「逆像のトポロジー」に関する具体的な条件を満たす滑らかな関数の構成

Naoki Kitazawa (北澤直樹)
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University (2023/6–)
/Osaka Central Advanced Mathematical Institute
n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp
naokikitazawa.formath@gmail.com

2023/12/24

補助等。

今回の内容は例えば以下より補助等受けております。

- JSPS KAKENHI Grant Number JP17H06128 "Innovative research of geometric topology and singularities of differentiable mappings" (代表者: 佐伯 修(九州大学))。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。
- JSPS KAKENHI Grant Number JP22K18267 "Visualizing twists in data through monodromy"(代表者: 佐伯 修(九州大学)).。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。
- 講演者は九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員で、詳細にはマス・フォア・イノベーション連係学府の"ヤングメンター"(https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/en/)として働いております。今回の内容は業務とも関連しております。
なお今回の発表は業務とは"公式には独立"して行われており、また JSPS KAKENHI Grant Number 21H04428 or 19K03502 より補助を受けて行われております。
- 講演者は大阪公立大学数学研究所特別研究員(MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165)でもあり、金銭的な補助等はないですが、我々の研究はこちらにも支えて頂いております。
- IMI 若手研究-短期共同研究 20200027 "高次元多様体の世界の幾何的構成的と高次元データへの応用"(代表者: 北澤 直樹)。金銭的な補助助等はないですがこちらにも関係しております。

今回の内容に関連する自身の論文・プレプリント等。

今回は主に以下の内容の解説を行います。

- N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, Topol. Methods in Nonlinear Anal. Vol. 59 No. 2B, 897–912, arXiv:1902.08841.
- N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, submitted to a refereed journal, arXiv:2108.06913.

少しばかり以下や周辺も説明予定です。

- N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces*, Methods of Functional Analysis and Topology Vol. 28 No. 2 (2022), 127–143, doi.org/10.31392/MFAT-npu26_2.2022.05, arXiv:1908.04340.
- N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs*, a positive report for publication has been announced to have been sent and this will be published in Methods of Functional Analysis and Topology, arXiv:2302.02339v3.

自己紹介他。

- 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員(詳細にはマス・フォア・イノベーション連係学府の"ヤングメンター": https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/en/)。
- 専門：可微分写像の特異点論、多様体の幾何(多様体の代数位相幾何、微分位相幾何、実代数幾何　etc.)。
  - (可微分)多様体を主に低次元空間への良い可微分写像、具体的な可微分写像、いわゆる Morse 関数の高次元にあたるものをつかって多様体を詳細にみることが研究の柱。
  - Reeb グラフ：関数の逆像の連結成分からなる空間をグラフとしてみたもの(頂点は関数の特異点を含む連結成分)。
    ⇒ 多様体をコンパクトにとらえる。

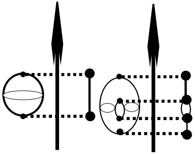

Figure: 「次元 2 以上の球面」と「2 次元のトーラス(つまり円周の直積)」の"高次元空間での自然な高さ"から定まる(滑らかな)関数と Reeb グラフ。

本日の主内容。

Problem 1 (2006 Sharko)

良い性質を有する滑らかな関数で、Reeb グラフが与えられたグラフと同型なものを作れるか? 定義域多様体は「最初から固定」しない。

⇒ 骨組み(グラフ)に対して自然なもの(多様体)を再構成してあげよう。機械学習でいうと関数の適合?
⇒ なお Reeb グラフは、可視化等でも重要なツール。

- 2006 Sharko : ある性質を満たすグラフに対し閉曲面上の滑らかな関数を与えた(局所的には多項式関数)。
- 2010 Masumoto-Saeki : 任意の有限グラフに対し Sharko の結果を拡張。
- 2018 Michalak: 適切なクラスの有限グラフに対し所謂適切な閉多様体上の Morse 関数で、一般の逆像が球面の非交和であるようなものを構成。

今回 : グラフに加え逆像のトポロジーも考慮して(球面とは限らないものを考えて)滑らかな関数を構成した話。

(滑らかな)多様体や周辺に関する基本的な記法等。

- $\mathbb{R}^k$: k 次元 Euclid 空間 ($\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$)。
  $\Rightarrow$ もっとも単純な k 次元の滑らかな多様体で標準的 Euclid 計量のはいった Riemann 多様体でもある。
- $||p||$: $p \in \mathbb{R}^k$ と原点 $0 \in \mathbb{R}^k$ の間の距離。
- S^k (D^{k+1}):=$\{p \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = (\text{resp.} \leq)1\}$: k 次元単位球面 (resp. $(k+1)$ 次元単位球体)。
- X^l : l 次元の可微分多様体(滑らかな多様体) X ("X^l" の l は次元)。

