2 元集合に付随する tribracket bracket と絡み目の状態和型不変量

坂本 柚香 (広島大学)

西村 勇哉 氏（広島大学）との共同研究

結び目の数理 VI（東京女子大学）

2023 年 12 月 23 日

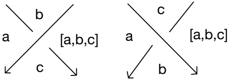
X : 有限集合

$[\ ,\ ,\ ] : X^3 \to X$

$(X,[\ ,\ ,\ ])$: tribracket

L : 有向絡み目, D : L の図式,

$C \in C_X(D)$: X-coloring



R : 可換環

$A, B : X^3 \to R^\times$

$\beta = (A, B)$: tribracket bracket

Lの不変量

$$\Phi_X^{\beta}(L) := \sum_{C \in Cx(D)} u^{\beta(C)}$$

$X = Z/2Z$

$[a,b,c] = a+b-c$

R : 整域

$(A^{(i)}, B^{(i)})$: 普遍 Z/2Z tribracket bracket
$(i = 1, \ldots, 5)$

・$\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L') \Rightarrow J(L) = J(L')$

・$\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L)$ は Jones 多項式より真に強い

$X = Z/2Z$

$[a,b,c] = a+b-c$

計算

・ (2,q)トーラス絡み目について

・ 2 橋絡み目について

Tribracket

定義

X を空でない集合とする. X 上に次の条件を満たす写像 $[\,,\,]: X^3 \to X$ が定まっているとき, X を tribracket という.

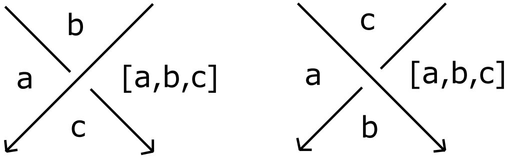
1. 1.1 $\forall b, c, d \in X$, $\exists! a \in X$ s.t. $[a, b, c] = d$,
   1.2 $\forall a, c, d \in X$, $\exists! b \in X$ s.t. $[a, b, c] = d$,
   1.3 $\forall a, b, d \in X$, $\exists! c \in X$ s.t. $[a, b, c] = d$.
2. $\forall a, b, c, d \in X$,
$$[c, [a, b, c], [a, c, d]] = [b, [a, b, c], [a, b, d]] = [d, [a, b, d], [a, c, d]].$$

例

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし, $[\,,\,]: X^3 \to X$ を $[a, b, c] = a + b - c$ によって定義する. このとき, X は tribracket である.

Tribracket coloring

L : 有向絡み目.
D : L の図式.
有限 tribracket X を用いて, 以下のルールで D の領域を coloring する.



有向絡み目の図式 D の X-coloring の集合を $\mathcal{C}_X(D)$ と表す.
D の X-coloring の数 $|\mathcal{C}_X(D)|$ は, 有向絡み目 L の不変量である.

Tribracket bracket

定義

X を tribracket, R を単位元を持つ可換環とする. 次の条件を満たす写像 $A, B : X^3 \to R^\times$ のペア $\beta := (A, B)$ を tribracket bracket という.

1.
   1.1 $\forall a, b, c \in X$ に対して, $\delta := -A_{a,b,c}B^{-1}_{a,b,c} - A^{-1}_{a,b,c}B_{a,b,c}$ はすべて等しい.
   1.2 $\forall a, b \in X$ に対して, $w := -A^2_{a,b,b}B^{-1}_{a,b,b}$ はすべて等しい.
2. $\forall a, b, c, d \in X$ に対して, 5 つの等式を満たす:
   2.1 $A_{a,b,c}A_{c,[a,b,c],[a,c,d]}A_{a,c,d} = A_{b,[a,b,c],[a,b,d]}A_{a,b,d}A_{d,[a,b,d],[a,c,d]}$.

   （他 4 つの等式は省略）

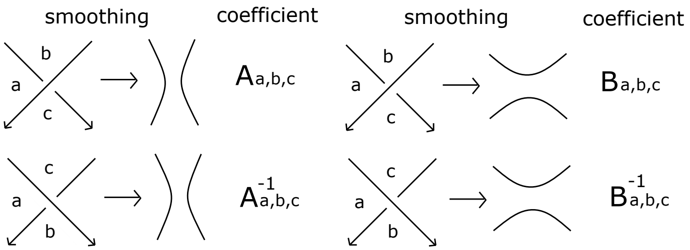
ただし, A, B による $(a, b, c) \in X^3$ の像を, $A_{a,b,c}$, $B_{a,b,c}$ と表している.

