12月25日

結び目の連結和公式の組み合わせ的な証明について

久保田　肇

1　概要

本講演の目的は、以下の定理に対し、grid homology を用いた純粋に組み合わせ的な証明を与えることである。

Theorem. 結び目 $K_1,\ K_2 \in S^3$ に対し、以下の同型が成り立つ。

$$\widehat{HFK}(K_1 \# K_2) \cong \widehat{HFK}(K_1) \otimes \widehat{HFK}(K_2).$$

ただし、$\widehat{HFK}(K)$ は結び目 K の hat version の knot Floer homology のこと。

特に結び目の grid homology の枠組み内で、鎖複体の間の quasi-isomorphism を構成する。

目次

2　grid homologyとknot Floer homology

・knot Floer homologyとは、3次元多様体の不変量から定義される結び目の強力な不変量である。結び目Kのknot Floer homology $\widehat{HFK}(K)$とは、有限次元bigraded $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間に値をもつKの不変量である。

$$\widehat{HFK}(K) = \bigoplus_{d,s\in\mathbb{Z}} \widehat{HFK}(K)_{d,s}.$$

・grid homologyとは、knot Floer homologyと同型なホモロジーをもつ鎖複体を、純粋に組み合わせ的に構成する理論である。結び目Kのgrid homology $\widehat{GH}(K)$とは、有限次元bigraded $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間に値をもつKの不変量である。

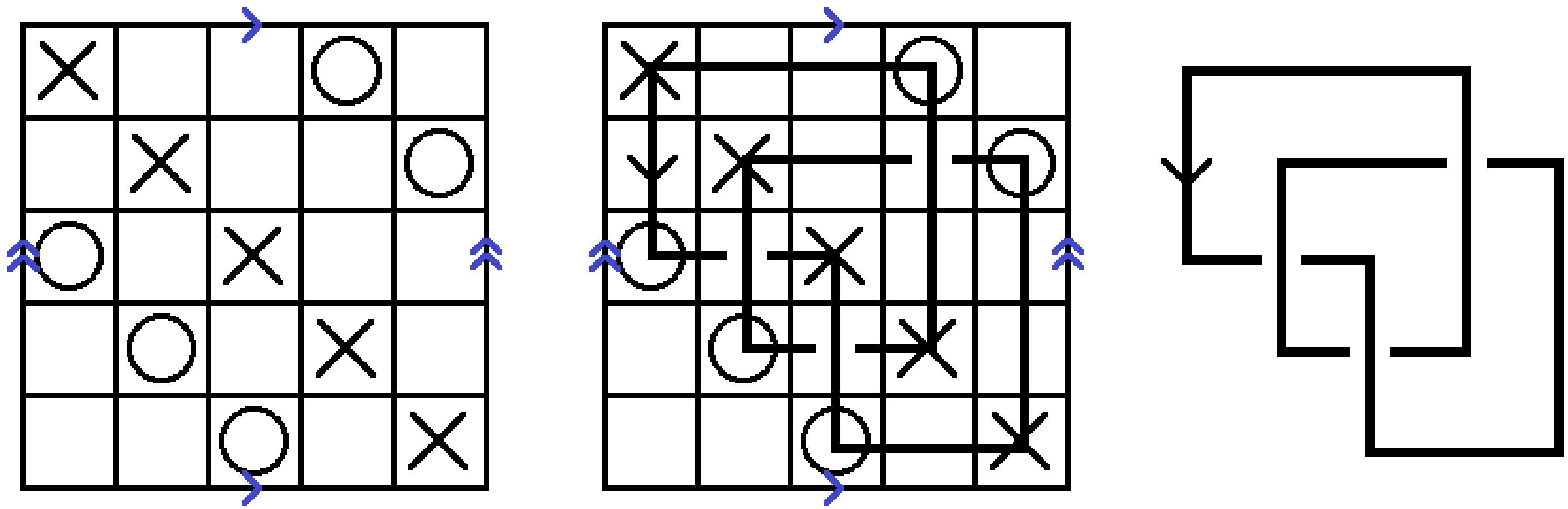
$$\widehat{GH}(K) = \bigoplus_{d,s\in\mathbb{Z}} \widehat{GH}(K)_{d,s}, \quad \widehat{GH}(K) \cong \widehat{HFK}(K).$$

