

## 2 元集合に付随する tribracket bracket と絡み目の状態和型不変量

坂本 柚香 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)

### 概要

ある三項演算が定まった集合  $X$  を tribracket という.  $X$  を tribracket とし,  $R$  を可換環とする.  $X^3$  から  $R^\times$  への 2 つの写像がしかるべき条件をみたすとき, その写像対を tribracket bracket という. Aggarwal–Nelson–Rivera は, tribracket と tribracket bracket から, 量子 enhancement 多項式という向きづけられた絡み目の不変量を構成した. 本稿では, まず, tribracket  $X$  を  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[a, b, c] = a + b - c$  としたときの,  $(2, q)$  トーラス絡み目の量子 enhancement 多項式の計算結果を紹介する. また, 2 元集合に付随する普遍 tribracket bracket を導入し, これから定まる量子 enhancement 多項式と Jones 多項式の関係について考察する. 本稿の内容は, 西村勇哉氏 (広島大学) との共同研究である.

## 1 Tribracket

この章では, tribracket の定義と, tribracket を用いた絡み目図式の領域への彩色を紹介する.

**定義 1.1.**  $X$  を空でない集合とする. 写像  $[\cdot, \cdot, \cdot] : X^3 \rightarrow X$  が次の (i), (ii) を満たすとき, 写像  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  を  $X$  上の **horizontal tribracket 構造** という.

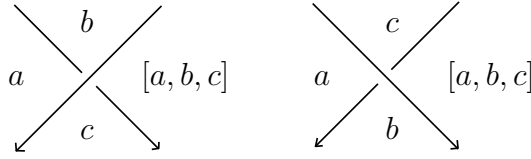
- (i) (a) 任意の  $b, c, d \in X$  に対して,  $[a, b, c] = d$  となる  $a \in X$  がただひとつ存在する.
  - (b) 任意の  $a, c, d \in X$  に対して,  $[a, b, c] = d$  となる  $b \in X$  がただひとつ存在する.
  - (c) 任意の  $a, b, d \in X$  に対して,  $[a, b, c] = d$  となる  $c \in X$  がただひとつ存在する.
- (ii) 任意の  $a, b, c, d \in X$  に対して,

$$[c, [a, b, c], [a, c, d]] = [b, [a, b, c], [a, b, d]] = [d, [a, b, d], [a, c, d]]$$

が成り立つ.

以下, horizontal tribracket 構造が定まった集合  $X$  を **tribracket** と呼ぶ.

$L$  を有向絡み目,  $D$  を  $L$  の図式とし,  $X$  を有限 tribracket とする. 以下のルールによる  $D$  の領域の  $X$  での彩色を  $D$  の  $X$ -彩色という.



$X$ -彩色された有向絡み目の図式に, Reidemeister move を施すと移動後の図式の  $X$ -彩色は一意に決まる.  $X$ -彩色された図式に対して Reidemeister move を施し, 新たな  $X$ -彩色された図式を得る操作を  $X$ -彩色 Reidemeister move という. 有向絡み目の図式  $D$  の  $X$ -彩色の集合を  $C_X(D)$  と表す.  $D$  の  $X$ -彩色の数  $|C_X(D)|$  は, 有向絡み目  $L$  の不変量である.

## 2 Tribrocket bracket と量子 enhancement 多項式

この章では, tribracket bracket の定義と, tribracket bracket から定まる絡み目の量子 enhancement 多項式を紹介する.

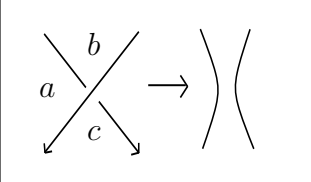
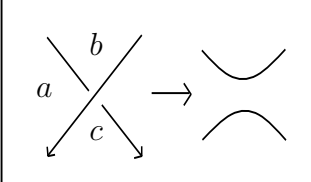
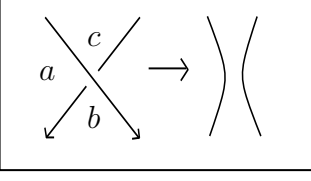
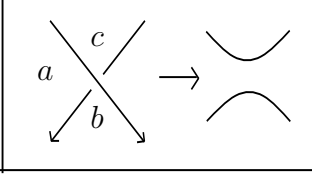
**定義 2.1.**  $X$  を tribracket,  $R$  を単位元を持つ可換環とする. 次の (i), (ii) を満たす写像  $A, B : X^3 \rightarrow R^\times$  のペア  $\beta$  を **tribracket bracket** という. ただし, 写像  $A, B$  による  $(a, b, c) \in X^3$  の像を,  $A_{a,b,c}, B_{a,b,c}$  と表す.

