結び目正則近傍のメリディアン判定問題の計算量について

西村勇哉 (広島大学大学院 先進理工系科学研究科)

結び目の数理 VI (東京女子大学)

2023 年 12 月 23 日

概要 (1/2)

- $L = K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{S}^3$: 2 成分絡み目.

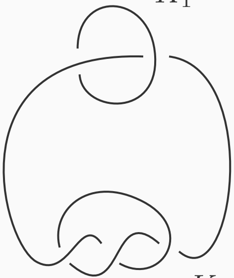
定義

K_1 が K_2 のメリディアン.
$\Longleftrightarrow$ $\exists$ 円盤 $\delta \subset \mathbb{S}^3$ s.t. $\partial\delta = K_1$ かつ $|\delta \cap K_2| = 1$.

定義 (結び目正則近傍のメリディアン判定問題)

入力 : L の図式 D.

出力 : $\begin{cases} \text{“Yes” if } K_1 \text{が } K_2 \text{のメリディアン.} \\ \text{“No” otherwise.} \end{cases}$



計算量は D の交点数 c に関する関数 $f(c)$ で測る.

概要 (2/2)

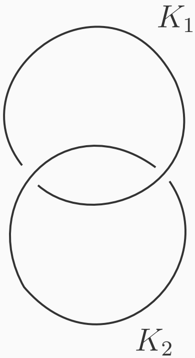
定理 (N. 2023)

Hopf link の判定問題は **NP** $\cap$ **co-NP** に属する.

石川昌治先生 (慶應義塾大学) からの質問.
$\rightarrow$ 結び目正則近傍のメリディアン判定問題は
NP に属するか？

定理

結び目正則近傍のメリディアン判定問題は **NP** に属する.



目次

NP 問題の定義

- A : 判定問題.
- $A(s)$: 入力 s に対する A の出力.

定義

$A \in$ **NP**.

$\iff$ $\exists$ 多項式時間 Turing 機械 M s.t. $\forall$ 入力 s,

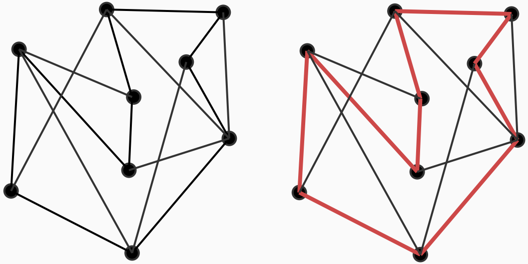
$A(s) =$ "Yes" $\iff$ $\exists$ 多項式長の文字列 w_s s.t. $M(s, w_s) =$ "Yes" .

この文字列 w_s を入力 s に対する証拠と呼ぶ.

NP 問題の例 (1/2)

定義 (ハミルトン閉路問題)

- 入力 : グラフ G.
- 出力 : 全ての頂点をちょうど一回ずつ通る閉路は存在するか？



証拠 $w =$ 全ての頂点を一回ずつ通る閉路 (を適切に符号化した文字列).

NP 問題の例 (2/2)

定義 (結び目の自明性判定問題)

- 入力：結び目 $K \subset \mathbb{S}^3$ の図式 D.
- 出力：K は自明結び目か？

定理 (Hass–Lagarias–Pippenger 1999)

結び目の自明性判定問題は NP に属する.

証拠 $w =$ 外部空間 $E(K)$ に適切に埋め込まれた本質的円盤 D
(を適切に符号化した文字列).

K_1 がメリディアンになるための必要十分条件 (1/2)

- $L = K_1 \cup K_2$: 2 成分絡み目.

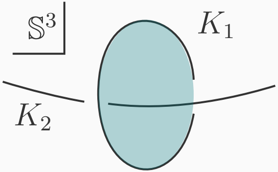
補題

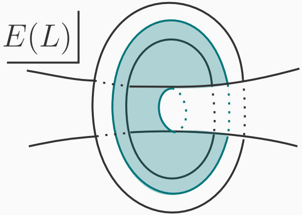
K_1 が K_2 のメリディアン.