問い1. knot Floer homoogyで知られている結果を、grid homologyの枠組み内で示せるか？

問い2. grid homologyを用いて、knot Floer homologyの不変量を新しく作れるか？

3　grid diagram

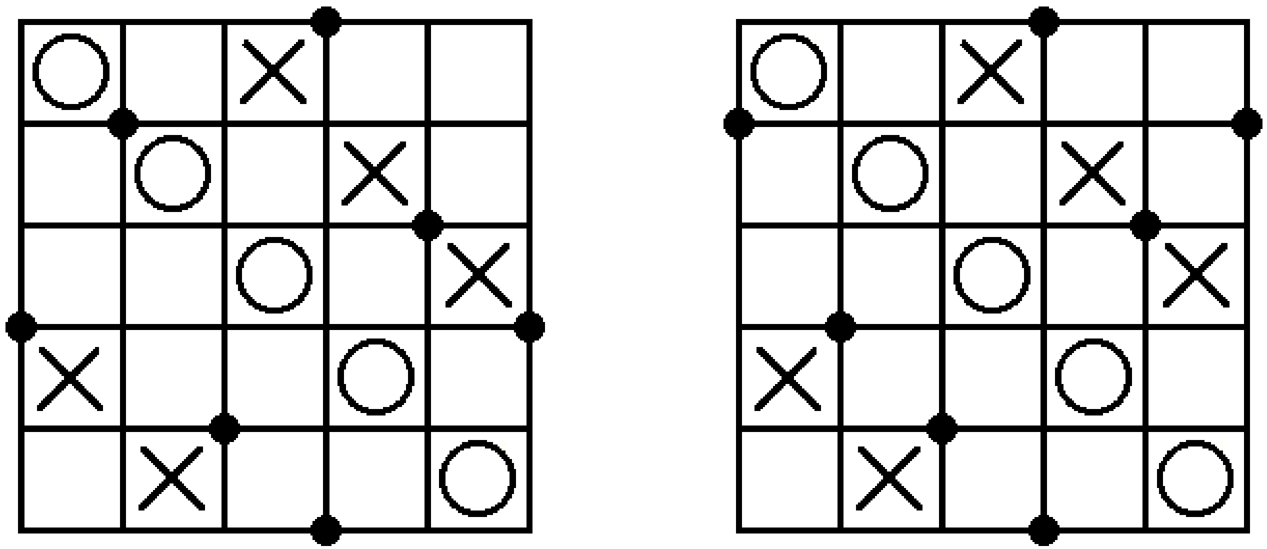
Definition. grid diagram gとは、トーラス上の$n \times n$のマス目で、マスの中にO、Xマークを以下を満たすように配置したものをいう。
- 各行、各列にちょうど1つずつOマークとXマークがある。
- 1つのマスにOマークとXマークを同時に入れない。



Fact. 任意のknotはgrid diagramで表される。

4 state

Definition. ・g のstateとはマスを分ける縦と横の直線の交点 n 個の組で、どの 2 点も縦、横に並ばないもの。
・g のstate全体を $\mathbf{S}(g)$ と書く。 $|\mathbf{S}(g)| = n!$

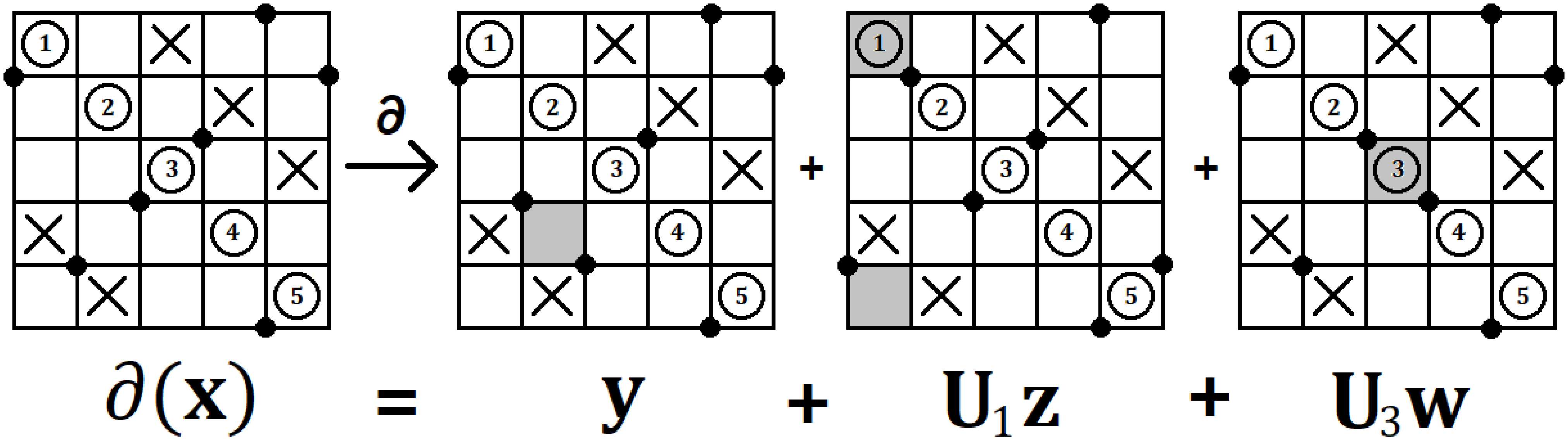


$\mathbf{x}$ $\mathbf{y}$

5　鎖複体$\widehat{GC}(g)$の定義

Definition. gのOマークを$O_1,\ldots,O_n$と番号付ける。$\widehat{GC}(g)$を、
$\{U_1^{k_1}\cdots U_{n-1}^{k_{n-1}}\cdot\mathbf{x}|k_1,\ldots,k_{n-1}\geqq 0,\mathbf{x}\in\mathbf{S}(g)\}$を基底とする$\mathbb{F}$ベクトル空間とする。

