2 橋絡み目とプレッツェル絡み目の カンドル彩色クイバー

石原 双葉 (広島大学 先進理工系科学研究科)

結び目の数理 VI (東京女子大学)

2023 年 12 月 23 日

概要

$L \subset \mathbb{R}^3$: 絡み目

D : L の図式

X : カンドル

$Q(L) = Q(D)$: L の基本カンドル

$\mathrm{Col}_X(L) = \mathrm{Col}_X(D)$: L の X 彩色集合

$\downarrow$ [Cho–Nelson 2018]

$Q_X(L)$: L の X 彩色クイバー（有向多重グラフ）

本講演　X : 2 面体カンドル,
L : 2 橋絡み目，プレッツェル絡み目.

カンドル

定義

円周 S^1 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みの像を**結び目**という． l 個の S^1 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みの像を l 成分の**絡み目**という．

以下，L を有向な絡み目とする．

定義 (カンドル)

X を 2 項演算 $\triangleright$ を持つ集合とする． $\triangleright$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$(X, \triangleright)$ を**カンドル**という．

1. 全ての $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$,
2. 全ての $y, z \in X$ に対して $z = x \triangleright y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する,
3. 全ての $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$.

カンドルの例と基本カンドルの定義

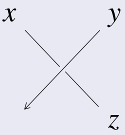
例 (2 面体カンドル)

$\forall x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $x \triangleright y := 2y - x \mod n$ とすれば，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \triangleright)$ はカンドルである．これを位数 n の 2 面体カンドルといい，R_n とかく．

定義 (絡み目の基本カンドル)

$x_1, \ldots, x_n$: L の図式のアーク．

ここで，L の図式の各交点 c_i



に付随して交点関係式 r_i を

$z = x \triangleright y$ で定める．

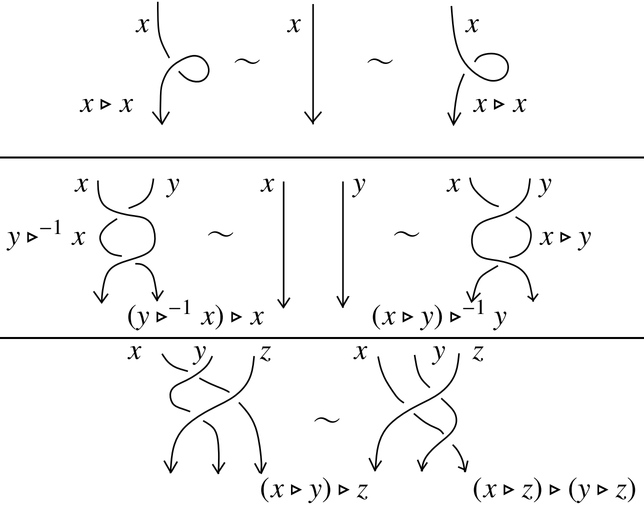
このとき，

$$Q(L) := \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$$

を，L の基本カンドルという．

カンドルと Reidemeister 移動

カンドルの定義と，3 つの Reidemeister 移動はそれぞれ以下のように対応している．したがって基本カンドルは実際，絡み目不変量になる．



カンドル彩色

定義 (カンドル彩色)

X : 有限カンドル.
L : 有向絡み目.
D : L の図式.
カンドル準同型写像 $C : Q(L) \to X$ を D の X 彩色（X-coloring）といい,
その集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ とかく.

定理

X 彩色の数 $|\mathrm{Col}_X(D)|$ は絡み目不変量である.

$\mathrm{Col}_X(D)$ を $\mathrm{Col}_X(L)$ とかくこともある.

カンドル彩色クイバー

定義 (有向多重グラフ)

V : 有限集合.
$c : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$: 重み関数.
このとき，(V, c) を有向多重グラフ という.

定義 (Cho–Nelson 2018)

X : 有限カンドル.
L : 有向絡み目.
このとき，次の V, c により定まる有向多重グラフ (V, c) を L の X 彩色クイバーといい，$Q_X(L)$ とかく.

- $V = \mathrm{Col}_X(L)$,
- $c : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$; $c(v_i, v_j) = |\{f \in \mathrm{End}(X) \mid v_j = f \circ v_i\}|$.

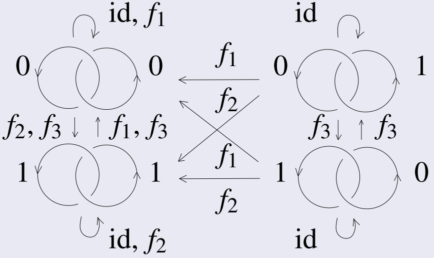
定理 (Cho–Nelson 2018)

X 彩色クイバー $Q_X(L)$ は絡み目不変量である.

例 (Hopf 絡み目の R_2 彩色クイバー)

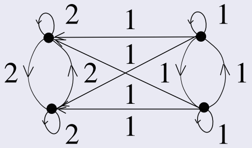
L : Hopf 絡み目.

