Hopf 代数 $\mathbb{F}_p[X]$ に付随する 3 次元多様体の不変量

川上 竜乃進 (広島大学先進理工系科学研究科)

結び目の数理 VI (東京女子大学)

2023 年 12 月 25 日

概要

向きづけられた閉 3 次元多様体 M

↓ [Ishii 1992] [Benedetti-Petronio 1997]

閉正規 o-グラフ ―― Hopf 代数 H

↓ [Mihalache-Suzuki-Terashima 2021] テンソルネットワーク

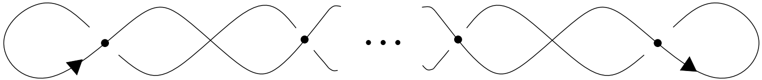
不変量 $Z(M, H)$

↓

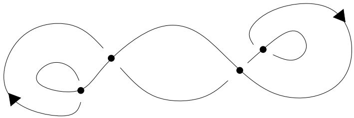
本日：$Z(M, \mathbb{F}_p[X])$

閉正規 o-グラフ

向きづけられた閉 3 次元多様体はその**スパイン**を通して, **閉正規 o-グラフ**と呼ばれる有向仮想結び目図式で表せる.



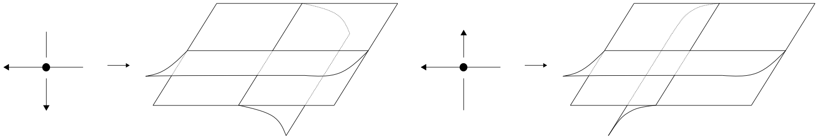
$L(s,1)$



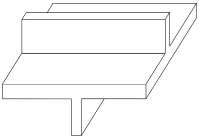
$S^2 \times S^1$

閉正規 o-グラフが表す 3 次元多様体

次のようにして各頂点を多面体に置き換える.



辺の接続に従って上記の多面体同士を接着し, 境界に D^2 を貼り合わせる. 得られた多面体を太らせる.

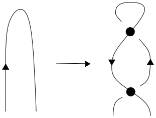


得られた 3 次元多様体の境界は S^2. そこに B^3 を貼り合わせて向きづけられた閉 3 次元多様体が得られる.

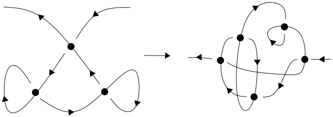
閉正規 o-グラフが表す 3 次元多様体

定理 (Benedetti–Petronio 1997)

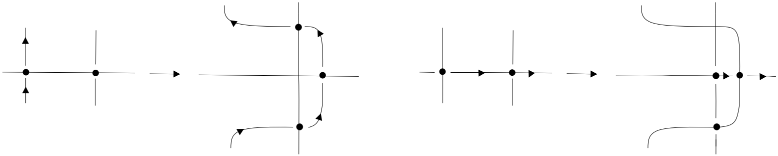
閉正規 o-グラフ Γ_1, Γ_2 が表す 3 次元多様体 M_1, M_2 が同相であることの必要十分条件は, Γ_1, Γ_2 が **0-2**, **MP**, **CP 移動**で移りあうことである.



0-2 移動



CP 移動



MP 移動

Hopf 代数の定義

定義

体 K 上の双代数 $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ が反準同型 $S : H \to H$ について以下の公理を満たすとき, $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ を **Hopf 代数**という.

$$
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & K \arrow[rr, "u"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

定義

Hopf 代数 H が**対合的**であるとは $S^2 = \mathrm{id}$ となることをいう.

対合的な Hopf 代数の例

例

有限群 G が生成する群環 $\mathbb{C}[G]$

$$\begin{array}{rll} \text{積} & m(g \otimes h) & = gh \\ \text{単位射} & u(1_{\mathbb{C}}) & = 1_G \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \text{余積} & \Delta(g) & = g \otimes g \\ \text{余単位射} & \epsilon(g) & = 1 \\ \text{対合射} & S(g) & = g^{-1} \end{array}$$

例

多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ をイデアル $\langle x^p \rangle$ で割って得られる代数 $\mathbb{F}_p[X]$

$$\begin{array}{rll} \text{積} & m(X^i \otimes X^j) & = X^{i+j} \\ \text{単位射} & u(1_{\mathbb{F}_p}) & = 1_{\mathbb{F}_p} \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \text{余積} & \Delta(X) & = 1 \otimes X + X \otimes 1 \\ \text{余単位射} & \epsilon(X) & = 0 \\ \text{対合射} & S(X) & = -X \end{array}$$

Hopf 代数の積分と余積分

定義

H を Hopf 代数とする. このとき, $\mu_L \in H^*$ が**左積分**であるとは

$$f \cdot \mu_L = f(1_H)\mu_L \qquad (\forall f \in H^*)$$

を満たすことをいう. また, $\mu_R \in H^*$ が**右積分**であるとは

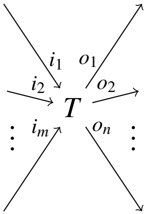
$$\mu_R \cdot f = f(1_H)\mu_R \qquad (\forall f \in H^*)$$

を満たすことをいう. H^* 上の左積分, 右積分をそれぞれ H の**左余積分**, **右余積分**という.