- (i) (a) 任意の  $a, b, c \in X$  に対して,  $\delta := -A_{a,b,c}B_{a,b,c}^{-1} - A_{a,b,c}^{-1}B_{a,b,c}$  はすべて等しい.
- (b) 任意の  $a, b \in X$  に対して,  $\omega := -A_{a,b,b}^2B_{a,b,b}^{-1}$  はすべて等しい.
- (ii) 任意の  $a, b, c, d \in X$  に対して,

$$\begin{aligned}
 & (a) \quad A_{a,b,c}A_{c,[a,b,c],[a,c,d]}A_{a,c,d} = A_{b,[a,b,c],[a,b,d]}A_{a,b,d}A_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & (b) \quad A_{a,b,c}B_{c,[a,b,c],[a,c,d]}B_{a,c,d} = B_{b,[a,b,c],[a,b,d]}B_{a,b,d}A_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & (c) \quad B_{a,b,c}B_{c,[a,b,c],[a,c,d]}A_{a,c,d} = A_{b,[a,b,c],[a,b,d]}B_{a,b,d}B_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & (d) \quad A_{a,b,c}B_{c,[a,b,c],[a,c,d]}A_{a,c,d} = A_{b,[a,b,c],[a,b,d]}A_{a,b,d}B_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & \quad \quad \quad + B_{b,[a,b,c],[a,b,d]}A_{a,b,d}A_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & \quad \quad \quad + \delta B_{b,[a,b,c],[a,b,d]}A_{a,b,d}B_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & \quad \quad \quad + B_{b,[a,b,c],[a,b,d]}B_{a,b,d}B_{d,[a,b,d],[a,c,d]} \\
 & (e) \quad A_{a,b,c}A_{c,[a,b,c],[a,c,d]}B_{a,c,d} \\
 & \quad \quad + B_{a,b,c}A_{c,[a,b,c],[a,c,d]}A_{a,c,d} \\
 & \quad \quad + \delta B_{a,b,c}A_{c,[a,b,c],[a,c,d]}B_{a,c,d} \\
 & \quad \quad + B_{a,b,c}B_{c,[a,b,c],[a,c,d]}B_{a,c,d} = A_{b,[a,b,c],[a,b,d]}B_{a,b,d}A_{d,[a,b,d],[a,c,d]}
 \end{aligned}$$

が成り立つ.

以下のように, smoothing に対して coefficient を与える.

smoothing	coefficient	smoothing	coefficient
	$A_{a,b,c}$		$B_{a,b,c}$
	$A_{a,b,c}^{-1}$		$B_{a,b,c}^{-1}$

**定義 2.2** (Aggarwal–Nelson–Rivera [1]).  $L$  を有向絡み目,  $D$  を  $L$  の図式,  $X$  を有限 tribracket,  $C \in C_X(D)$ ,  $\beta$  を tribracket bracket,  $k$  を  $D$  の Kauffman 状態内の成分の数,  $p$  を絡み目の正の交差の数,  $n$  を負の交差の数とする. このとき,

$$\beta(D, C) := \omega^{n-p} \sum_{\text{states}} \prod (\text{smoothing coefficients}) \delta^k$$

と定める.

**命題 2.3** (Aggarwal–Nelson–Rivera [1]).  $\beta(D, C)$  は,  $X$ -彩色 Reidemeister move によって変化しない.

**系 2.4** (Aggarwal–Nelson–Rivera [1]).  $X$  を tribracket,  $\beta$  を tribracket bracket,  $L$  を有向絡み目,  $D$  を  $L$  の図式とする. このとき, 形式的な多項式

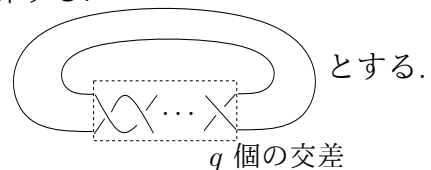
$$\Phi_X^\beta(L) = \sum_{C \in C_X(D)} u^{\beta(D, C)}$$

は,  $L$  の不変量である.  $\Phi_X^\beta(L)$  を  $X$  と  $\beta$  に付随する  $L$  の量子 enhancement 多項式とよぶ.