滑らかな写像と微分同相写像。

- $\pi_{k,k'} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k'}$ $(k \geq k' \geq 1)$ を $\pi_{k,k'}(x_1, x_2) := x_1$ $((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k-k'})$ で定義$(\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^{k'})$: 所謂自然な射影(S^{k-1} への制限は単位球面の射影)。
- $f : M^m \to N^n$: 滑らかな多様体間の滑らかな写像。$p \in M^m$ が f の特異点($n = 1$ のときは臨界点とも) : p で(微分 df_p の階数) $< \min\{m, n\}$。$f(p)$ を f の特異値と($n = 1$ のときは臨界値とも)よび、$S(f)$ で f の特異点全体の集合を表す。
- $f : M^m \to \mathbb{R}$ が Morse 関数 : f は滑らかで (f の)各臨界点 p で、 $x = 0 \in \mathbb{R}^m$ と同一視して適切な局所座標と適切な整数 $0 \leq i(p) \leq m$ で $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto \Sigma_{j=1}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} {x_{m-i(p)+j}}^2 + f(p)$ と表せる(臨界点は非退化)。
- 二つの滑らかな多様体が微分同相 : $\exists$ 二つの多様体の間の微分同相写像、つまり特異点をもたない同相写像。

滑らかな関数の Reeb グラフ。

$f : M \to \mathbb{R}$ について W_f : f の逆像の連結成分全体からなる空間で自然に M の商空間となる。

Theorem 1 (2020 Saeki)

M が閉多様体とする。 f の臨界値全体の集合 $f(S(f))$ が有限なら、 W_f はグラフとなる:
W_f の点 p は頂点。 $\Leftrightarrow$ p が f の臨界点を持つ連結成分。

この W_f が f の Reeb グラフ(商写像 $q_f : M \to W_f$ で表す)。
$\Rightarrow$ 概念自体は 20 世紀半ばには登場(1946 Reeb)。

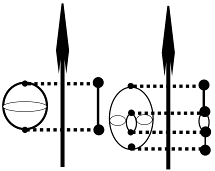

Figure: 再前の Figure の関数: $W_{\pi_{m,1}|_{S^{m-1}}}$ $(m \geq 3)$ と $S^1 \times S^1$ を自然に 3 次元空間に埋め込んだときの高さから定まる関数の Reeb グラフ(どちらも **Morse**)。

主定理 1。

Theorem 2 (2018 Michalak (F_e: 単位球面), 2021– K)

$m > 2$: 整数。　$G := (V, E)$: 有限連結グラフ。
$\exists g : G \to \mathbb{R}$: 連続 & $g|_e$ は各辺 $e \in E$ 上単射。
$\{F_e\}_{e \in E}$: 滑らかな閉多様体の族 *s.t.*

- F_e は S^{m-1} または所謂(滑らかなカテゴリーで考えた)連結和 $\sharp_{j'}(S^{i_{j'}} \times S^{m-i_{j'}-1})$ $(1 \leq i_{j'} \leq m-2)$。
- $e \in E$ が頂点 "$v \in V$ *s.t.* $g(v)$ が極値" を含む。 $\to$ $F_e = S^{m-1}$。
- $v \in V$ *s.t.* $g(v)$ が極値。 $\to$ v は指数 1。

$\to \exists$ 滑らかな連結閉多様体 M^m, $\exists$ Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ *s.t.* W_f は G と適切に同一視され逆像 ${q_f}^{-1}(p)$ $(p \in \mathrm{Int}\ e)$ は F_e に微分同相($q_f : M \to W_f$ は商写像)。

$\Rightarrow$ F_e は「**Most fundamental handlebody** といわれる滑らかな連結コンパクト多様体」の境界の連結成分になるようなもの拡張される: 3 次元向き付け可能連結閉多様体等 (2021– K)。

主定理 2。

Morse-Bott 関数: 局所的に射影と Morse 関数の合成で表せるような滑らかな関数(Morse 関数を自然に一般化)。

Theorem 3 (2019–22: K)

$G := (V, E)$: 有限連結グラフ。
$\exists g : G \to \mathbb{R}$: 連続 & $g|_e$ は各辺 $e \in E$ 上単射。
$\{F_e\}_{e \in E}$: 向き付け可能な連結閉曲面。 *s.t.*
$\to \exists$ 向き付け可能な連結閉多様体 M^3 $(m = 3)$, $\exists$ 滑らかな関数 $f : M^3 \to \mathbb{R}$ *s.t.*

