Knot Floer complex が $(3, q)$ 型トーラス結び目と stably equivalent な双曲結び目

姫野 圭佑 (Keisuke Himeno)

December 25, 2023

Knot Floer complex $\mathrm{CFK}^\infty(K)$

結び目 $K \subset S^3 \longrightarrow$ knot Floer complex $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ [Ozsváth–Szábo].

- $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は $\mathbb{F}_2[U, U^{-1}]$–加群の構造を持つ.
- 鎖複体として, $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は Maslov grading と呼ばれる homological grading と微分 ∂ を持つ.
- $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$–filtered 鎖複体の構造を持つ.
  特に，一つ目の filtration level を Alexander grading と呼ぶ.
- U の $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ への作用は ∂ と可換であり,
  Maslov grading を 2，二つの filtration levels を 1 ずつ下げる.
- $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ の filtered chain homotopy equivalence class は結び目の不変量になる.

$\mathrm{CFK}^\infty(K)$ の平面への描画

$\mathbb{F}_2$–ベクトル空間としての生成元 $U^i x$ を座標 $(-i, \mathrm{Alex}(U^i x))$ に配置，微分は矢印で表す．

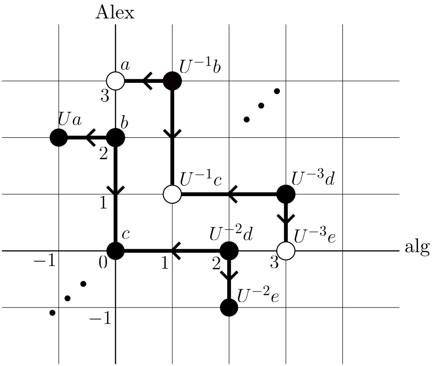


Figure: $\mathrm{CFK}^\infty(T(3,4))$ の平面への描画．
白い頂点は Maslov grading が 0 であり，それぞれ $\mathrm{H}_0(\mathrm{CFK}^\infty(T(3,4))) \cong \mathbb{F}_2$ の生成元になる．

Stably equivalence

Definition

二つの knot Floer complex C_1, C_2 が stably equivalent である
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ acyclic な鎖複体 A_1, A_2 が存在して，$C_1 \oplus A_1 \cong C_2 \oplus A_2$.

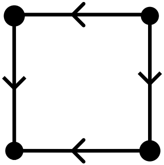


Figure: box 型鎖複体

左図の形をした鎖複体は acyclic,
つまりホモロジーが消えている.

Theorem (Hom)

K_1 と K_2 が concordant であるとする.
このとき，$\mathrm{CFK}^\infty(K_1)$ と $\mathrm{CFK}^\infty(K_2)$ は stably equivalent である.

主結果

$n \geq 0$, $q \geq 4$ を 3 と互いに素な整数，σ_1, σ_2 は 3 次ブレイド群の標準的な生成元とする．以下の図のように結び目 $K_n^{(3,q)}$ を定める．

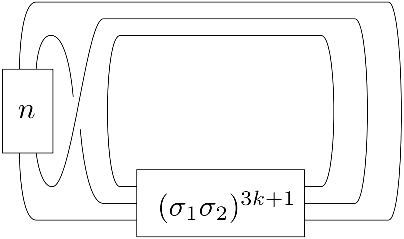


Figure: $q = 3k+1$ $(k \geq 1)$ の場合．n は右手系の n 回フルツイストを表す．

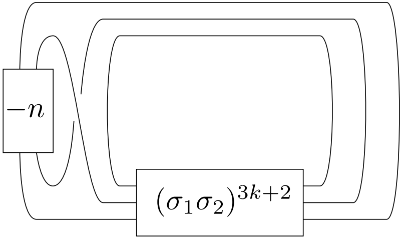


Figure: $q = 3k+2$ $(k \geq 1)$ の場合．$-n$ は左手系の n 回フルツイストを表す．

主結果

Theorem

結び目 $K_n^{(3,q)}$ $(n \geq 1)$ は以下を満たす.