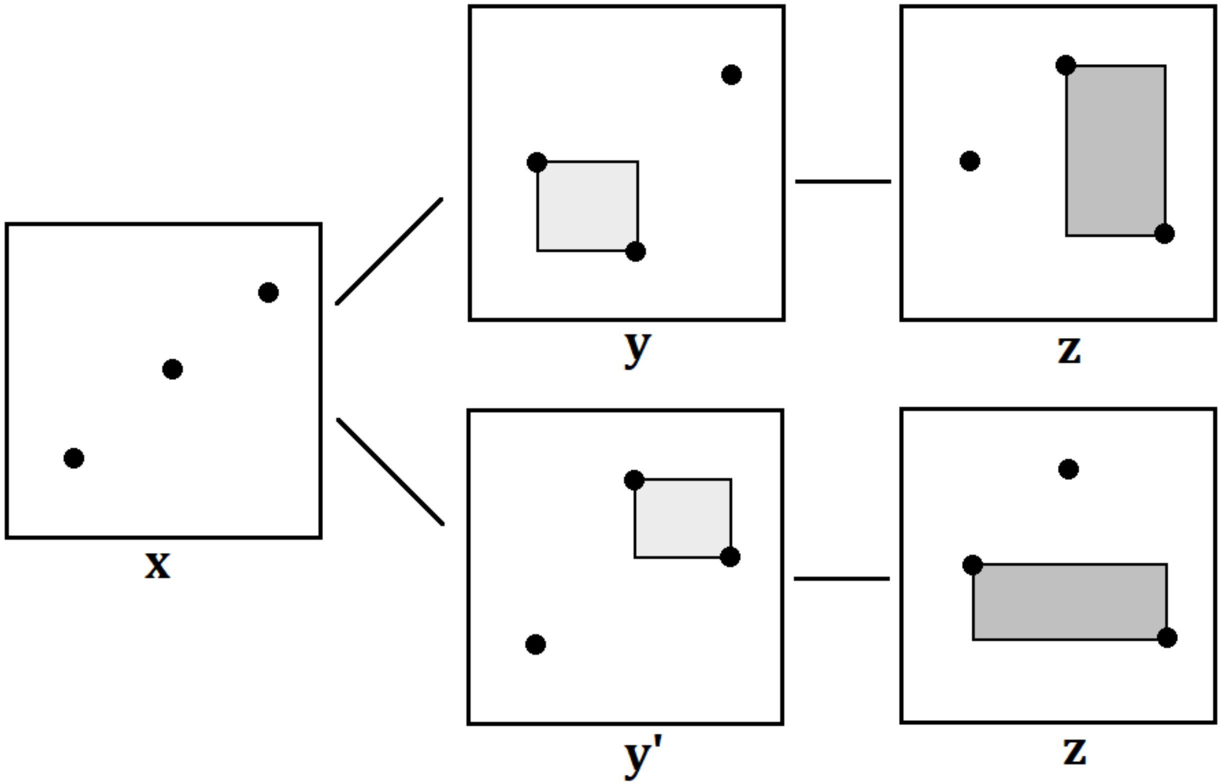
Definition. $\partial\colon\widehat{GC}(g)\to\widehat{GC}(g)$を、以下のよう画像のように、
"XマークとO_nマークを含まない長方形を数える"
ことで定義する。



6 $\partial \circ \partial = 0$の証明

Proposition. $\partial \circ \partial = 0$が成り立つ。

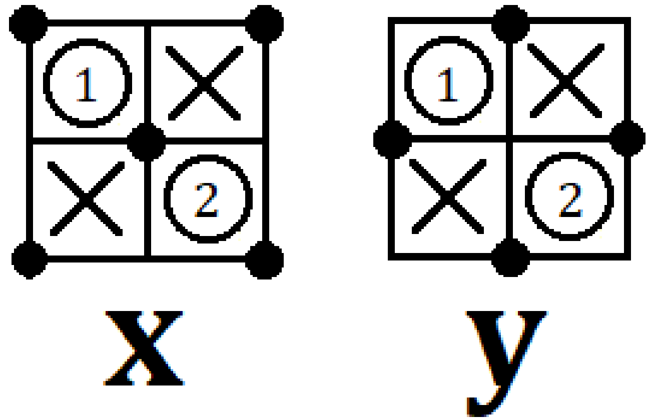
Proof. $\partial \circ \partial(\mathbf{x})$において、2回の$\partial$で現れる長方形の順番が2通りある。$\mathbb{F}_2$係数を考えているので、これは消える。



$\square$

7　計算例

g：自明な結び目を表す2×2のgrid diagram。
$\widehat{GC}(g)$の基底は$\{U_1^k \mathbf{x}, U_1^k \mathbf{y} | k \geqq 0\}$。微分の様子は以下の通り。



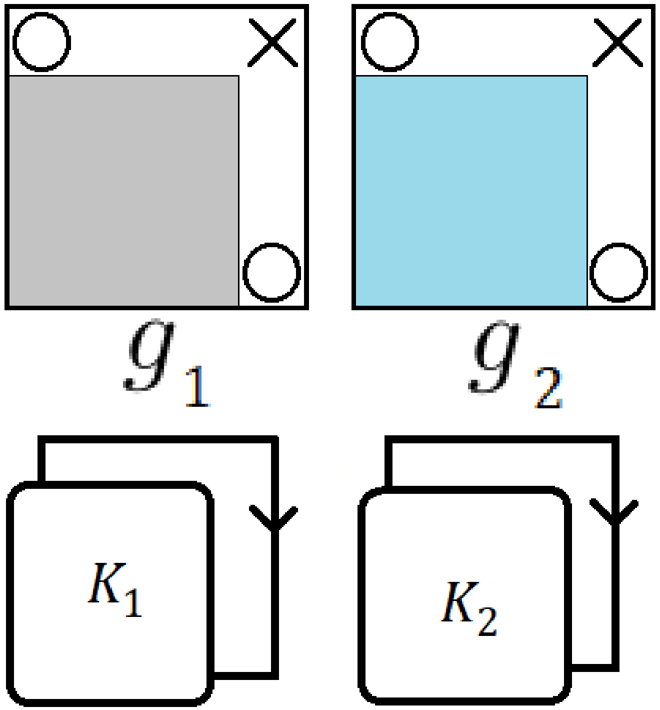
$$\partial(\mathbf{x}) = 0, \quad \partial(\mathbf{y}) = U_1 \mathbf{x}$$
$$\partial(U_1\mathbf{x}) = 0, \quad \partial(U_1\mathbf{y}) = U_1^2 \mathbf{x}$$
$$\partial(U_1^2\mathbf{x}) = 0, \quad \partial(U_1^2\mathbf{y}) = U_1^3 \mathbf{x}$$
$$\vdots$$