状態和型不変量

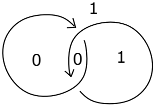
定義

L : 有向絡み目, D : L の図式, X : 有限 tribracket, $C \in C_X(D)$,
β : tribracket bracket, k : D の Kauffman 状態内の成分の数,
p : 絡み目の正の交差の数, n : 負の交差の数.

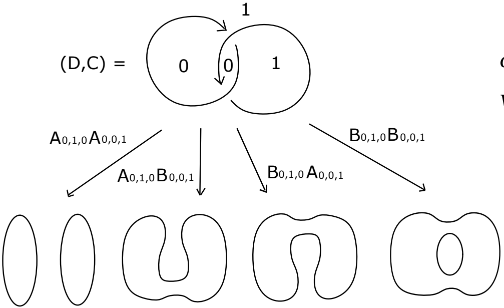
$$\beta(D,C) := w^{n-p} \sum_{states} \prod (\text{smoothing coefficients})\delta^k.$$



例

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[a,b,c] = a + b - c$, $(D,C) =$ 

このとき, $\beta(D,C)$ は次のように計算される.



$$\delta = -A_{a,b,c}B_{a,b,c}^{-1} - A_{a,b,c}^{-1}B_{a,b,c}$$
$$w = -A_{a,b,b}^{2}B_{a,b,b}^{-1}$$

$$\beta(D,C) =$$
$$w^{-2}(A_{0,1,0}A_{0,0,1}\delta^2 + A_{0,1,0}B_{0,0,1}\delta + B_{0,1,0}A_{0,0,1}\delta + B_{0,1,0}B_{0,0,1}\delta^2).$$

定義 (再掲)

L : 有向絡み目, D : L の図式, X : 有限 tribracket, $C \in \mathcal{C}_X(D)$,
β : tribracket bracket, k : C の Kauffman 状態内の成分の数,
p : 絡み目の正の交差の数, n : 負の交差の数.

$$\beta(D,C) := w^{n-p} \sum_{states} \prod \text{(smoothing coefficients)}\delta^k.$$

定理 (Aggarwal–Nelson–Rivera 2020)

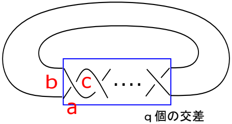
$\beta(D,C)$ は, X-colored Reidemeister move によって変化しない.

系

X : tribracket, β : tribracket bracket,
L : 有向絡み目, D : L の図式.
"多項式" $\Phi_X^\beta(L) = \sum_{C \in \mathcal{C}_X(D)} u^{\beta(D,C)}$ は, L の不変量である.

$(2, q)$ トーラス絡み目の状態和型不変量

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[a, b, c] = a + b - c$,



: 有向 $(2, q)$ トーラス絡み目 $T(2, q)$ の図式.

定理

(1) q :奇数 のとき

$$\Phi_X^{\beta}(T(2, q)) = \sum_{a,b\in X} u^{w^{-q}((A^{\alpha}_{a,b,b}+B^{\alpha}_{a,b,b}\delta)^{q\alpha}+A^{q}_{a,b,b}\delta^2-A^{q}_{a,b,b})}$$

ただし, 交差が正のとき $\alpha = 1$, 交差が負のとき $\alpha = -1$.

(2) ・q :偶数 > 0 かつ 交差が正

・q :偶数 < 0 かつ 交差が負　　のとき

$$\Phi_X^\beta(T(2,q)) = \sum_{a,b,c\in X} u^{w^{-q}((A^\alpha_{a,b,c}+B^\alpha_{a,b,c}\delta)^{\frac{q}{2}\alpha}(A^\alpha_{a,c,b}+B^\alpha_{a,c,b}\delta)^{\frac{q}{2}\alpha}+A^{\frac{q}{2}}_{a,b,c}A^{\frac{q}{2}}_{a,c,b}\delta^2-A^{\frac{q}{2}}_{a,b,c}A^{\frac{q}{2}}_{a,c,b})}$$

ただし, 交差が正のとき $\alpha = 1$, 交差が負のとき $\alpha = -1$.