- $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$ は $\mathrm{CFK}^\infty(T(3,q))$ と stably equivalent である.
- 双曲的結び目である.
- (L–space knot でも Floer thin knot でもない).

Theorem

q を固定した結び目の族 $\{K_n^{(3,q)}\}_{n=0}^\infty$ は互いに concordant でない結び目を無限個含む.

Υ 不変量

Ozsváth–Stipsicz–Szábo (2017)

結び目 K に対し，$\Upsilon_K(t) \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ が定義できる．

- 連続かつ区分線形
- コンコーダンス不変量
- 左右対称，つまり $\Upsilon_K(t) = \Upsilon_K(2-t)$
- K^* を K の鏡像とすると，$\Upsilon_{K^*}(t) = -\Upsilon_K(t)$
- $\Upsilon_{K_1 \# K_2}(t) = \Upsilon_{K_1}(t) + \Upsilon_{K_2}(t)$

$\Upsilon_K(t)$ は CFK^∞ から計算できる [Livingston].

Fact

$\mathrm{CFK}^\infty(K_1)$ と $\mathrm{CFK}^\infty(K_2)$ が stably equivalent ならば，
$\Upsilon_{K_1}(t) = \Upsilon_{K_2}(t)$.

例：$\Upsilon_{T(3,4)}(t)$

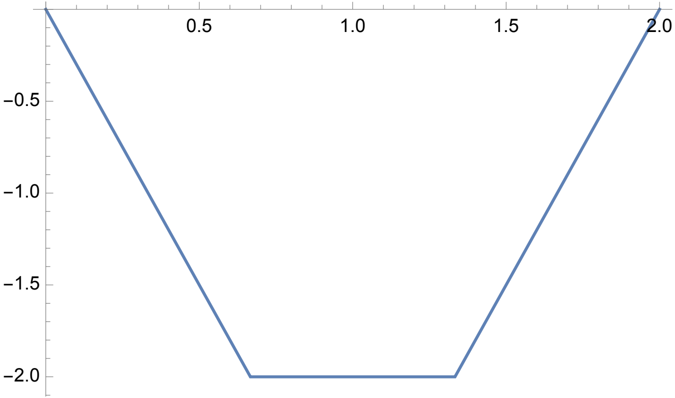


Figure: トーラス結び目 $T(3,4)$ の Υ 不変量.

問題と主定理の系

Borodzik–Hedden (2018)

Υ 不変量が下に凸となる結び目はどのようなものか？

- L–space knot [Borodzik–Hedden].
  例えば，正トーラス結び目.
- Floer thin knot (適切な鏡像を考える) [Alfieri].

主定理の系

$K_n^{(3,q)}$ の Υ 不変量は下に凸であり，
上記のどちらにも属さない.

Contents

1. $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$ の計算
2. Alexander 多項式と双曲性
3. Concordant

Doubly pointed Heegaard diagram

$K_n^{(3,q)}$ は $(1,1)$-knot であり，種数 1 の doubly pointed Heegaard diagram で表せる [Goda–Matsuda–Morifuji].
この場合，$\mathrm{CFK}^{\infty}(K_n^{(3,q)})$ は組み合わせ的に計算できる.

Definition (doubly pointed Heegaard diagram)

$(\Sigma; \alpha, \beta; z, w)$ が結び目 K の 種数 1 の doubly pointed Heegaard diagram であるとは,

- $(\Sigma; \alpha, \beta)$ は S^3 の種数 1 の Heegaard diagram,
- $z, w \in \Sigma$ を各ハンドル体内で，α (resp. β) を張る meridian disk に交わらない trivial arc t (resp. t') で繋いだとき，$K = t \cup t'$ となっている.

