(2×1)-tube に含まれる lattice knot の minimum lattice stick number

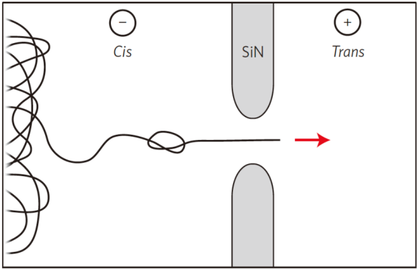
宗和凌

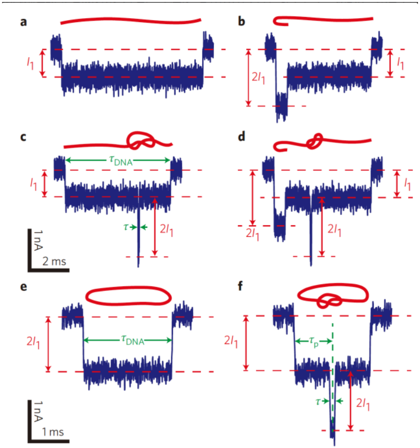
埼玉大学大学院 理工学研究科
数理電子情報専攻 数学 PG

2023 年 12 月 25 日

Background

最近の実験で結び目を含む DNA が nanopore（非常に小さな穴）や nanochannel（非常に細い筒）を通過する様子が観察されている. その際に section が多くとも 4 本となる場合が多く, DNA の形状は 2×1- tube 内の結び目や絡み目を用いてモデル化される.





研究の流れ

- $(m \times n)$-tube 内での結び目 (絡み目) の構成方法について理解
- (2×1)-tube 内で結び目 (絡み目) の minimum step number について理解
- (2×1)-tube の minimum lattice stick number を調べる
- minimum lattice stick number と交点数との関係を調べる

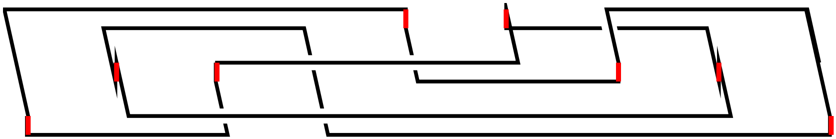


Figure: 4_1 の格子結び目を z 軸方向につぶした様子

格子結び目

定義 (格子結び目)

$\mathbb{Z}^3$ 内で隣り合う 2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分を **step** と呼ぶ.
n 本の step を持つ結び目 (絡み目) を埋め込んだものを長さ n の格子結び目 (絡み目) という.
また, x 軸に平行な step を x-step と呼ぶ.

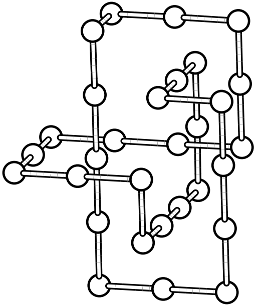


Figure: 4_1 の例

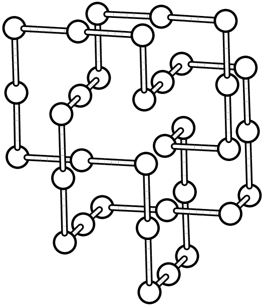


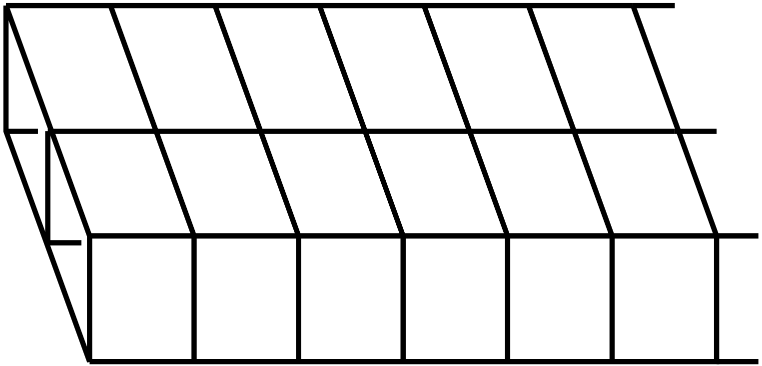
Figure: 5_1 の例

$(m \times n)$-tube

定義 $(m \times n)$-tube)

$(m \times n)$-tube は任意の正の整数 m,n に対して $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\mathbb{R} \times [0, m] \times [0, n]$ である.