L の R_2 彩色を全ての X の自己準同型写像で写すと



$$f_1(x) = x + 1$$
$$f_2(x) = 0$$
$$f_3(x) = 1$$

よって L の R_2 彩色クイバー $Q_{R_2}(L)$ は,



クイバーを記述するための記号

定義 (完全有向グラフ)

- $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$.
- $\hat{k} : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$; $c(v_i, v_j) = k$.

このとき，$(V, \hat{k})$ を完全有向グラフ といい，$(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{k})$ とかく．

定義

$d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$.

$c := \gcd(d, n)$.

$\Gamma_{d,n} := (V, c)$: 有向多重グラフ s.t.

- $V = \{(i, i + \frac{kn}{c}) := v_{i,k} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k \in \{1, \cdots, c-1\}\}$,
- $c : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$c(v_{i,k}, v_{j,l}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \gcd(k, c) \nmid \gcd(l, c) \\ \frac{n}{c} \cdot \gcd(k, c) & \text{if } \gcd(k, c) \mid \gcd(l, c). \end{cases}$$

定義 (join)

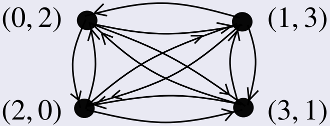
$G_1 = (V_1, c_1)$, $G_2 = (V_2, c_2)$: 有向多重グラフ.
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
次の V, c から定まる有向多重グラフ (V, c) を G_1 と G_2 の join といい,
$G_1 \overleftarrow{\nabla}_{\hat{k}} G_2$ とかく.

- $V = V_1 \cup V_2$,
- $c : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$c(v_i, v_j) = \begin{cases} c_1(v_i, v_j) & \text{if } v_i, v_j \in V_1 \\ c_2(v_i, v_j) & \text{if } v_i, v_j \in V_2 \\ k & \text{if } v_i \in V_2, v_j \in V_1 \\ 0 & \text{if } v_i \in V_1, v_j \in V_2. \end{cases}$$

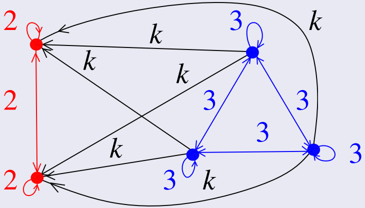
例

$\Gamma_{2,4}$ は以下のようになる．ただし，有向辺の重みは全て 2 である．



例

$G_1 = (\overleftrightarrow{\mathcal{K}_2}, \hat{2})$, $G_2 = (\overleftrightarrow{\mathcal{K}_3}, \hat{3})$ とすれば，$G_1 \overleftarrow{\nabla}_{\hat{k}} G_2$ は以下のようになる．



先行研究

定理 (Basi–Caprau 2022)

$T(p,2)$: トーラス絡み目.
R_n ($n \in \mathbb{N}$) : 2 面体カンドル.

- $\gcd(p,n) = 1$ のとき，$Q_{R_n}(T(p,2)) = \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right)$,
- $\gcd(p,n) = c$ (c : 素数) のとき，$Q_{R_n}(T(p,2)) = \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(c-1)}}, \frac{\hat{n}}{c}\right)$

である.

定理 (Zhou–Liu 2023)

$T(p,3)$: トーラス絡み目，R_n $(n \in \mathbb{N})$: 2 面体カンドル.

- $p = 5, 6k+1, 6k+5$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p,3)) = \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right)$.
- $p = 4, 6k+2, 6k+4$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p,3)) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) & \text{if } \gcd(3,n) = 1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{\hat{n}}{3}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{2n}}, \frac{\hat{n}}{3}\right) & \text{if } \gcd(3,n) = 3. \end{cases}$$

- $p = 3, 6k+3$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p,3)) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) & \text{if } \gcd(2,n) = 1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{\hat{n}}{2}} \left(\sqcup_3(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \frac{\hat{n}}{2})\right) & \text{if } \gcd(2,n) = 3. \end{cases}$$

- $p = 6k$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，
$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p,3)) = \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\hat{1}} \left\{\left(\sqcup_3(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(n-1)}}, \hat{1})\right) \sqcup \left(\sqcup_{n-2}(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(n-1)}}, \hat{1})\right)\right\}.$$

2 橋絡み目の彩色数とクイバー

主定理 (1)

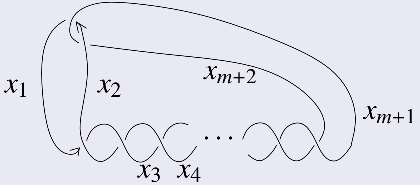
$S(\alpha,\beta)$: 2 橋絡み目の Schubert の標準形.
R_n $(n \in \mathbb{N})$: 2 面体カンドル.
$c := \gcd(\alpha, n)$, $k \in \{1, \ldots, c-1\}$.

$$\mathcal{Q}_{R_n}(S(\alpha,\beta)) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) & \text{if } c = 1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(c-1)}}, \frac{\hat{n}}{c}\right) & \text{if } c : \text{素数} \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{\alpha,n} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特に，ツイスト結び目 K_m について示す．

証明.