$K_n^{(3,4)}$ の doubly pointed Heegaard diagram

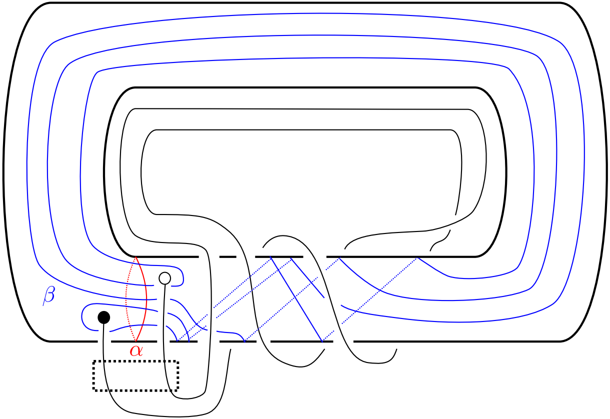


Figure: $K_0^{(3,4)}$ の doubly pointed diagram.
点線で囲まれた部分を右手系に n 回フルツイスト = diagram 上で二点を時計回りに n 回転すると，$K_n^{(3,4)}$ の doubly pointed diagram を得る．

$K_n^{(3,4)}$ の doubly pointed Heegaard diagram

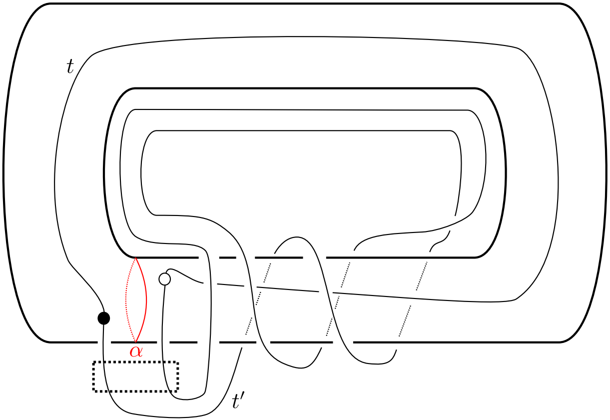


Figure: doubly pointed diagram から結び目を復元した図.

CFK$^\infty$ の計算方法

CFK$^\infty$ の $\mathbb{F}_2[U, U^{-1}]$–加群としての 生成元 $\cdots$ α と β の交差点.
微分 $\cdots$ Whitney disk ϕ: $D^2 \to \Sigma$ を考える.

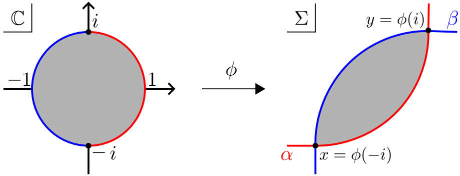


Figure: x から y への Whitney disk.

$n_z(\phi) :=$ ϕ と z の代数的交差数. ($n_w(\phi)$ も同様.)

$$\partial x = \sum_{y \in \alpha \cap \beta} \sum_{\phi} U^{n_w(\phi)} y,$$

ただし, ϕ は x から y への "適切な" Whitney disk.

Maslov grading と Alexander grading

Maslov grading $M\colon \alpha \cap \beta \to \mathbb{Z} \cdots$ the homological grading.
Alexander grading $A\colon \alpha \cap \beta \to \mathbb{Z}$ は以下の二つの性質から一意に定まる.

- ϕ : x から y への "適切な" Whitney disk,

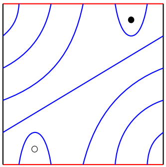
$$A(x) - A(y) = n_z(\phi) - n_w(\phi).$$

- 対称性

$$\#\{x \mid A(x) = i\} = \#\{x \mid A(x) = -i\}, \quad {}^{\forall} i \in \mathbb{Z}.$$