以降は (2×1)-tube のみを考える.



定義 (minimum step number)

K: 結び目 (絡み目)
L: K を立方格子内で実現した格子結び目 (絡み目)
L を立方格子内で構成するのに必要な step の本数を **step number** と呼び $\mathrm{step}(L)$ と表す.
最小な本数を **minimum step number** と呼び $l(K)$ と表す.
特に, (2×1)-tube 内で K の minimum step number は $l_{2\times1}(K)$ と表す.

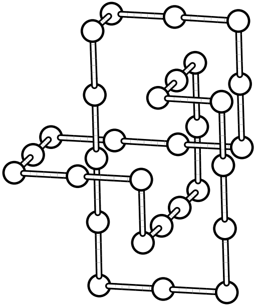


Figure: $l(4_1) = 30$
(山口, 2008)

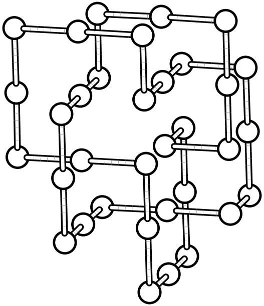


Figure: $l(5_1) = 34$
(石原, 2009)

定義 (minimum lattice stick number)

$\mathbb{Z}^3$ 内で隣り合う 2 つの格子点を結んでいったときの直線分を **lattice stick** と呼ぶ.L を立方格子内で構成するのに必要な lattice stick の本数を **lattice stick number** と呼び, stick(L) と表す.
必要の最小な本数を **minimum lattice stick number** と呼び, $S_L(K)$ と表す. 特に, (2×1)-tube 内での minimum lattice stick number は $S_{L(2\times1)}(K)$ と表す.

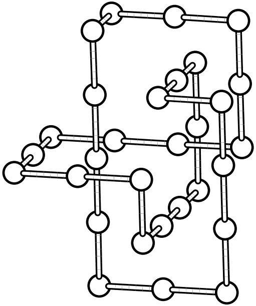


Figure: $S_L(4_1) = 14$
(Huh-Oh, 2005)

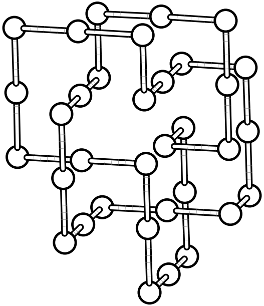


Figure: $S_L(5_1) = 16$
(Huang-Yang, 2017)

n-braid

定義 (n-braid)

$h : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$ を x 軸への射影写像
$B = h^{-1}([a, b]) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
P_i: 平面 $h^{-1}(a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の点 $(1 \leqq i \leqq n)$
Q_i: 平面 $h^{-1}(b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の点
$\{f_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ は B 内で埋め込まれた単純弧で, f_i は P_i と $Q_{\pi(i)}$ 結ぶとする. ただし, π は $1, 2, ..., n$ の置換とする. また, $h \circ f_i$ は単調であると仮定.
このとき, $(B, f_i)(i = 1, 2, ..., n)$ を n-**braid** という

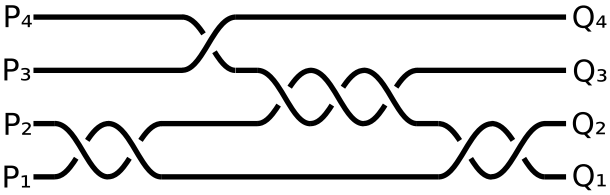


Figure: 図のように i 番目の弧と $i+1$ 番目の弧の右ひねりが σ_i, 左ひねりが σ_i^{-1} に対応する. 左の図は 4-braid の $\sigma_1^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^3\sigma_1^{-2}$ が対応する

定義 ($2n$-plat 表示)

$(B, f_i)(i = 1, 2, ..., n)$ を $2n$-braid とする. このとき左右の $2n$ 個の端点をそれぞれ P_1 と P_2,P_3 と P_4,...(Q_1 と Q_2,Q_3 と Q_4,...) のように n 本の弧で繋いで得られる絡み目の表示を $2n$-**plat** 表示という.