1. W_f は G と適切に同一視され逆像 ${q_f}^{-1}(p)$ $(p \in \mathrm{Int}\ e)$ は F_e に微分同相($q_f : M \to W_f$ は商写像)。
2. 頂点 v *s.t.* $g(v)$ が極値でない。 $\to {q_f}^{-1}(v)$ のまわりでは Morse 関数。
3. 頂点 v *s.t.* $g(v)$ が極値。 $\to {q_f}^{-1}(v)$ のまわりでは高々有限個の点をのぞき Morse 関数 or Morse でない Morse-Bott 関数。

証明(において重要な局所的な関数の構成)その 1。

局所的に関数を構成、そして貼り合わせることがポイント。

臨界点の周りで Morse の場合。

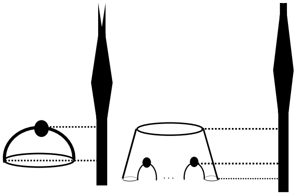

Figure: 極値の周り(球体の自然な高さ)と Theorem 2–3 で極値ではなくまわりの特異点を含まない逆像が球面の場合。

Morse 関数の臨界点と多様体の”ハンドル”**(**球体の直積とみなせるもの**)**の対応
をうまく具体的に適用することがポイントと見抜いて適用した。

証明(において重要な局所的な関数の構成)その 2。

Morse でない極値(一番のポイント)。

- 極値を与える頂点が次数 2 以上：前の Morse 関数に $\pm x^2 + c$ 型の関数を合成(c は定数)。
- 極値を与える頂点が次数 1：局所的に平面(D^2)への "Morse 関数と区間上の恒等写像の直積で表せる" 全射を構成し、球体の "高さ" 関数を合成。

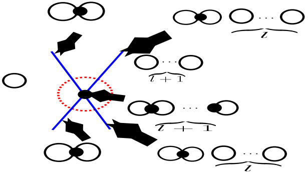

Figure: 平面への写像と逆像：1 点で交わる青い線 / 本が特異値を表し円周と黒い点(**for** 特異点)でできた図形は(指し示す)点の逆像。赤い点線の内部の円における高さ関数を合成。

$\rightarrow$ 赤い点線の逆像が、頂点を含む辺の内部の点での逆像 F_e になる。所謂種数 $l + 1 \geq 1$ の向き付け可能閉曲面になる：$l = 0$ なら青い線等はなく円周の直積(トーラス)。

関連研究 (1)–他の具体的・一般的状況を考える。

Problem 2

より広いクラス等で滑らかな多様体滑らかな関数を考えると?

- 逆像 F_e を一般の閉多様体にする：解析的でない関数を局所的に構成し貼り合わせる(2022 Saeki)。
- F_e を S^{m-1} or $\mathbb{R}^{m-1}$ にして境界のないコンパクトとは限らない多様体上の、Theorem 3 に似たような特異点をもつ関数を構成：$g(v)$ が極値のとき "Morse-Bott 関数" と "Morse 関数" の "合成" が出てきうる等する(2019–22 K)。

関連研究 (1) –結果の一例。

Theorem 4 (2019–22: K)

$m > 1$: 整数。 $G := (V, E)$: 有限連結グラフ。
$\exists g : G \to \mathbb{R}$: 連続 & $g|_e$ は各辺 $e \in E$ 上単射。
$\{F_e\}_{e \in E}$: E で添え字づけられた *0 or 1* からなる数列。
$\to \exists$ 境界なし連結多様体 M^m, $\exists$ 滑らかな関数 $f : M^m \to \mathbb{R}$ *s.t.*

1. W_f は G と適切に同一視され逆像 ${q_f}^{-1}(p)$ $(p \in \mathrm{Int}\ e)$ は $F_e = 0$ のとき S^{m-1} に $F_e = 1$ のとき $\mathbb{R}^{m-1}$ に微分同相($q_f : M \to W_f$ は商写像)。
2. ${q_f}^{-1}(v)$ のまわりでは、高々有限個の点をのぞき、 Morse 関数 or Morse でない Morse-Bott 関数 or Morse-Bott 関数と $\pm x^2 + c$ 型表示を持つ関数の合成。