Universal cover

計算を簡単にするため，Σ の universal cover を考える．



$\longrightarrow$

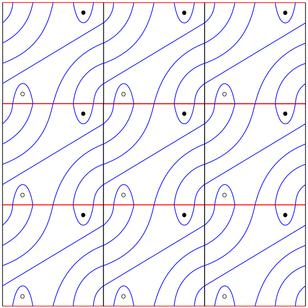


Figure: $K_0^{(3,4)}$ の doubly pointed diagram の展開図．

Figure: Universal cover へのリフト．

$n=1$ の場合： universal cover

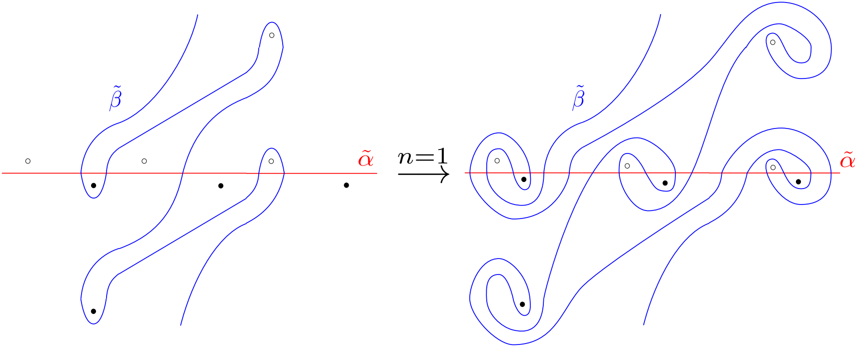
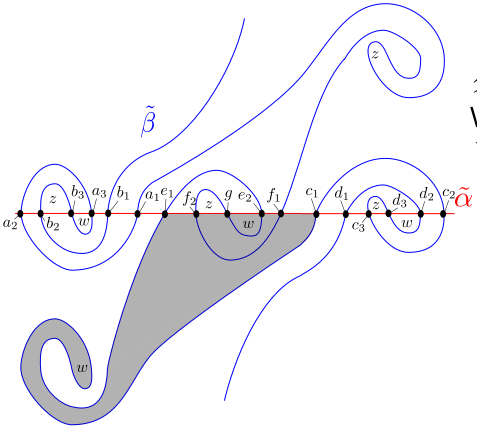


Figure: $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ はそれぞれ α, β のリフトのうち，一つの連結成分.

$n = 1$ の場合：Whitney disk の例



グレーの disk ϕ は c_1 から e_1 への Whitney disk で $n_w(\phi) = 2$.
したがって,

$$A(c_1) - A(e_1) = -2,$$

$$\partial c_1 = U^2 e_1 + \cdots .$$

$n=1$ の場合：微分と Alexander filtration levels

微分	Alexander
$\partial a_1 = Ua_2 + Ub_1 + f_1 + e_1$	$4 = A(b_2)$
$\partial a_2 = a_3 + Ub_2$	$3 = A(a_2) = A(b_1) = A(b_3)$
$\partial a_3 = Ub_3$	$2 = A(a_1) = A(a_3)$
$\partial b_1 = Ub_2 + a_3$	$1 = A(e_2)$
$\partial b_2 = b_3$	$0 = A(g) = A(f_1) = A(e_1)$
$\partial b_3 = 0$	$-1 = A(f_2)$
$\partial c_1 = c_2 + d_1 + U^2 f_1 + U^2 e_1$	$-2 = A(c_1) = A(c_3)$
$\partial c_2 = Uc_3 + d_2$	$-3 = A(c_2) = A(d_1) = A(d_3)$
$\partial c_3 = d_3$	$-4 = A(d_2)$
$\partial d_1 = d_2 + Uc_3$	
$\partial d_2 = Ud_3$	**基底変換**
$\partial d_3 = 0$	$b_1 \to b_1 + a_2 =: B_1$
$\partial f_1 = f_2 + Ue_2$	$d_1 \to d_1 + c_2 =: D_1$
$\partial f_2 = Ug$	$e_1 \to f_1 + e_1 =: E_1$
$\partial e_1 = Ue_2 + f_2$	
$\partial e_2 = g$	