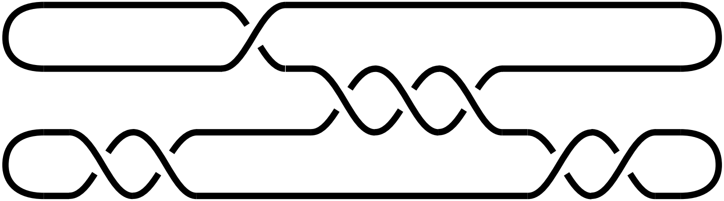


Figure: 図は 4-braid から構成したものである.

注意

結び目 (絡み目)K が 2 橋結び目 (絡み目) であることと 4-plat 表示をもつことは同値である.

Conway 正規表示

定義 (Conway 正規表示)

2 橋結び目（絡み目）において, 一番上の紐に交点がなく図のようなダイアグラムを **Conway** の正規表示といい,
$C(a_1, b_1, ..., a_n)$ や $C(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ のように表す.
4-braid $\sigma_1^{a_1}\sigma_2^{-b_1}\sigma_1^{a_2}...\sigma_2^{-b_{n-1}}\sigma_1^{a_n}$ に対応する Conway の正規表示を
$C(a_1, b_1, a_2, ..., b_{n-1}, a_n)$ で表し, $\sigma_1^{a_1}\sigma_2^{-b_1}\sigma_1^{a_2}...\sigma_1^{a_n}\sigma_2^{-b_n}$ に対応する Conway
の正規表示を $C(a_1, b_1, a_2, ..., a_n, b_n)$ で表す.

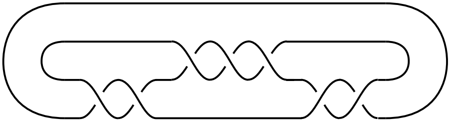


Figure: $C(2, -3, -2)$

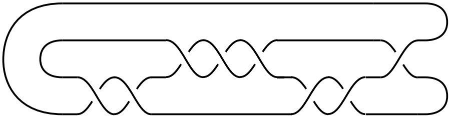


Figure: $C(2, -3, -2, 1)$

plat 表示と tube の関係

定理 (Ishihara et al. J. Phys. A, 2017)

任意の 2 橋結び目（絡み目）は (2×1)-tube 内で構成できる.

(2×1)-tube 内では素な結び目 (絡み目) は 2 橋結び目（絡み目）となる.

先行研究 (minimum step number in the (2×1)-tube)

定理 (Ishihara, 2017, Theorem 3.)

K: 2 橋結び目（絡み目）
K のある Conway 正規表示 $C(a_1, b_1, ..., a_n)$ が存在し, K の minimum step number $l_{2\times 1}$ は以下の式を満たす.
(1)K: $T_{2,a}$ (($2,\ a$)-トーラス結び目 (絡み目))

$$l_{2\times 1}(K) = 12|a| + 4\epsilon(a) - 4$$

(2) それ以外

$$\begin{aligned} l_{2\times 1}(K) =& 12\sum_{i=1}^{n}|a_i| + 18\sum_{i=1}^{n-1}|b_i| \\ &+ 6\sum_{i=1}^{n-1}(sgn(a_i b_i) + sgn(b_i a_{i+1})) \\ &+ 4(-\epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\epsilon(a_i) - \epsilon(a_n)) - 12n + 16 \end{aligned}$$