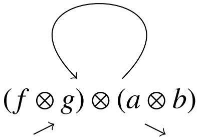
定義

Hopf 代数 H の左余積分が右余積分でもあるとき, H は**ユニモジュラー**であるという. また, 左積分が右積分でもあるときは, H は**余ユニモジュラー**であるという.

End$(V^{\otimes m}, V^{\otimes n}) \cong V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ の元を右のように表す.
テンソルネットワークの接続を, 接続された辺が対応する各テンソルの縮約とみなす.

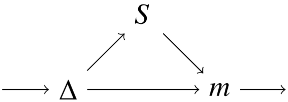


テンソルネットワーク



$$= f(a)g \otimes b \ \in V^* \otimes V$$

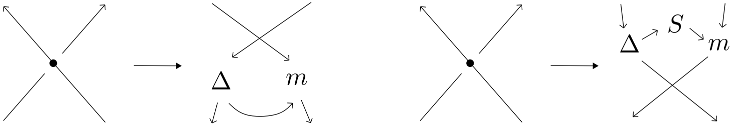
Hopf 代数の公理は以下のように書ける.



$$= \quad \longrightarrow \epsilon \qquad 1_H \longrightarrow$$

不変量の構成

H を対合的, ユニモジュラー, 余ユニモジュラーな Hopf 代数, Γ を向きづけられた閉 3 次元多様体 M を表す閉正規 o-グラフとする. Γ の各頂点を次のようにしてテンソルネットワークに置き換える.



得られる値は K の元であり, これを $Z(\Gamma, H)$ と書く.

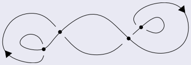
定理 (Mihalache–Suzuki–Terashima 2021)

$Z(M, H) := Z(\Gamma, H)$ は向きづけられた閉 3 次元多様体の不変量である.

$Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ の計算

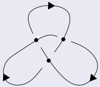
定理

$$Z(S^2 \times S^1, \mathbb{F}_p[X]) = 0$$



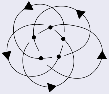
$$Z(L(s,t), \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (p \mid s) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$Z(Q, \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (p = 2) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$



(Q: 4 元数多様体, $p \leq 41$)

$$Z(P, \mathbb{F}_p[X]) = 1$$

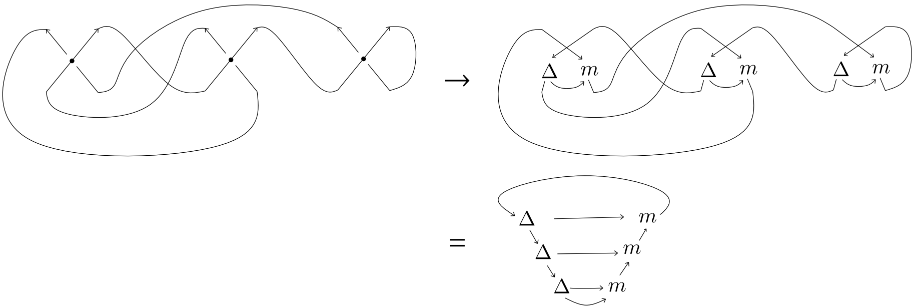


(P: Poincaré ホモロジー球面, $p \leq 41$)

レンズ空間についての証明
$\mathbb{F}_p[X]$ が (余) 可換であることと, 結合律と余結合律を用いることで

$$Z(L(s,t), \mathbb{F}_p[X]) = \mathrm{tr}(m^s \circ \Delta^s)$$

となる.



$Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ の計算

定義に従って書き下し, 計算すると

$$\mathrm{tr}(m^s \circ \Delta^s) = s^{p-1} \mod p$$

となる. Fermat の小定理より

$$s^{p-1} = \begin{cases} 0 & (p \mid s) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \mod p$$

系

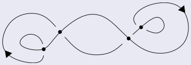
H が可換または余可換であるとき

$$Z(L(s,t), H) = Z(L(s,t'), H)$$

$Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ の計算

定理

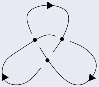
$$Z(S^2 \times S^1, \mathbb{F}_p[X]) = 0$$



$$Z(L(s,t), \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (p \mid s) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

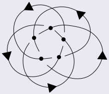
$$Z(Q, \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (p = 2) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(Q: 4 元数多様体, $p \leq 41$)



$$Z(P, \mathbb{F}_p[X]) = 1$$

(P: Poincaré ホモロジー球面, $p \leq 41$)



$Z(M,\mathbb{F}_p[X])$ の計算

予想

$$Z(M,\mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (\sharp H_1(M) = \infty \text{ または } p \mid \sharp H_1(M)) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

命題 (Mihalache–Suzuki–Terashima 2021)

有限群 G が生成する群環 $\mathbb{C}[G]$ について以下が成り立つ.

$$Z(M,\mathbb{C}[G]) = \sharp\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$$

このことから, 先の予想は次のように言い換えることができる.

予想

$$Z(M,\mathbb{F}_p[X]) = Z(M,\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p]) \mod p$$