有限群由来の generalized Alexander quandle について

小坂 迅

大阪大学大学院理学研究科

December 23, 2023

Today's contents

Quandle

Definition (Joyce 1982, Matveev 1982)

空でない集合 Q. 二項演算 $* : Q \times Q \to Q$.

$(Q, *)$: ***quandle*** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 公理を満たす :

(Q1) $x * x = x$. $\quad ({}^\forall x \in Q)$

(Q2) $S_x : Q \to Q, \quad S_x(y) = y * x$ は全単射. $\quad ({}^\forall x \in Q)$

(Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$. $\quad ({}^\forall x, {}^\forall y, {}^\forall z \in Q)$

Note

- S_x を x における ***point symmetry*** とよぶ.
- S_x は *quandle automorphism* である.
- 写像 $S : Q \to \mathfrak{S}_Q$ を $S(x) = S_x$ で定める.

Generalized Alexander quandle

Definition (generalized Alexander quandle)

G : *group*. $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$.
$x * y := y\,\psi(y^{-1}\,x)$.

$Q(G, \psi) := (G, *)$: ***generalized Alexander quandle***.

(G が可換群の場合 $Q(G, \psi)$ は *Alexander quandle* である．)

Terminology and notation

Q, Q' : quandle.

Definition (quandle isomorphism)

$f : Q \to Q'$ は ***quandle isomorphism*** である.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x * y) = f(x) * f(y)$ $({}^\forall x, {}^\forall y \in Q)$ かつ f は全単射.

Definition (inner automorphism group, 連結成分)

$\mathrm{Inn}(Q) := < S_x \mid x \in Q >_{\mathfrak{S}_Q}$: Q の ***inner automorphism group***.

$\mathit{Inn}(Q) \curvearrowright Q$.

$P_x := \mathit{Inn}Q \cdot x$: x **の連結成分**. $(x \in Q)$

Fact

P_x は Q の *subquandle* である. $({}^\forall x \in Q)$

$Q := Q(G, \psi)$: generalized Alexander quandle. $e \in G$.

Definition (P, P^2)

$P = P(Q) := P_e$: $Q(G, \psi)$ に関する e の連結成分.

$P^2 = P^2(Q) := (P_e)_e$: $Q(P, \psi|_P)$ に関する e の連結成分.

Fact

- P は G の正規部分群である.
- $\psi|_{P(\,:P \to P\,)} \in \mathrm{Aut}(P)$.

Today's contents

Previous works

$G, \ G'$: groups. $\psi \in \mathrm{Aut}(G), \ \psi' \in \mathrm{Aut}(G')$. $e \in G, \ e' \in G'$.

$Q = Q(G, \psi), \ Q' = Q(G', \psi')$.

Fact

$Q \cong Q' \Rightarrow {}^{\exists} f : Q \to Q'$: *quandle isomorphism* s.t. $f(e) = e'$

Theorem (Higashitani-Kurihara, Theorem 3.10 arXiv:2210.16763v1)

$Q \cong Q'$ を仮定する.
$f : Q \to Q'$: *quandle isomorphism with* $f(e) = e'$ とする.
この時以下が成り立つ ：

(i) $f \circ \psi = \psi' \circ f$.

(ii) $f|_P : P \to P'$ は *group isomorphism.*

(iii) $f|_P : Q(P, \psi|_P) \to Q(P', \psi'|_{P'})$ は *quandle isomorphism.*

(iv) $f(xP) = f(x)P'$. $({}^{\forall} x \in G)$

G, G' : finite groups. $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\psi' \in \mathrm{Aut}(G')$.
$Q = Q(G, \psi)$, $Q' = Q(G', \psi')$. $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$.

Theorem (H-K, Theorem 1.4 arXiv:2210.16763v1)

Q, Q' が条件 $(P1)$, $(P2)$. を満たすと仮定する.

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

(i) $|G| = |G'|$.

(ii) $|\mathrm{Fix}(\psi, G)| = |\mathrm{Fix}(\psi', G')|$.

(iii) $^{\exists}h : P \to P'$: *group isomorphism* s.t.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

(B) $^{\forall}a \in G$, $^{\exists}a' \in G'$ s.t. $h(e * a) = e' * a'$.

(P1) $P^2(Q)$ は G の正規部分群である.

(P2) $P^2(Q) = \{ S_x(e) \mid x \in P(Q) \}$.

Today's contents

Main results

$G,\ G'$: finite groups. $\psi \in \mathrm{Aut}(G),\ \ \psi' \in \mathrm{Aut}(G')$.
$Q = Q(G,\psi),\ \ Q' = Q(G',\psi').\ \ P = P(Q),\ P' = P(Q')$.

Theorem (Main Theorem)

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす :

${}^{\exists}h : P \to P'$: *group isomorphism* s.t.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

(B) ${}^{\exists}A$ (*resp.* ${}^{\exists}A'$) : G/P (*resp.* G'/P') の完全代表系.