(3) ・q :偶数 > 0 かつ 交差が負

・q :偶数 < 0 かつ 交差が正　　のとき

$$\Phi_X^\beta(T(2,q)) =$$

$$\sum_{a,b,c\in X} u^{w^{q}((A^\alpha_{[a,b,c],b,c}\delta+B^\alpha_{[a,b,c],b,c})^{-\frac{q}{2}\alpha}(A^\alpha_{[a,b,c],c,b}\delta+B^\alpha_{[a,b,c],c,b})^{-\frac{q}{2}\alpha}+B^{-\frac{q}{2}}_{[a,b,c],b,c}B^{-\frac{q}{2}}_{[a,b,c],c,b}\delta^2-B^{-\frac{q}{2}}_{[a,b,c],b,c}B^{-\frac{q}{2}}_{[a,b,c],c,b})}$$

ただし, 交差が正のとき $\alpha = 1$, 交差が負のとき $\alpha = -1$.

証明 (1).

・q :奇数 > 0 のとき

$$\beta(D,C) = w^{-q}(A^q_{a,b,b}\delta^2 + \sum_{l=1}^{q}\binom{q}{l}A^{q-l}_{a,b,b}B^l_{a,b,b}\delta^l)$$
$$= w^{-q}((A_{a,b,b} + B_{a,b,b}\delta)^q + A^q_{a,b,b}\delta^2 - A^q_{a,b,b})$$

・q :奇数 < 0 のとき

$$\beta(D,C) = w^{|q|}((A^{-1}_{a,b,b})^{|q|}\delta^2 + \sum_{l=1}^{|q|}\binom{|q|}{l}(A^{-1}_{a,b,b})^{|q|-l}(B^{-1}_{a,b,b})^l\delta^l)$$
$$= w^{|q|}((A^{-1}_{a,b,b} + B^{-1}_{a,b,b}\delta)^{|q|} + (A^{-1}_{a,b,b})^{|q|}\delta^2 - (A^{-1}_{a,b,b})^{|q|})$$
$$= w^{-q}((A^{-1}_{a,b,b} + B^{-1}_{a,b,b}\delta)^{-q} + A^q_{a,b,b}\delta^2 - A^q_{a,b,b})$$

よって, 交差が正のとき $\alpha = 1$, 交差が負のとき $\alpha = -1$ とすると,

$$\beta(D,C) = w^{-q}((A^\alpha_{a,b,b} + B^\alpha_{a,b,b}\delta)^{q\alpha} + A^q_{a,b,b}\delta^2 - A^q_{a,b,b}).$$

したがって,

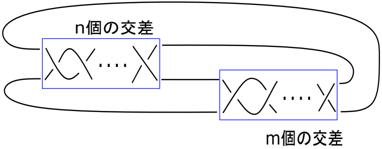
$$\Phi^\beta_X(T(2,q)) = \sum_{a,b\in X} u^{w^{-q}((A^\alpha_{a,b,b}+B^\alpha_{a,b,b}\delta)^{q\alpha}+A^q_{a,b,b}\delta^2-A^q_{a,b,b})}.$$

2 橋絡み目の状態和型不変量

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[a, b, c] = a + b - c$ とする.

2 橋絡み目についても, $\Phi_X^\beta(L)$ の計算を行っている.

現状：

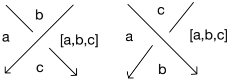


については計算できた.

今後：
一般の 2 橋絡み目について計算する.

X : 有限集合
$[\ ,\ ,\ ] : X^3 \to X$
$(X, [\ ,\ ,\ ])$: tribracket

L : 有向絡み目, D : L の図式,
$C \in \mathcal{C}_X(D)$: X-coloring



R : 可換環
$A, B : X^3 \to R^\times$
$\beta = (A, B)$: tribracket bracket

Lの不変量
$$\Phi_X^{\beta}(L) := \sum_{C \in \mathcal{C}_X(D)} u^{\beta(C)}$$

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[a,b,c] = a+b-c$
R : 整域

$(A^{(i)}, B^{(i)})$: 普遍 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tribracket bracket
$(i = 1, \ldots, 5)$

- $\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L') \Rightarrow J(L) = J(L')$
- $\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L)$ は Jones 多項式より真に強い

$X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[a,b,c] = a+b-c$

計算
- $(2,q)$トーラス絡み目について
- 2 橋絡み目について

R を整域としたときの tribracket bracket

以下, $X=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[a,b,c]=a+b-c$, R は整域とする.

命題

$R=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ のとき, tribracket bracket (A,B) の数は 3072.
$R=\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ のとき, tribracket bracket (A,B) の数は 28512.