ただし, $\epsilon(a) = 0$ (a: 偶数のとき), $\epsilon(a) = 1$ (a: 奇数のとき)

minimum step number の具体例

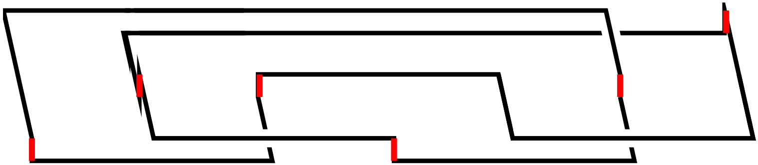


Figure: 3_1 のときは $C(3).l_{2\times 1}(3_1) = 36$

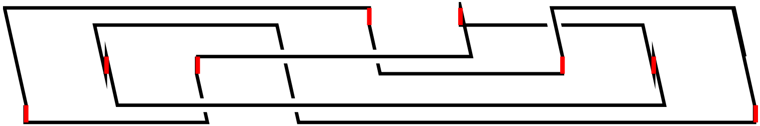


Figure: 4_1 のときは $C(1,1,-3).l_{2\times 1}(4_1) = 50$

主定理 (S, 2023,minimum lattice stick number in the (2×1)-tube)

K: 2 橋結び目（絡み目）

K のある Conway 正規表示 $C(a_1, b_1, ..., a_n)$ が存在し, K の minimum lattice stick number $S_{L(2\times1)}$ は以下の式を満たす.

(1)K : $T_{2,a}$ ((2, a)-トーラス結び目 (絡み目))

$$S_{L(2\times1)}(K) = 6|a| + \epsilon(a) + 2$$

(2) それ以外

$$\begin{aligned} S_{L(2\times1)}(K) =& 6\sum_{i=1}^{n}|a_i| + 8\sum_{i=1}^{n-1}|b_i| \\ &+ 3\sum_{i=1}^{n-1}(sgn(a_i b_i) + sgn(b_i a_{i+1})) \\ &- \epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\epsilon(a_i) - \epsilon(a_n) - 6n + 10 \end{aligned}$$

ただし, $\epsilon(a) = 0$ (a: 偶数のとき), $\epsilon(a) = 1$ (a: 奇数のとき)

minimum lattice stick number の具体例

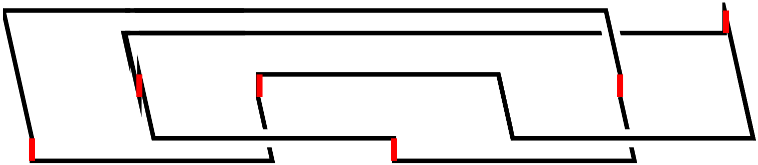


Figure: 3_1 のときは $C(3)$. $S_{L(2\times1)}(3_1) = 21$

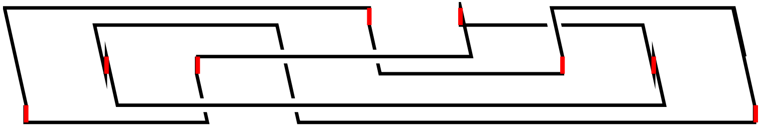


Figure: 4_1 のときは $C(1,1,-3)$. $S_{L(2\times1)}(4_1) = 28$

観察

L: lattice knot
このとき, 以下の等式が成り立つ.

$$stick(L) = corner(L)$$

ただし, $corner(L)$ は 2 本の stick が繋がっている角の個数と定義する.

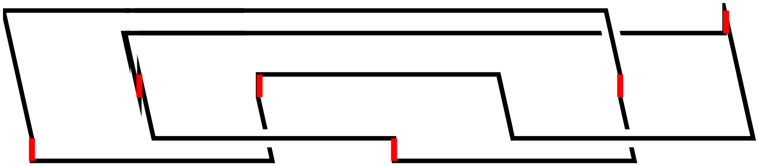


Figure: $S_{L(2\times1)}(3_1) = 21 = corner(L)$

主定理の証明の流れ

ステップ 1
$C(a)(C(a_1, b_1, a_2, ..., a_n))$ に対して minimum lattice stick number を与える $L(a)(L(a_1, b_1, a_2, ..., a_n))$ を構成する.