関連研究 (1) –Theorem 4 証明のごく一部について。

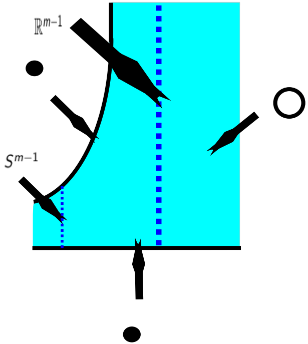

Figure: 極値を与えない次数 2 の頂点でそれぞれの辺に "0" と "1" が対応しているケース("点"や"円"は"→が指し示す点や青い点線の逆像"を示す): これは平面への写像の像(含特異値)・逆像を示すが、水平方向に射影すると局所的な関数が得られる(左側は逆像 S^{m-1} 右側が逆像 $\mathbb{R}^{m-1}$ となる)。

⇒ 実際この局所的な関数が新たに鍵となる。

関連研究 (2)–関数のクラス(滑らかさ)を強める–。

Problem 3

"実代数的" 等厳しいケースを考えると。

非常に学際的な問題。

Theorem 5 (K 2023)

m を十分大きな整数とし、(例えば)連結な有限グラフ $G := (V, E)$ で以下を満たすようなものを考える。

1. 頂点の次数は 1 *or* 3。
2. $\exists g : G \to \mathbb{R}$ *s.t.*
   2.1 連続で各辺では単射 & 極値をとるような頂点で次数は 1 & 各頂点で値が異なる。
   2.2 $\exists \tilde{g} : G \to \mathbb{R}^2$ 埋め込み $s.t.$ $g = \pi_{2,1} \circ \tilde{g}$。

$\to \exists f : M^m \to \mathbb{R}$: 実代数関数でグラフ W_f と G は同型。

$\to$ 例えば各臨界点で値が異なり、臨界点を含まない逆像の連結成分が単位球面と微分同相であるような、 Morse 関数の Reeb グラフで、自然に平面へ埋め込めるもの。

関連研究 (2)–Theorem 5 に関する補足–。

非特異な実代数的超曲面：実多項式の零点集合の連結成分の非交和でありその実多項式から定まる関数がその非交和では臨界点を持たない(余次元 1 の境界のない滑らかな閉部分多様体で所謂非特異な実代数多様体)。

Definition 1

$k, l \geq 1$：整数。

Algebraic domain $R^k \subset \mathbb{R}^k$ とは有界開集合 s. t.

- 閉包 $\overline{R}$ が $\sqcup_j S_j$ に囲まれる: $\{S_j\}_{j=1}^l \subset \overline{R} - R$ は有限個の互いに交わらない $\mathbb{R}^k$ の非特異な実代数的超曲面の族。
- S_j: 実多項式 f_j の零点集合 $\{x \mid f_j(x) = 0\}$ の連結成分。
- $1 \leq \forall j \leq l$, $(\{x \in \mathbb{R}^k \mid f_j(x) = 0\} - S_j) \bigcap \overline{U_R} = \emptyset$ が $\overline{R}$ の十分小さい開近傍 U_R とその閉包 $\overline{U_R}$ について成立。

以下 $R = U_R \bigcap \bigcap_{j=1}^l \{x \mid f_j(x) > 0\}$ の成立も仮定する。

関連研究 (2)–Theorem 5 に関するさらなる補足–。

Definition 2 (2018 Sorea)

以下のようなグラフを algebraic domain $R^k \subset \mathbb{R}^k$ の Poincaré-Reeb グラフ G_R という(Definition 1 の記法等使用)。

- G_R は関数 $\pi_{k,1}|_{\overline{R}}$ の逆像の連結成分からなる $\overline{R}$ の商空間。
- G_R の頂点集合は「$\pi_{k,1}|_{\overline{R}-R}$ の臨界点」をもつような"逆像の連結成分"を示す点全体の集合。

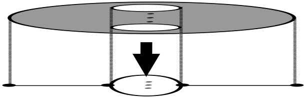

Figure: 円周で囲まれた algebraic domain $R^2 \subset \mathbb{R}^2$ の Poincaré-Reeb グラフ :"$\cdots$" は省略を意味。

Theorem 5 証明では、「適切なクラスのグラフならばそれを Poincaré-Reeb グラフとする algebraic domain R がとれるという事実(2022–3: A. Bodin, P. Popescu and M. S. Sorea)」を基本にし、閉包 $\overline{R}$ への写像を構成するのが鍵。

関連研究 (2)–Theorem 5 に関するさらなるさらなる補足–。

Definition 1 の notation 他流用すると

$M :=$ "多項式 $\prod_j f_j(x) - \Sigma_{j=1}^{m-k+1} {y_j}^2$ の零点集合" $\bigcap$
"$R^k \times \mathbb{R}^{m-k+1} \subset U_R \times \mathbb{R}^{m-k+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ に含まれる点の集合"

となる。陰関数定理を用いて $\mathbb{R}^{m+1}$ の余次元 1 の非特異な実代数的多様体であることがみられる。

- $\overline{R}$ への写像について、algebraic domain R の点での逆像は S^{m-k} に微分同相で境界では "1 点集合"。
- 射影を合成して得たい関数を得るが、前出の Figure では臨界点を含まない逆像の連結成分は S^{m-1} と微分同相。

Problem 4

Reeb グラフのみならず逆像をいろいろ考慮したものは?