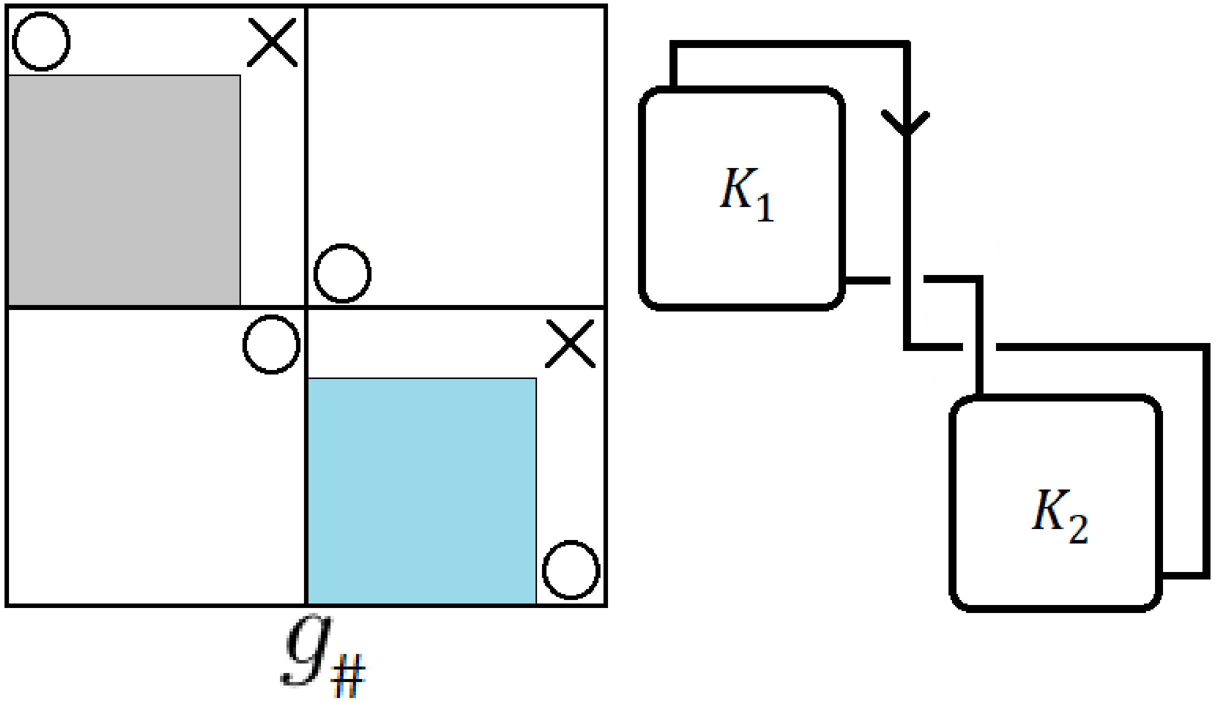
より、$\widehat{GH} = \mathbb{F}$。

8　主定理の主張

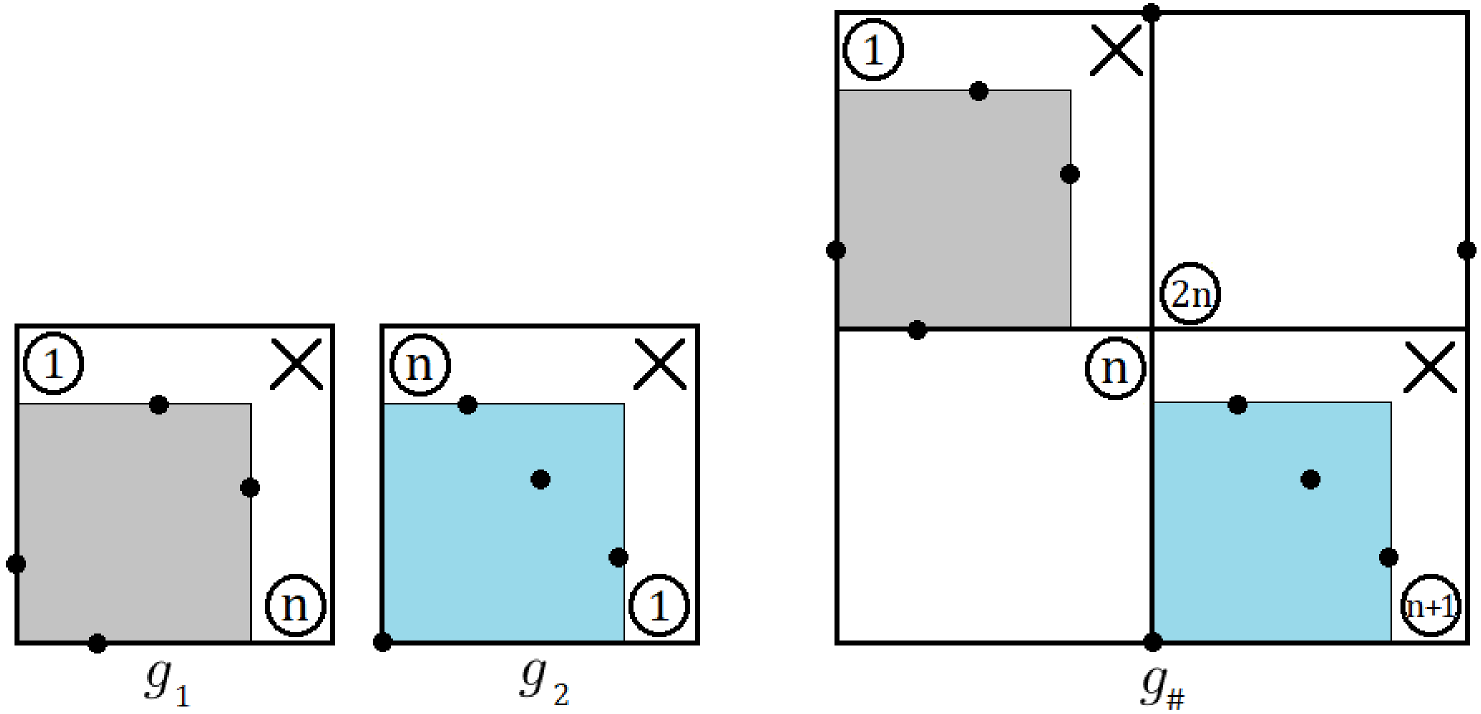
Theorem. 結び目 K_1, K_2 に対し、$K_1, K_2, K_1\#K_2$ を表す grid diagram $g_1, g_2, g_\#$ で、次の quasi-isomorphism f が存在するものが存在する。