$n = 1$ の場合：$\mathrm{CFK}^{\infty}(K_1^{(3,4)})$

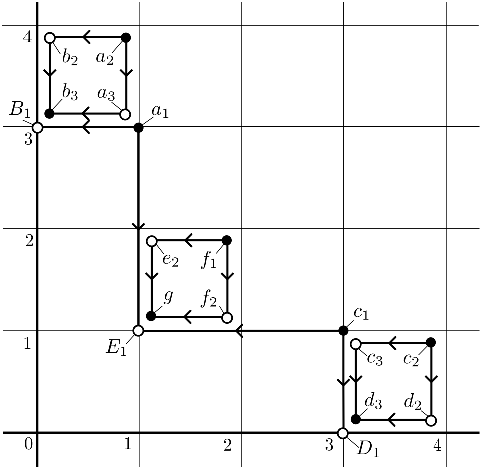


Figure: $\mathrm{CFK}^{\infty}(K_1^{(3,4)})$ の図 (U は省略してある). $\mathrm{CFK}^{\infty}(T(3,4))$ と stably equivalent.

$\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,4)})$

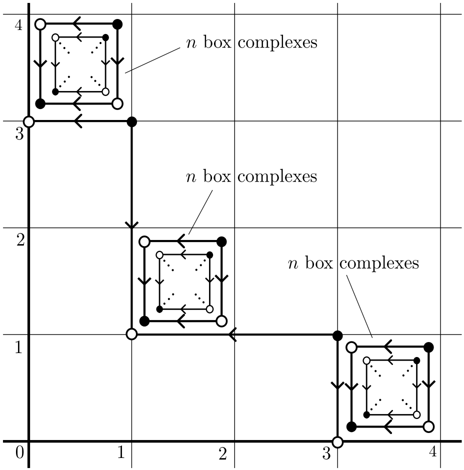


Figure: $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,4)})$ の図.

$\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$

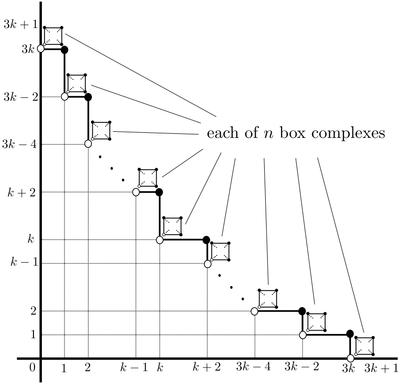


Figure: $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,3k+1)})$.

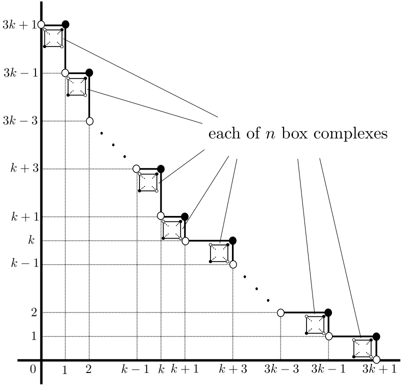


Figure: $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,3k+2)})$.

1. $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$ の計算
2. Alexander 多項式と双曲性
3. Concordant

Alexander 多項式

Theorem (Ozsváth–Szábo (2004))

$$\Delta_K(t) = \sum_{M,A\in\mathbb{Z}} (-1)^M t^A \cdot \operatorname{rank} \widehat{\mathrm{HFK}}_M(K, A),$$