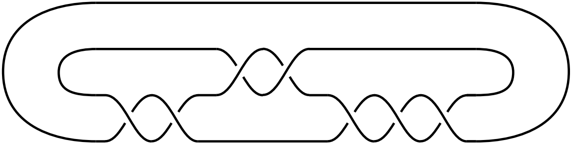
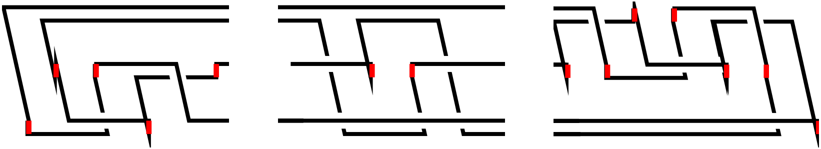


Figure: 7_5 に対応する $C(2, 2, 3)$



(a) $A_1(2, +)$. $corner(A_1(2, +)) = 17$

(b) $B_{13}(2)$. $corner(B_{13}(2)) = 10$

(c) $A_3(+, 3)$. $corner(A_3(+, 3)) = 22$

Figure: $stick(L(2, 2, 3)) = 49$

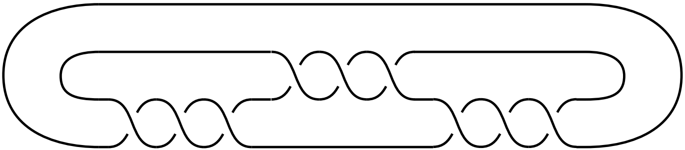
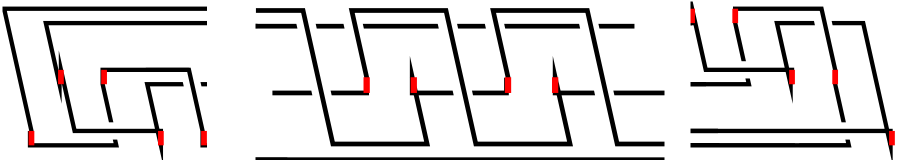


Figure: 7_7 に対応する $C(3, -3, 3)$



(a) $A_1(3, -)$. $corner(A_1(3, -)) = 16$

(b) $B_{13}(-3)$. $corner(B_{13}(-3)) = 18$

(c) $A_3(-, 3)$. $corner(A_3(-, 3)) = 16$

Figure: $stick(L(3, -3, 3)) = 50$

命題 ($L(a_1, b_1, ..., a_n)$ の lattice stick number)

(1)$n = 1$ のとき

$$stick(L) = 6|a| + \epsilon(a) + 2$$

ただし, $\epsilon(a) = 0$ (a: 偶数), $\epsilon(a) = 1$ (a: 奇数)
(2)$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} stick(L) =& 6\sum_{i=1}^{n}|a_i| + 8\sum_{i=1}^{n-1}|b_i| + 3\sum_{i=1}^{n-1}(sgn(a_ib_i) + sgn(b_ia_{i+1})) \\ & - \epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\epsilon(a_i) - \epsilon(a_n) \\ & + 2\sum_{i=2}^{n-1}\delta(sgn(b_{i-1}), a_i, sgn(b_i)) - 6n + 10 \end{aligned}$$

ただし, $(a_i, sgn(b_i)) \neq \pm(1, -1)$, $(a_i, sgn(b_{i-1})) \neq \pm(1, -1)$, $\epsilon(a) = 0$ (a: 偶数), $\epsilon(a) = 1$ (a: 奇数) のとき $\delta(s_1, a, s_2) = 1$ ($(s_1, a, s_2) = \pm(1, -1, 1)$ のとき), $\delta(s_1, a, s_2) = 0$ (それ以外のとき).

ステップ 2
パターンの対応する語と形の分類を行う.