$$f\colon \widehat{GC}(g_1) \otimes \widehat{GC}(g_2) \to \widehat{GC}(g_\#)$$





9 $f : \widehat{GC}(g_1) \otimes \widehat{GC}(g_2) \to \widehat{GC}(g_\#)$ の構成



$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 & \mapsto & \mathbf{x} \\ \{U_1, \ldots, U_{n-1}\} & \mapsto & \{W_1, \ldots, W_{n-1}\} \\ \{V_1, \ldots, V_{n-1}\} & \mapsto & \{W_{n+1}, \ldots, W_{2n-1}\} \end{array}$$

$\widehat{GC}(g_1)$, $\widehat{GC}(g_2)$, $\widehat{GC}(g_\#)$ の基底をそれぞれ

$$\{U_1^{k_1} \cdots U_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \mathbf{x}_1\},\ \{V_1^{l_1} \cdots V_{n-1}^{l_{n-1}} \cdot \mathbf{x}_2\},\ \{W_1^{m_1} \cdots W_{2n-1}^{m_{2n-1}} \cdot \mathbf{x}\}$$

と思い、f を上図の対応で定義する。これは鎖写像である。

例：$U_1\mathbf{x}_1 \otimes V_2V_{n-2}\mathbf{x}_2 \mapsto W_1W_{n+2}W_{2n-2}\mathbf{x}$

10　証明の概要1　$C=\widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im}f$ の観察

Fact. $C=\widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im}f$ において、$i\neq n$ ならば $W_i\simeq 0$ である。

Lemma. $W_i\simeq 0$ なとき、$H(C/W_i=0)\cong H(C)\oplus H(C)$

証明) 短系列 $0\longrightarrow C\xrightarrow{W_i} C\longrightarrow \frac{C}{W_i=0}\longrightarrow 0$ から得られるホモロジーの長系列より。□

Lemma を繰り返し用いることで、

$$H\left(\frac{C}{(W_n\text{以外の変数})=0}\right)\cong\bigoplus_{2^{2n-2}}H(C)$$

となるから、

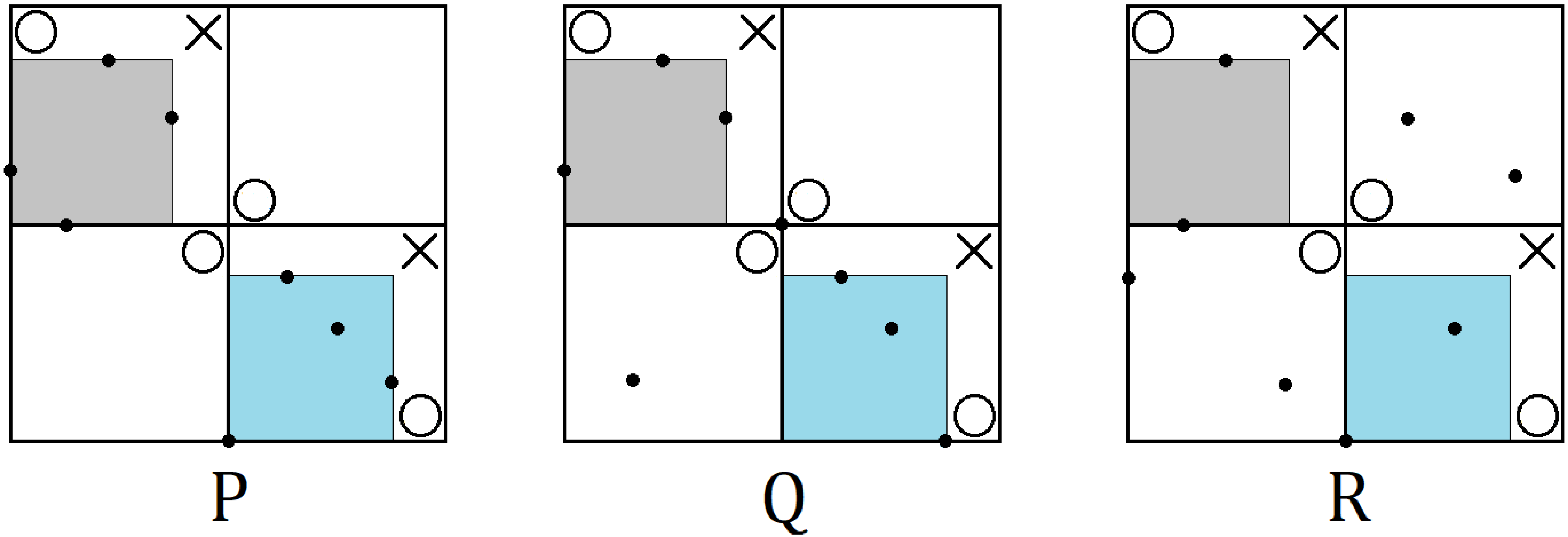
$$C\text{ が acyclic}\iff C/(W_n\text{以外の変数})=0\text{ が acyclic}$$