${}^{\exists}k : A \to A'$: *mapping* s.t. $h(e * a) = e' * k(a)$. $({}^{\forall}a \in A)$

Theorem (H-K, Theorem 1.4 arXiv:2210.16763v1)

$Q(G,\psi)$, $Q(G',\psi')$ が条件 $(P1)$, $(P2)$ をみたすと仮定する.

$Q(G,\psi) \cong Q(G',\psi') \iff$ 以下の条件を満たす：

(i) $|G| = |G'|$

(ii) $|\mathrm{Fix}(\psi, G)| = |\mathrm{Fix}(\psi', G')|$

(iii) ${}^{\exists}h : P \to P'$: *group isomorphism* s.t.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$

(B) ${}^{\forall}a \in G$, ${}^{\exists}a' \in G'$ s.t. $h(e * a) = e' * a'$

Theorem (Main Theorem)

$Q(G,\psi) \cong Q(G',\psi') \iff$ 以下の条件を満たす：

${}^{\exists}h : P \to P'$: *group isomorphism* s.t.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

(B) ${}^{\exists}A$ (*resp.* ${}^{\exists}A'$) : G/P (*resp.* G'/P') の完全代表系.

${}^{\exists}k : A \to A'$: *mapping* s.t. $h(e * a) = e' * k(a)$. $({}^{\forall}a \in A)$

Theorem (Main Theorem)

$G,\ G'$: *finite groups.* $\psi \in \mathrm{Aut}(G),\ \psi' \in \mathrm{Aut}(G')$.
$Q = Q(G,\psi),\ Q' = Q(G',\psi')$. $P = P(Q),\ P' = P(Q')$.

$Q \cong Q' \iff$ 以下の条件を満たす：

${}^{\exists}h : P \to P'$: *group isomorphism* s.t.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

(B) ${}^{\exists}A$ (*resp.* ${}^{\exists}A'$) : G/P (*resp.* G'/P') の完全代表系.
${}^{\exists}k : A \to A'$: *mapping* s.t. $h(e * a) = e' * k(a)$. $({}^{\forall}a \in A)$

Summary of proof

$Q \cong Q' \implies {}^{\exists}h : P \to P'$ s.t. $(A), (B)$

generalized Alexander quandle についての性質,

([H-K], Theorem 3.10) より従う.

${}^{\exists}h : P \to P'$ s.t. $(A), (B) \implies Q \cong Q'$

$h : P \to P'$. $k : A \to A'$.

${}^{\forall}x \in G,\ x = a_x p_x$. (${}^{\exists!}a_x \in A$, ${}^{\exists!}p_x \in P$)

$f : G \to G'$ を $f(a_x p_x) = h(a_x p_x a_x^{-1})k(a_x)$ で定める.

このとき f は quandle isomorphism を構成する.

$x = a_x p_x,\ y = a_y p_y.$

$\underline{f(x * y)}$

$$
\begin{aligned}
&= f(a_y p_y \psi((a_y p_y)^{-1} a_x p_x)) \\
&= f(a_x a_x^{-1} a_y p_y \psi((a_x^{-1} a_y p_y)^{-1} p_x)) \\
&= h(a_x \cdot a_x^{-1} a_y p_y \psi((a_x^{-1} a_y p_y)^{-1} p_x) \cdot a_x^{-1}) k(a_x) \\
&\dots \\
&= {\color{blue} h(a_y p_y a_y^{-1})} h(a_y \psi(a_y^{-1})) {\color{red} h \circ \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1})} h(\psi(a_x) a_x^{-1}) k(a_x).
\end{aligned}
$$

$\underline{f(x) * f(y)}$

$$
\begin{aligned}
&= h(a_x p_x a_x^{-1}) k(a_x) * h(a_y p_y a_y^{-1}) k(a_y) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1}) k(a_y) \psi'((h(a_y p_y a_y^{-1}) k(a_y))^{-1} h(a_x p_x a_x^{-1}) k(a_x)) \\
&\dots \\
&= {\color{blue} h(a_y p_y a_y^{-1})} k(a_y) \psi'(k(a_y)^{-1}) {\color{red} h \circ \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1})} \psi'(k(a_x)).
\end{aligned}
$$

$\therefore$

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

$$\iff h(a_y\psi(a_y^{-1})) \cdots h(\psi(a_x)a_x^{-1})k(a_x) = k(a_y)\psi'(k(a_y)^{-1}) \cdots \psi'(k(a_x))$$

$$\iff h(e * a_y) \cdots h(e * a_x)^{-1} = e' * k(a_y) \cdots (e' * k(a_x))^{-1}$$

以上の計算と仮定により,
$f(a_x p_x) = h(a_x p_x a_x^{-1})k(a_x)$ により定義される f は
quandle isomorphism である.

■

Today's contents

Application (1)

位数 *16* の *generalized Alexander quandle* において,
条件 ($P1$), ($P2$) を満たさず, *[H-K]Theorem 1.4* により同型を
判別できない組が *2* 組存在する.

今回の *Main Theorem* を用いることで,
各組の *quandle* は同型であることが分かった.

Application (今後の課題)

より大きい位数における *generalized Alexander quandle* の同型類の分類.

ご清聴ありがとうございました。