注意

Tribracket bracket (A,B) は次のように行列で表すこともできる.

$$A:\left(\begin{pmatrix}A_{0,0,0} & A_{0,0,1}\\ A_{0,1,0} & A_{0,1,1}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}A_{1,0,0} & A_{1,0,1}\\ A_{1,1,0} & A_{1,1,1}\end{pmatrix}\right)$$

$$B:\left(\begin{pmatrix}B_{0,0,0} & B_{0,0,1}\\ B_{0,1,0} & B_{0,1,1}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}B_{1,0,0} & B_{1,0,1}\\ B_{1,1,0} & B_{1,1,1}\end{pmatrix}\right)$$

Tribracket bracket (A,B) を以下の type 1 から type 5 に分類できる.

- type 1

$$A^{(1)}:\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2x_3x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B^{(1)}:\left(\begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1}x_2x_5 \\ x_1x_3x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_5 & x_1x_4x_5^{-1} \\ x_1^{-1}x_2x_3x_4^{-1}x_5 & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

- type 2

$$A^{(2)}:\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1^3x_5^{-2} \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1^3x_5^{-2} & x_4 \\ x_2x_3x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B^{(2)}:\left(\begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1}x_2x_5 \\ x_1x_3x_5^{-1} & x_1^4x_5^{-3} \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1^4x_5^{-3} & x_1x_4x_5^{-1} \\ x_1^{-1}x_2x_3x_4^{-1}x_5 & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

- type 3

$$A^{(3)}:\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2x_3x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B^{(3)}:\left(\begin{pmatrix} x_5 & x_1x_2x_5^{-1} \\ x_1^{-1}x_3x_5 & x_5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1}x_4x_5 \\ x_1x_2x_3x_4^{-1}x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

- type 4

$$A^{(4)}:\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1^3x_5^{-2} \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1^3x_5^{-2} & x_4 \\ x_2x_3x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B^{(4)}:\left(\begin{pmatrix} x_5 & x_1x_2x_5^{-1} \\ x_1^{-1}x_3x_5 & x_1^4x_5^{-3} \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1^4x_5^{-3} & x_1^{-1}x_4x_5 \\ x_1x_2x_3x_4^{-1}x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

- type 5

$$A^{(5)}:\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2x_3x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B^{(5)}:\left(\begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1}x_2x_5 \\ x_1^{-1}x_3x_5 & x_5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1}x_4x_5 \\ x_1^{-1}x_2x_3x_4^{-1}x_5 & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

この $x_1, \dots, x_5$ を変数化し, $A^{(i)}, B^{(i)} : X^3 \to \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}]$ とみなす.

定理 (普遍性)

$(A^{(i)}, B^{(i)})$: type i の tribracket bracket ($i \in \{1, \dots, 5\}$).
R : 整域, $A, B : X^3 \to R$, (A, B) : tribracket bracket
$\Rightarrow \exists f : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}] \to R,\ \exists i\ s.t.\ (A, B) = (f \circ A^{(i)}, f \circ B^{(i)})$.

系

L, L' : 絡み目, $(A^{(i)}, B^{(i)})$: tribracket bracket ($i = 1, \dots, 5$).
$\forall i \in \{1, \dots, 5\},\ \Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(L')$
$\Rightarrow \forall (A, B),\ \Phi_X^{(A,B)}(L) = \Phi_X^{(A,B)}(L')$.

命題

K, K' : 結び目, $J(K)$: K の Jones 多項式.
$\forall i \in \{1, \dots, 5\}$,
$\Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(K) = \Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(K') \iff J(K) = J(K')$.

命題

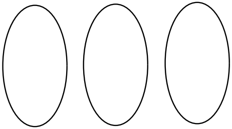
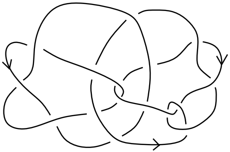
L, L' : 絡み目.

$\Phi_X^{(A^{(5)},B^{(5)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(5)},B^{(5)})}(L') \Rightarrow J(L) = J(L')$.

定理

type 5 の tribracket bracket を使った不変量は Jones 多項式より真に強い.

(証明)

$L_1 =$  $L_2 =$  に対し,

$J(L_1) = J(L_2)$ (Thistlethwaite 2001).

$\Phi_X^{(A^{(5)},B^{(5)})}(L_1) \neq \Phi_X^{(A^{(5)},B^{(5)})}(L_2)$.