である。

以後、$C/(W_n\text{以外の変数})=0$ が acyclic であることを示す。

11　証明の概要2　$C = \widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im} f$ のstateの分類

図のようにstateを3種類に分類する。$\mathbf{S}(g) = \mathbf{P}(g) \sqcup \mathbf{Q}(g) \sqcup \mathbf{R}(g)$。
これらのspanをそれぞれP, Q, Rとする。



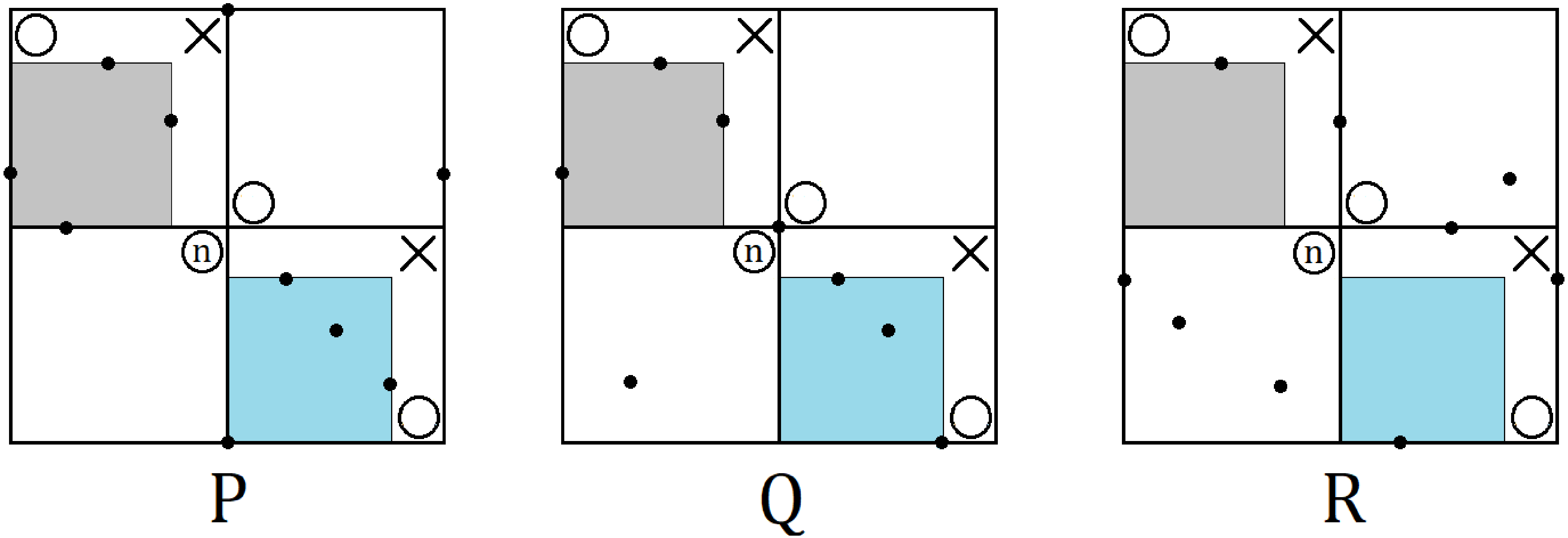
$\mathrm{Im} f$ ではW_n^0のpartしか出てこなかったことを踏まえると、

$$\begin{aligned} C/(W_n\text{以外の変数}=0) \cong & \qquad\qquad Q \oplus \quad R \\ & \oplus W_n P \oplus W_n Q \oplus W_n R \\ & \oplus W_n^2 P \oplus W_n^2 Q \oplus W_n^2 R \\ & \oplus \ldots \end{aligned}$$

各stateの∂による行先を考えると、$C/(W_n 以外の変数) = 0$において(ベクトル空間として)

$$
\begin{aligned}
\partial(P) &\in P, \\
\partial(Q) &\in W_n P \oplus Q, \\
\partial(R) &\in W_n P \oplus R \oplus W_n R.
\end{aligned}
$$

が成り立つ。



12 $C/(W_n\text{以外の変数})=0$の観察

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl] & R \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
W_nP & W_nQ \arrow[dl] & W_nR \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
W_n^2P & W_n^2Q \arrow[dl] & W_n^2R \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

