 1) \approx \widetilde{\mathrm{Spin}}(L(p, q))$.

Andrews-Curtis 自明

定義 (Andrews-Curtis 変形)

$R = \langle x_1, \dots, x_n | w_1, \dots, w_n \rangle$: 自明な群の有限表示.
基本変形 (生成元と関係子を逆元にする操作や置換),
関係子 $w_1, \dots, w_n$ の変形:
(AC1) $w_i \longleftrightarrow w_i w_j \ (j \neq i)$, (AC2) $w_i \longleftrightarrow w_i^{-1}$,
(AC3) $w_i \longleftrightarrow v w_i v^{-1}$ (v: 任意の $x_1, \dots, x_n$ の語)
(全ての $k \neq i$ に対して w_k は固定), および生成元 g と関係子 g を同じ元として追加または削除する操作を Andrews-Curtis 変形と呼ぶ.

定義 (Andrews-Curtis 自明)

基底と関係子に対する Andrews-Curtis 変形の有限列で R を $\langle \varnothing | \varnothing \rangle$ にできるとき, R を Andrews-Curtis 自明な表示と呼ぶ.

Andrews-Curtis 自明な表示の例

n, p: 正の整数, $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$: 階数 $n+1$ の自由群 F_{n+1} の生成元,
w: $x_1, \ldots, x_{n+1}$ の語.
$1 \leq i < n$ のとき,

$$r_i := \begin{cases} w x_{i+1} w^{-1} x_{i+2}^{-1} & (i \text{ is odd}), \\ w x_{i+2} w^{-1} x_{i+1}^{-1} & (i \text{ is even}), \end{cases}$$

$$r_n := \begin{cases} w x_{n+1} w^{-1} x_1^{-1} & (n \text{ is odd}), \\ w x_1 w^{-1} x_{n+1}^{-1} & (n \text{ is even}), \end{cases}$$

$\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$.

補題 (S.-Tange, 2023)

$$R(n, p, \mathbf{r}) := \langle x_1, \ldots, x_{n+1} | r_1, \ldots, r_n, x_1^{-1}(x_2 x_1^{-1})^p \rangle$$

は Andrews-Curtis 自明な表示である.

リボン 2 次元結び目に沿うポシェット手術

定理 (S.-Tange, 2023)

S_r: $\pi_1(E(S_r)) \not\cong \mathbb{Z}$ を満たすリボン 2 次元結び目.
このとき, ある 3 ハンドルを持たない 4 次元ホモロジー球体 $H(S_r)$ が存在して, $S^4(e,g) \approx DH(S_r)$ かつ $e(S) = S_r$ を満たす非自明なコード C を持つ $e: P \hookrightarrow M$ と $g: \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.

- $H(S_r)$ のハンドル分解の様子から得られる基本群の有限表示 $R(S_r)$ が Andrew-Curtis 自明になる場合は, $S^4(e,g) \approx S^4$ が成り立つ.
- $e(S)$ が ribbon 2-knot of 1-fusion または $R(S_r) = R(n, p, \mathbf{r})$ になる場合は, $S^4(e,g) \approx S^4$ を満たす非自明なコード C を持つ $e: P \hookrightarrow M$ と $g: \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.

ポシェット手術の基本群

M: 4 次元多様体, $e : P \hookrightarrow M$: 埋め込み写像,
$l' := [e(l)]$, $m' := [e(m)] \in \pi_1(\partial E(e(P)))$,

$$c'_{p,q} = \begin{cases} m'^p l'^q & (pq = 0), \\ \prod_{k=1}^{|p|} l'^{q/|q|(\lfloor k|q|/|p| \rfloor - \lfloor (k-1)|q|/|p| \rfloor)} m'^{p/|p|} & (pq \neq 0). \end{cases}$$

$\pi_1(E(S)) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R} \rangle$ ($\mathcal{S}$: 生成集合, $\mathcal{R}$: 関係子全体の集合).