- K_1 が自明結び目,

$\Longleftrightarrow$
- 各成分に向きをつけたとき $|\mathrm{lk}(L)| = 1$ ($\mathrm{lk}(L)$: L の絡み数), かつ
- $\exists$ 本質的アニュラス $A \subset E(L)$
  s.t. $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$)

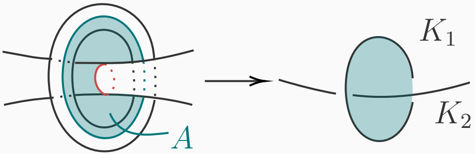




K_1 がメリディアンになるための必要十分条件 (2/2)

$\Leftarrow$)

1. $A \cap \partial N(K_2)$ が $N(K_2)$ のメリディアンのとき.



2. $A \cap \partial N(K_2)$ が $N(K_2)$ のメリディアンではないとき.

- K_1 : 自明結び目,
- $|\mathrm{lk}(L)| = 1$, かつ
- $\exists$ 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ s.t.
  - $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$
  - $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$
  - $A \cap \partial N(K_2)$ は $N(K_2)$ のメリディアンではない.

$\Rightarrow L$: Hopf link.

メリディアン判定問題の証拠

K_1 が K_2 のメリディアンであることを確かめるには

- K_1 が自明結び目,
- $|\mathrm{lk}(L)| = 1$, かつ
- $\exists$ 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ s.t. $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$

を確かめれば良い.

メリディアン判定問題の証拠

K_1 が K_2 のメリディアンであることを確かめるには

- K_1 が自明結び目,
  - 結び目の自明性判定問題 $\in$ **NP**.
- $|\mathrm{lk}(L)| = 1$, かつ
  - $\exists$ 多項式時間アルゴリズム.
- $\exists$ 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ s.t. $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$

を確かめれば良い.

アニュラス A を図式 D の交点数 c に対して多項式長で符号化できるか？

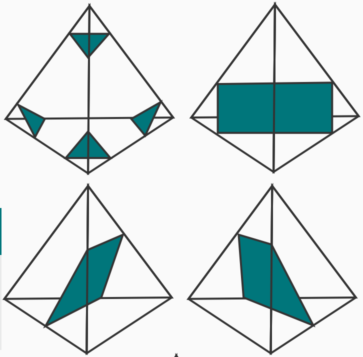
目次

Normal surface

- M : 3 次元多様体.
- $\mathcal{T}$: M の単体分割 (四面体数 $= n$).
- $S \subset M$: 適切に埋め込まれた曲面.

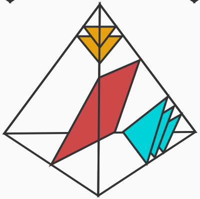
定義

S が $\mathcal{T}$ に関する normal surface.
$\iff$ $\forall$ 四面体 Δ, $S \cap \Delta$ は normal disk の非交和.



Normal surface S のベクトル表現

$$\boldsymbol{x}(S) = (\ldots, 2, 0, 0, 3, 1, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}^{7n}.$$



Vertex surface

- $S_1 + S_2 := \boldsymbol{x}(S_1) + \boldsymbol{x}(S_2)$ が表す normal surface.
- $mS := \sum_{i=1}^{m} S \ (m \in \mathbb{N})$.

Vertex surface : ある条件を満たす連結な 2-sided normal surface.

- $\forall$ normal surface S,

  $\exists$ vertex surfaces $V_1, \ldots, V_k$, $\exists m \in \mathbb{N} - \{0\}$ s.t. $mS = V_1 + \cdots + V_k$.

定理 (Hass–Lagarias–Pippenger 1999)

- $\mathcal{T}$: 3 次元多様体 M の単体分割 (四面体数 $= n$).
- $V \subset M$: $\mathcal{T}$ に関する vertex surface s.t. $\boldsymbol{x}(V) = (x_1, \ldots, x_{7n})$.

$\Rightarrow \forall i,\ x_i \leq 2^{7n-1}$.

$\rightarrow$ Vertex surface は四面体数に対して多項式長で符号化可能.

絡み目外部空間の単体分割

定理 (Hass–Lagarias–Pippenger 1999)

次の条件を満たす多項式時間アルゴリズムが存在する.

- 入力 : 絡み目 L の c 交点の図式 D.
- 出力 : $E(L)$ の単体分割 $\mathcal{T}$.

また, $\mathcal{T}$ の四面体数は高々 $\mathcal{O}(c)$ 個.

- 上記のアルゴリズムで得られる絡み目外部空間の単体分割 $\mathcal{T}$ に関する vertex surface は, 図式の交点数 c に関して多項式長で符号化可能.