1. $Q \to W_nP$の無限個のコピーがsubcpxとしてとれ、これらはacyclicである。
2. cpxを1.のsubcpxで割るとRの無限個のコピーがのこり、これもacyclicである。

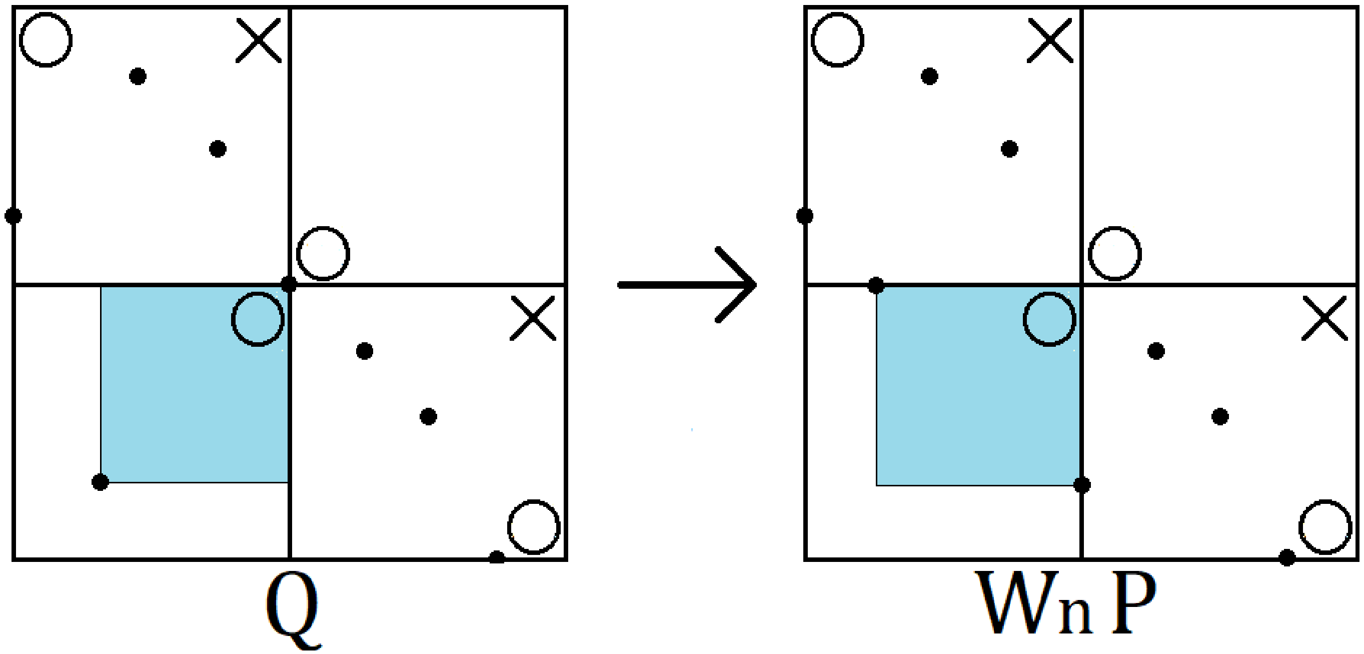
13　$C/(W_n$以外の変数$) = 0$の観察

$$
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl] & R \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
W_nP & W_nQ \arrow[dl] & W_nR \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
W_n^2P & W_n^2Q \arrow[dl] & W_n^2R \arrow[l] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

1. $Q \to W_nP$の無限個のコピーがsubcpxとしてとれ、これらはacyclicである。
2. cpxを1.のsubcpxで割るとRの無限個のコピーがのこり、これもacyclicである。