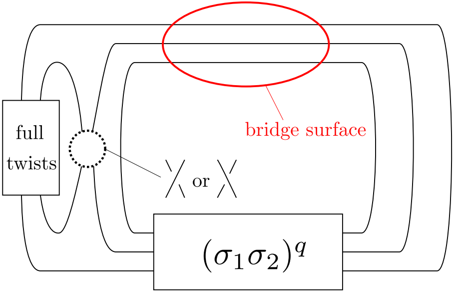
この定理から,

$$\Delta_{K_n^{(3,3k+1)}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \Big\{ -n(t^{3i+1}+t^{-3i-1}) + (2n+1)(t^{3i}+t^{-3i}) - (n+1)(t^{3i-1}+t^{-3i+1}) \Big\} - nt + (2n+1) - nt^{-1},$$

$$\Delta_{K_n^{(3,3k+2)}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \Big\{ (n+1)(t^{3i+1}+t^{-3i-1}) - (2n+1)(t^{3i}+t^{-3i}) + n(t^{3i-1}+t^{-3i+1}) \Big\} + (n+1)t - (2n+1) + (n+1)t^{-1}.$$

双曲性

- Alexander 多項式より $K_n^{(3,q)}$ はトーラス結び目ではない.
- $(1,1)$-knot $\Longrightarrow$ tunnel number $= 1 \Longrightarrow$ 素な結び目.
- $K_n^{(3,q)}$ の bridge number ≤ 3.



- 素なサテライト結び目 の bridge number ≥ 4 [Schubert].
  したがって, $K_n^{(3,q)}$ は サテライト結び目でない.

Concordant

Theorem

q を固定した結び目の族 $\{K_n^{(3,q)}\}_{n=0}^{\infty}$ は互いに concordant でない結び目を無限個含む.

$K \overset{\text{con.}}{\sim} L \Longrightarrow K\# -L$ は slice knot
$\Longrightarrow \Delta_{K\#-L}(t) =^{\exists} f(t)f(t^{-1})$ (Fox–Milnor condition).

特に, K と L の determinant の積は平方数.

Determinant の計算

Proposition

以下のいずれかを満たすとき，
$K_n^{(3,q)}$ と $K_m^{(3,q)}$ は互いに concordant でない．

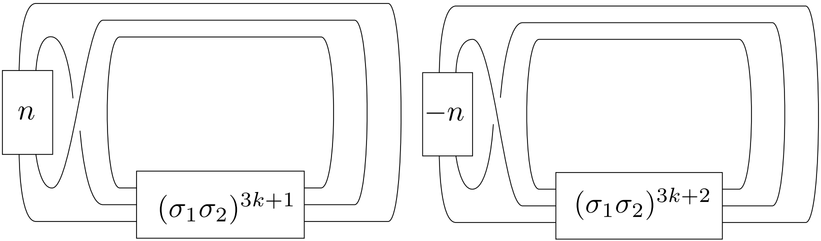
- $q = 3k+1$ かつ k が奇数のとき，$(4n+3)(4m+3)$ が平方数でない．
- $q = 3k+1$ かつ k が偶数のとき，$(4n+1)(4m+1)$ が平方数でない．
- $q = 3k+2$ かつ k が奇数のとき，$(4n+1)(4m+1)$ が平方数でない．
- $q = 3k+2$ かつ k が偶数のとき，$(4n+3)(4m+3)$ が平方数でない．

証明

すでに求めた Alexander 多項式から determinant を計算すると，

- $q = 3k+1$ のとき，$\det(K_n^{(3,q)}) = \begin{cases} 4n+1 & k : \mathrm{odd}, \\ 4n+3 & k : \mathrm{even}. \end{cases}$
- $q = 3k+2$ のとき，$\det(K_n^{(3,q)}) = \begin{cases} 4n+3 & k : \mathrm{odd}, \\ 4n+1 & k : \mathrm{even}. \end{cases}$ $\square$

まとめ



Theorem

- $\mathrm{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$ は $\mathrm{CFK}^\infty(T(3,q))$ と stably equivalent である.
- 双曲的結び目である.
- (L–space knot でも Floer thin knot でもない).
- q を固定した結び目の族 $\{K_n^{(3,q)}\}_{n=0}^\infty$ は互いに concordant でない結び目を無限個含む.