$f \in \mathrm{Col}_{R_n}(K_m)$ とする．$\forall x_i \in Q(K_m)$，$f(x_i) = y_i$ とするとき，K_m の基本カンドルの表示



$Q(K_m) = \langle x_1, \dots, x_{m+2} \mid x_1 = x_2 \triangleright x_{m+2}, x_{m+2} = x_{m+1} \triangleright x_1, x_{i+2} = x_i \triangleright x_{i+1} \rangle$
$(1 \leq \forall i \leq m)$ より，

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2y_{m+2} - y_2 &&= 2(2y_{m+1} - y_m) - y_2 \\
&= 4y_{m+1} - 2y_m - y_2 &&= \cdots \\
&= 2(m+1)y_2 - 2my_1 - y_2
\end{aligned}
$$

したがって $(2m+1)y_1 = (2m+1)y_2$ より $|\mathrm{Col}_{R_n}(K_m)| = n \cdot \gcd(2m+1, n)$.

証明の続き.

$\gcd(2m+1,n)=c$ が素数でないときを示す.

まず, $Q_{R_n}(K_m)$ は $\left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}\right)$ を部分グラフに持つ.

頂点 $(i, i+\frac{kn}{c})$ から $(j, j+\frac{ln}{c})$ $(k=1,\ldots,c-1)$ への有向辺の個数は,

$\exists s \in \mathbb{Z}$ s.t. $s\left(\frac{kn}{c}\right) = \frac{ln}{c} \mod n$ を満たす s の個数.

$\therefore sk = l \mod c$ を満たす s の個数の $\frac{n}{c}$ 倍.

したがって,

- $l \neq 0$ かつ $\gcd(k,c) \nmid \gcd(l,c)$ のとき 0 本,
- $l \neq 0$ かつ $\gcd(k,c) \mid \gcd(l,c)$ のとき $\frac{n}{c} \cdot \gcd(k,c)$ 本,
- $l=0$ のとき $\frac{n}{c} \cdot \gcd(k,c)$ 本.

また, trivial coloring から nontrivial coloring への有向辺は存在しない.

□

プレッツェル絡み目の彩色数とクイバー

主定理 (2)

$P(d_1,\dots,d_m)$: プレッツェル絡み目.
R_n $(n\in\mathbb{N})$: 2 面体カンドル.

$$|\mathrm{Col}_{R_n}(P(d_1,\dots,d_m))| = \begin{cases} n\cdot\gcd\left(\sum_{i=1}^{m} d_i^{-1}, n\right) & \text{if } \forall i, \gcd(d_i,n)=1 \\ n\cdot\gcd\left(d_i\sum_{i=1}^{m} d_i^{-1}, n\right) & \text{if } \exists! i \text{ s.t. } \gcd(d_i,n)\neq 1 \\ ? & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\forall i, \gcd(d_i,n)=1$ のとき， $x_1 := \sum_{i=1}^{m} d_i^{-1}$ とおくと

$$Q_{R_n}(P(d_1,\dots,d_m)) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) & \text{if } c=1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(c-1)}}, \frac{\hat{n}}{c}\right) & \text{if } c : \text{素数} \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{n}{c}\cdot\widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{x_1,n} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

主定理 (2)

[前ページの続き]

ただし，$c := \gcd(x_1, n)$, $k \in \{1, \ldots, c-1\}$.

- $\exists! i$ s.t. $\gcd(d_i, n) \neq 1$ のとき，$x_2 := d_i \sum_{i=1}^{m} d_i^{-1}$ とおくと

$$Q_{R_n}(P(d_1, \ldots, d_m)) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}\right) & \text{if } c = 1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(c-1)}}, \frac{\hat{n}}{c}\right) & \text{if } c : \text{素数} \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{x_2, n} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし，$c := \gcd(x_2, n)$, $k \in \{1, \ldots, c-1\}$.

一般に次が成り立つ.

主定理 (3)

L : 有向絡み目.
$\exists i, j$, $\exists d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s.t. $dy_i = dy_j \mod n$: $Q(L)$ の交点関係式の連立方程式系 (y_i, y_j : 彩色されたアーク).
$c := \gcd(d, n),\ k \in \{1, \ldots, c-1\}$.
このとき,

$$|\mathrm{Col}_{R_n}(L)| = nc,$$

$$Q_{R_n}(L) = \begin{cases} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) & \text{if } c = 1 \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_{n(c-1)}}, \frac{\hat{n}}{c}\right) & \text{if } c : \text{素数} \\ \left(\overleftrightarrow{\mathcal{K}_n}, \hat{n}\right) \overleftarrow{\triangledown}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{d,n} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ご清聴ありがとうございました.