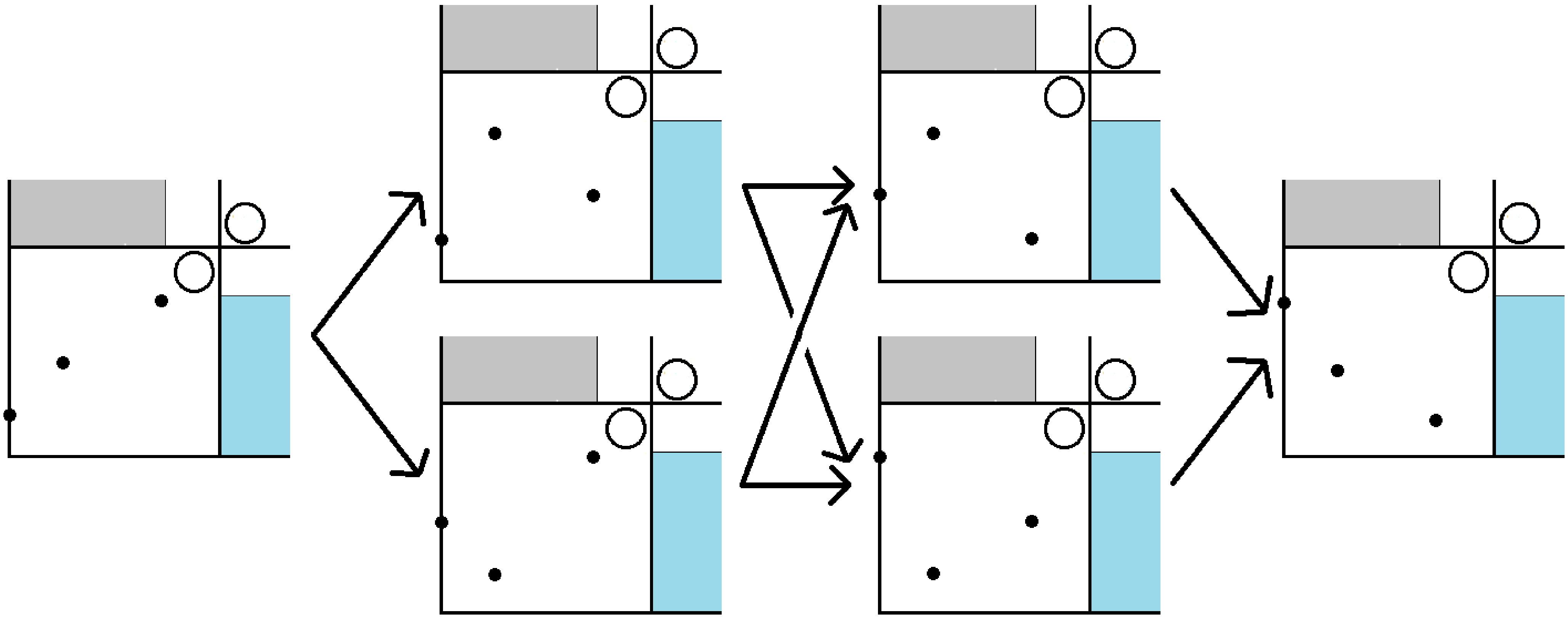
14 $Q \to W_n P$がacyclicなこと

Qと$W_n P$の同型を与えているから、$Q \to W_n P$はacyclicである。



15　R がacyclicなこと　アイデア

左下に2個以上点があることを利用して示す。



微分のうち左下にある点どうしを入れ替えるような部分に注目すると、acyclicなpartが見つかる。

→ R はacyclic。

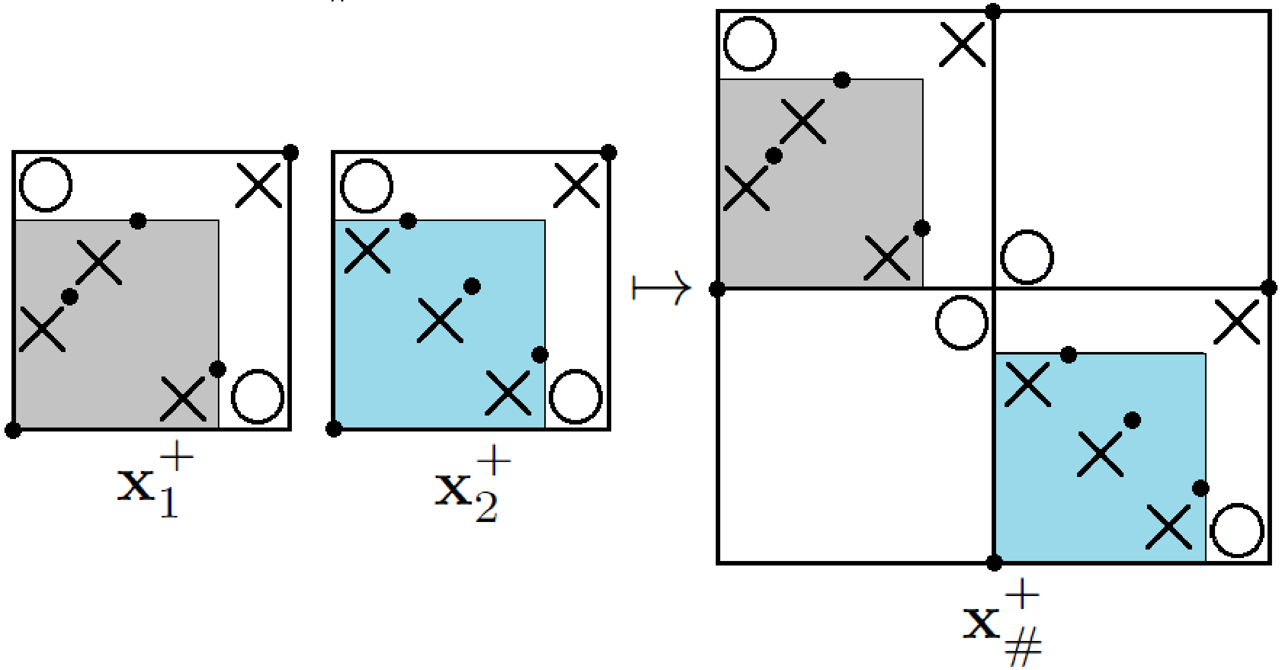
16　おまけ

g のstate $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \in \mathbf{S}(g)$ を、以下で定める。

- $\mathbf{x}^+$:X マークのあるマスの右上の角の点からなるstate、
- $\mathbf{x}^-$:X マークのあるマスの左下の角の点からなるstate。

Theorem. g をLegendrian knot $\mathcal{K}$ を表すgrid diagramとする。このときホモロジー類 $[\mathbf{x}^+], [\mathbf{x}^-] \in \widehat{GH}(g)$ はLegendrian knotの不変量である。それぞれ $\lambda^\pm(\mathcal{K})$ と書く。

f の構成から $f(\mathbf{x}_1^\pm \otimes \mathbf{x}_2^\pm) = \mathbf{x}_\#^\pm$ であるから、次が直ちに得られる。



Theorem. $H(f)$ は $\lambda^\pm(\mathcal{K}_1) \otimes \lambda^\pm(\mathcal{K}_2)$ を $\lambda^\pm(\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2)$ に移す。