Normal surface の和の性質

補題 (Jaco–Tollefson 1995)

- M : 既約かつ境界既約な 3 次元多様体.
- $\mathcal{T}$: M の単体分割.
- $S \subset M$: $\mathcal{T}$ に関する normal surface

$$\text{s.t.} \begin{cases} S \not\cong D^2, \mathbb{S}^2, \\ S : 2\text{-sided, 圧縮不可能, 境界圧縮不可能, least weight, かつ} \\ \exists m \in \mathbb{N} - \{0\},\ \exists \text{ normal surfaces } S_1, S_2 \text{ s.t. } mS = S_1 + S_2. \end{cases}$$

このとき,

- S_1, S_2 も圧縮不可能かつ境界圧縮不可能.
- $S_1, S_2 \not\cong D^2, \mathbb{S}^2$.

絡み目外部空間の vertex surface

補題

- $L = K_1 \cup K_2$: 2 成分絡み目 s.t. K_1 は K_2 のメリディアン.
- $\mathcal{T}$: $E(L)$ の単体分割.

このとき, $\exists$ vertex surface $V \subset E(L)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V : \text{本質的アニュラス}, \\ V \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset \text{ かつ } V \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset. \end{cases}$$

(証明)

$$A \subset E(L) \text{ s.t. } \begin{cases} A : \text{本質的アニュラス}, \\ A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset \text{ かつ } A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset. \end{cases}$$

$\rightarrow$ A を $\mathcal{T}$ に関して normal に取り直せる.

絡み目外部空間の vertex surface

A を least wight に取り直す.

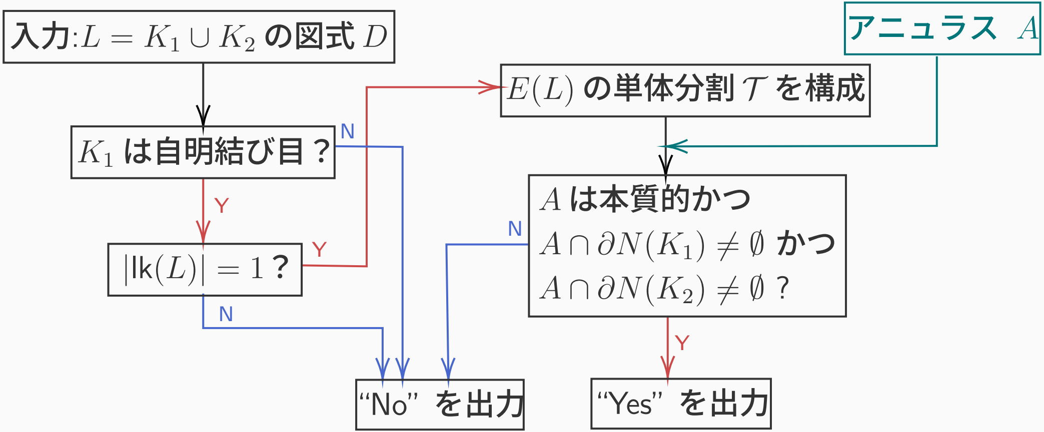
- $\exists m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\exists$ vertex surfaces $V_1, \ldots, V_k$ s.t. $mA = V_1 + \cdots + V_k$.
  $\to \forall i$, V_i は圧縮不可能, 境界圧縮不可能かつ $V_i \not\cong D^2, \mathbb{S}^2$.
  $\to \forall i$, $\chi(V_i) \leq 0$.
- $0 = \chi(mA) = \chi(V_1 + \cdots + V_k) = \chi(V_1) + \cdots + \chi(V_k)$.
  $\to \forall i$, $\chi(V_i) = 0$.
  $\to \forall i$, V_i はアニュラスかトーラス.
- $\begin{cases} F \subset E(L) : \text{アニュラス}, \\ \partial F \subset \partial N(K_1). \end{cases} \Rightarrow F$: 境界圧縮可能.
  $\to \exists V_i$ s.t. $\begin{cases} V_i : \text{アニュラス}, \\ A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset \text{ かつ } A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset. \end{cases}$

目次

主定理の証明

定理 (再掲)

結び目正則近傍のメリディアン判定問題は NP に属する.



まとめ

定理

結び目正則近傍のメリディアン判定問題は NP に属する.

課題

- 結び目正則近傍のメリディアン判定問題は co-NP 問題か？
- K_1 が K_2 のケーブル結び目か判定する問題は NP (co-NP) 問題か？