詳細は省略するが現在いくつか成功(2023– K)。

関連研究 (3)–グラフと多様体の関係–。

Problem 5

グラフや逆像と多様体の関係は？

Theorem 6 (2006 Saeki)

Theorem 2 & 3 で　Morse 関数で　$F_e = S^2, S^1 \times S^1$ の場合、多様体は S^3, $S^2 \times S^1$, 所謂　Lens 空間かそれらの連結和で表せるようなものに同相。
逆にそういう多様体は *Theorem* のような Morse 関数をもつ。

⇒ 紹介してきた Reeb グラフ関係の研究と独立といえる研究。

閉曲面の場合。

- (2018 Michalak) 閉曲面の Morse 関数の Reeb グラフとその位相と次数 2 の頂点の個数の関係について考察。
- (2022– Gelbukh) 閉曲面上の Morse-Bott 関数に前述の結果・考察を拡張。

⇒ 現在 "Theorem 6 の深化" を"続き"でできないか検討中(K)。

関連研究 (4)–逆像にでる" 余次元 1 閉多様体の族" から自然に出てくる基本群の間の準同型–。

Theorem 7 (2020– Marzantowicz & Michalak)

M^m : $m > 1$ 次元連結閉多様体。
$h : \pi_1(M) \to F_r$: 階数 $r > 0$ 自由群への全射準同型。
$\to$

1. h は r 個の互いに交わらない $m-1$ 次元の管状近傍が直積であるような境界のない連結閉部分多様体($\subset M$)の列から誘導される。
2. さらにこれらの閉部分多様体の非交和をある正則値の逆像の連結成分いくつかの非交和としてもつようなMorse 関数 $f : M^m \to \mathbb{R}$ があり全射準同型 $q_{f*} : \pi_1(M) \to \pi_1(W_f)$ が得られ h はこれとある同型の合成として実現される。

$\Rightarrow$ 閉曲面の場合はより深く考察: 例えば曲面群から自由群への全射の(自然な同値類を法とした)分類に応用。

関連研究 (5)–値域を高次元化–。

Problem 6

グラフを高次元化して、これまで説明してきたような問題等を考えられるか?

- Reeb グラフの高次元版(高次元の Reeb 空間)の局所的大域的なトポロジーは、写像をそれなりに良いものに限っても複雑なことが多い。
- 研究における良いストーリーを作れるのか?
- そもそもグラフという点と線でできた単純な図形(位相的・組み合わせ的対象)を使って多様体や関数を構成するとか大域的様相をみているからこそよいストーリーができているのではないか?
- 尤も 2 次元の多面体は 3–4 次元多様体を捉える shadow の話等で出てくる(3 次元多様体から平面への generic な写像 $f : M^3 \to \mathbb{R}^2$ について 2 次元多面体となる W_f を考える話を拡張したような話を考えているものと考えられる)。

A. Bodin, P. Popescu-Pampu and M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains*, Revista Matemática Complutense, https://link.springer.com/article/10.1007/s13163-023-00469-y, 2023, arXiv:2207.06871v2.

I. Gelbukh, *Realization of a digraph as the Reeb graph of a Morse-Bott function on a given surface*, Topology and its applications, https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0166864123003383?via%3Dihub, https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108745., 2023.

I. Gelbukh, *Reeb graphs of Morse-Bott functions on a given surface*, 10.13140/RG.2.2.30725.52967/1, https://www.researchgate.net/publication/374385277_Reeb_graphs_of_Morse-Bott_functions_on_a_given_surface, 2023.

Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84.

W. Marzantowicz and L. Michalak, *Relations between Reeb graphs, systems of hypersurfaces and epimorphisms onto free groups*, preprint.

L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arXiv:1805.06727.

J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.

O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.

O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, Volume 2022, Issue 11, June 2022, 8740–8768, arXiv:2006.01689.

V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.

ありがとうございました！