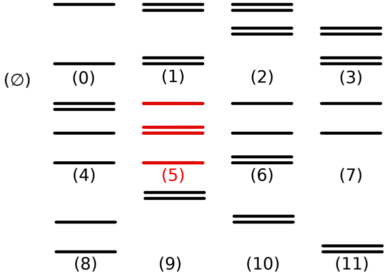


Figure: $(1 \times 2 \times 1)$-box 内の x-step の射影 13 種類

$D_{k_1 k_2 \ldots k_i}(\sigma)$: 2 つ以上の pattern を組み合わせて構成した diagram と対応する語

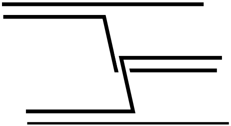


Figure: $D_{15}(\sigma_2^{-1})$

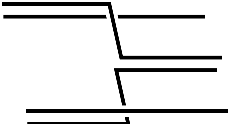
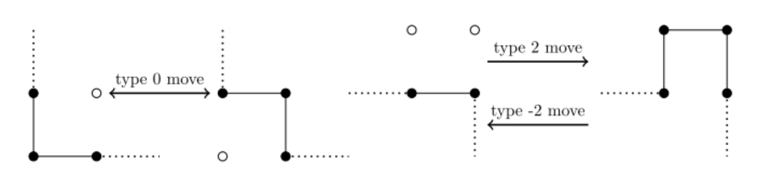


Figure: $D_{15}(\sigma_1 \sigma_3)$

定義 (BFACF move)

以下の格子結び目 (絡み目) 内の局所的な移動を **BFACF move** と呼ぶ.

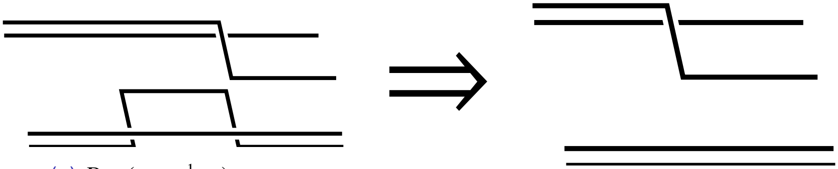


D:minimum lattice stick number を満たす L のダイアグラム

ステップ 3

$D_{46}(\sigma_1^{-1}\sigma_3), D_{64}(\sigma_1\sigma_3^{-1}), D_{46}(1), D_{64}(1)$ が D に含まれないことを示す.

-2-move により corner 数が減る.

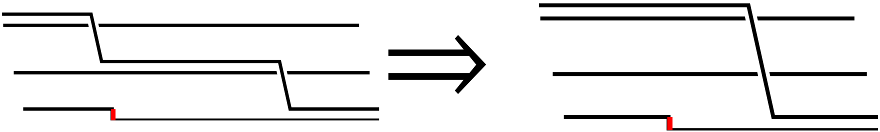


(a) $D_{146}(\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_3)$ (b) $D_{16}(\sigma_3)$

Figure: $corner(D_{16}(\sigma_3)) = corner(D_{146}(\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_3)) - 4$

ステップ 4
pattern5 が D に含まれないことを示す.

0-move により corner 数が減る.



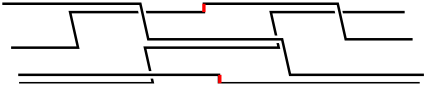
(a) $D_{4556}(\sigma_3\sigma_2)$

(b) $D_{446}(\sigma_3\sigma_2)$

Figure: $corner(D_{446}(\sigma_3\sigma_2)) = corner(D_{4556}(\sigma_3\sigma_2)) - 2$

ステップ 4
pattern5 が D に含まれないことを示す.

P: $D_{615516}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3)$ を含む lattice knot L の diagram 部分を P
P_1: P の左側の diagram,
P_2: P の右側の diagram
$r(x, y, z) = (x, 2 - y, 1 - z)$
P': $D_{6644}(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})$
このとき, lattice knot L' の diagram を P_1 と P' と $r(P_2)$ をに置き換えたものとすると, L' と L は同じ knot type である.