命題 (S.-Tange, 2023)

$$\pi_1(M(e, p/q, \epsilon)) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R}, c'_{p,q} \rangle.$$

- $\pi_1(M(e, \pm 1, \epsilon)) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R}, (m')^{\pm 1} l' \rangle$.

ポシェット手術の基本群と群の有限表示 (1/2)

定理 (S.-Tange, 2023)

K: 結び目.
このとき,

(1) $e(S)$ がリボン 2 次元結び目,

(2) ある結び目群の有限表示

$$R(K) = \langle x_1, \ldots, x_k | r_1, \ldots, r_{k-1} \rangle$$

が存在して, 任意の $x_1, \ldots, x_k$ における語 r に対して,

$$\pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon)) \cong \langle x_1, \ldots, x_k | r_1, \ldots, r_{k-1}, r \rangle$$

を満たす $e : P \hookrightarrow M$ と $g : \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.

ポシェット手術の基本群と群の有限表示 (2/2)

証明

$E(e(S))$ が S^4 におけるリボン 2 次元結び目 $e(S)$ の補空間かつ $\pi_1(E(e(S))) \cong \pi_1(E(K))$ を満たすように, $e : P \hookrightarrow S^4$ が取れる. このとき, $\pi_1(E(e(P))) = \pi_1(E(e(S)))$ であり, $E(e(S))$ のハンドル図式における dotted circle を生成元とし, framed knot の各 dotted circle との絡まり方を関係子で表現した, ある K の結び目群の有限表示 $R(K) = \langle x_1, \ldots, x_k | r_1, \ldots, r_{k-1} \rangle$ が得られるので,

$$\pi_1(E(e(P))) \cong \langle x_1, \ldots, x_k | r_1, \ldots, r_{k-1} \rangle.$$

更に, $m' = x_i$, $l' = x_i^{-1} r$ を満たすようにコード C が取れるので, 定理の主張が成立する. □

ポシェット手術と Dehn 手術の基本群 (1/2)

$S^3_{p/q}(K)$: 係数 $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の S^3 上の Dehn 手術.

系 (S.-Tange, 2023)

K: 結び目, $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.
このとき,

$$\pi_1(S^3_{p/q}(K)) \cong \pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon))$$

を満たす $e : P \hookrightarrow M$ と $g : \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.

証明

先程の定理の証明より, $E(e(S))$ のハンドル図式から自然に得られる, K の結び目群の有限表示 $\langle x_1, \ldots, x_k | r_1, \ldots, r_{k-1} \rangle$ が存在する.
このとき, $\pi_1(S^3_{p/q}(K)) \cong \langle x_1, \ldots, x_n | r_1, \ldots, r_{k-1}, r_{p/q} \rangle$ を満たす $x_1, \ldots, x_n$ の語 $r_{p/q}$ が存在するから, 系の主張が成立する. $\square$

ポシェット手術と Dehn 手術の基本群 (2/2)

系 (S.-Tange, 2023)

$\pi_1(S^3_{1/q}(K)) \cong \pi_1(S^4(e,1,\varepsilon))$ かつ $S^4(e,1,\varepsilon)$ が 4 次元ホモロジー球面になる $e: P \hookrightarrow M$ と $g: \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.

証明

先程の定理と系から, $\pi_1(S^3_{1/q}(K)) \cong \pi_1(S^4(e,1,\varepsilon))$ を満たす, 埋め込み写像 $e: P \hookrightarrow M$ と微分同相写像 $g: \partial P \to \partial E(e(P))$ が存在する.
Hurewicz の定理から, $H_1(S^4(e,1,\varepsilon)) \cong H_1(S^3_{1/q}(K)) = 0$.
これとポシェット手術のホモロジー群の結果より,

$$H_n(S^4(e,1,\varepsilon)) \cong H_n(S^4) \ (n \in \mathbb{Z})$$

が分かるので, $S^4(e,1,\varepsilon)$ は 4 次元ホモロジー球面である. $\square$