(a) $D_{615516}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3)$

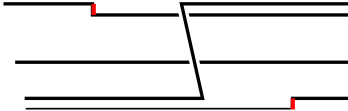

(b) $D_{6644}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})$

Figure: $corner(D_{6644}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})) = corner(D_{615516}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3)) - 10$

フライプ

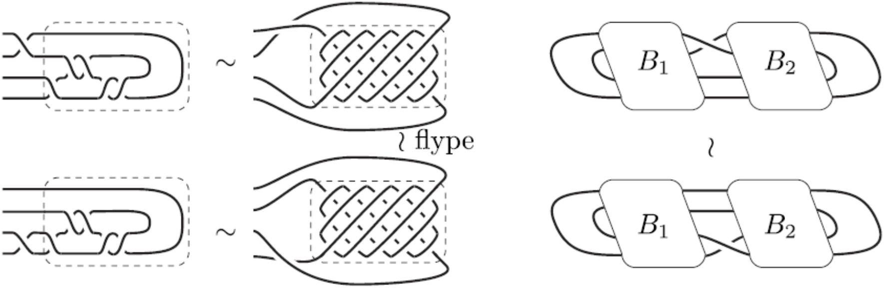
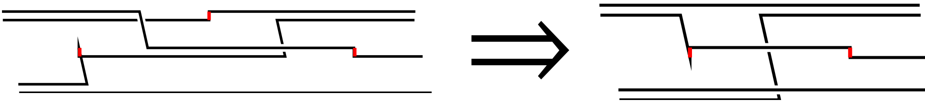


Figure: フライプの変形により σ_3 を σ_1 に変えることが出来る.
有理タングルの対称性から点線の枠の中は変わらない

[1] Ishihara et al., J. Phys A, 2017

ステップ 4
pattern5 が D に含まれないことを示す.

フライプにより σ_1 を σ_3 に, または σ_3 を σ_1 に置き換えることでより少ない lattice stick number で構成する.



(a) $D_{145544}(\sigma_3\sigma_2)$ (b) $D_{1644}(\sigma_1\sigma_2)$

Figure: $corner(D_{1644}(\sigma_1\sigma_2)) = corner(D_{145544}(\sigma_3\sigma_2)) - 4$

ステップ 5
残ったパターン同士を繋げ, $L(a_1, b_1, a_2, ..., a_n)$ の構成に一致することを示す.

交点数との関係

定理 (S, 2023)

K: 2 橋結び目（絡み目）
c: K の交点数
c を用いて以下の不等式が成り立つ.

$$6c + 2 \leq S_{L(2\times 1)}(K) \leq 6c + 3 \ (K: \ T_{2,a})$$
$$6c + 4 \leq S_{L(2\times 1)}(K) \leq \frac{15c}{2} - 1 \ (\text{それ以外})$$

knot	minimum lattice stick number	対応する文字列
3_1	21	(3)
4_1	28	(1,1,-3)
5_1	33	(5)
5_2	34	(3,1,1)
6_1	40	(1,1,-5)
6_2	41	(2,1,3)
6_3	43	(2,2,-3)
7_1	45	(7)
7_2	46	(5,1,1)
7_3	47	(5,-1,-2)
7_4	46	(3,1,3)
7_5	49	(2,2,3)
7_7	50	(3,-3,3)
8_1	52	(1,1,-7)
8_2	53	(2,1,5)
8_3	52	(3,1,-5)
8_4	53	(4,1,3)
8_7	55	(2,2,-5)

knot	minimum lattice stick number	対応する文字列
8_9	55	(3,2,-4)
8_{11}	56	(3,-3,-3)
9_1	57	(9)
9_2	58	(7,1,1)
9_3	59	(5,1,-4)
9_4	59	(5,-1,-4)
9_4	59	(5,-1,-4)
9_5	58	(5,1,3)
9_9	61	(3,2,4)
9_{11}	63	(2,3,-5)
10_1	64	(1,1,-9)
10_2	65	(2,1,7)
10_3	64	(5,1,-5)
10_4	65	(6,1,3)
10_5	67	(2,2,-7)
10_8	65	(4,1,5)
10_{17}	67	(4,2,-5)

- Kai Ishihara, Maxime Pouokam, Atsumi Suzuki, Robert Scharein,Mariel Vazquez, Javier Arsuagaand Koya Shimokawa., Bounds for minimum step number of knots confined to tubes in the simple cubic lattice. J. Phys. A, 2017
- Youngsik Huh, Seungsang Oh, Lattice stick number of small knots, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 14, No. 7 (2005) 859–867
- Yuanfei Huang, Weiling Yang, Lattice stick number of knots, J. Phys. A, 2017