### 3 (2, q) トーラス絡み目の量子 enhancement 多項式

この章では, 2 元 tribracket  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[a, b, c] = a + b - c$  から定まる, (2, q) トーラス絡み目の量子 enhancement 多項式を計算する.

(2, q) トーラス絡み目を  $T(2, q)$  と表し, 図式を



**定理 3.1.** 任意の  $\beta = (A, B)$  に対し,  $X$  と  $\beta$  に付随する (2, q) トーラス絡み目  $T(2, q)$  の量子 enhancement 多項式は,

(i)  $q$  が奇数 のとき,

$$\Phi_X^\beta(T(2, q)) = \sum_{a,b \in X} u^{w^{-q}((A_{a,b,b}^n + B_{a,b,b}^n \delta)^{qn} + A_{a,b,b}^q \delta^2 - A_{a,b,b}^q)}$$

である.

(ii)  $q$  が正の偶数かつ交差が正になるように向きを入れたときと,  $q$  が負の偶数かつ交差が負になるように向きを入れたときは,

$$\Phi_X^\beta(T(2, q)) = \sum_{a,b,c \in X} u^{w^{-q}((A_{a,b,c}^n + B_{a,b,c}^n \delta)^{\frac{q}{2}n} (A_{a,c,b}^n + B_{a,c,b}^n \delta)^{\frac{q}{2}n} + A_{a,b,c}^{\frac{q}{2}} A_{a,c,b}^{\frac{q}{2}} \delta^2 - A_{a,b,c}^{\frac{q}{2}} A_{a,c,b}^{\frac{q}{2}})}$$

である.

(iii)  $q$  が正の偶数かつ交差が負になるように向きを入れたときと,  $q$  が負の偶数かつ交差が正になるように向きを入れたときは,

$$\Phi_X^\beta(T(2, q)) = \sum_{a,b,c \in X} u^\alpha$$

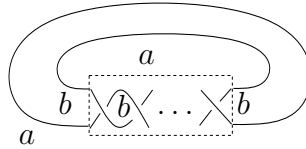
$$\begin{aligned} \alpha = & w^q((A_{a,b,c}^n \delta + B_{a,b,c}^n)^{-\frac{q}{2}n} (A_{[a,b,c],b,c}^n \delta + B_{[a,b,c],b,c}^n)^{-\frac{q}{2}n} \\ & + B_{a,b,c}^{-\frac{q}{2}} B_{[a,b,c],b,c}^{-\frac{q}{2}} \delta^2 - B_{a,b,c}^{-\frac{q}{2}} B_{[a,b,c],b,c}^{-\frac{q}{2}}) \end{aligned}$$

である.

(iv)  $q = 0$  のとき,  $\Phi_X^\beta(T(2, q)) = 8u^{\delta^2}$  である.

ただし, 交差が正のとき  $n = 1$ , 交差が負のとき  $n = -1$  とする.

証明. (i) を示す.  $q$  が奇数のとき, 図式は任意の  $a, b \in X$  によって次のように彩色される.



$q$  が 0 より大きい奇数 のとき,

$$\begin{aligned} \beta(D, C) &= w^{-q}(A_{a,b,b}^q \delta^2 + \sum_{l=1}^q \binom{q}{l} A_{a,b,b}^{q-l} B_{a,b,b}^l \delta^l) \\ &= w^{-q}((A_{a,b,b} + B_{a,b,b} \delta)^q + A_{a,b,b}^q \delta^2 - A_{a,b,b}^q) \end{aligned}$$

となる. また,  $q$  が 0 より小さい奇数のとき,

$$\begin{aligned}\beta(D, C) &= w^{|q|}((A_{a,b,b}^{-1})^{|q|}\delta^2 + \sum_{l=1}^{|q|} \binom{|q|}{l} (A_{a,b,b}^{-1})^{|q|-l} (B_{a,b,b}^{-1})^l \delta^l) \\ &= w^{|q|}((A_{a,b,b}^{-1} + B_{a,b,b}^{-1}\delta)^{|q|} + (A_{a,b,b}^{-1})^{|q|}\delta^2 - (A_{a,b,b}^{-1})^{|q|}) \\ &= w^{-q}((A_{a,b,b}^{-1} + B_{a,b,b}^{-1}\delta)^{-q} + A_{a,b,b}^q \delta^2 - A_{a,b,b}^q)\end{aligned}$$

となる. よって, 交差が正のとき  $n = 1$ , 交差が負のとき  $n = -1$  とすると,

$$\beta(D, C) = w^{-q}((A_{a,b,b}^n + B_{a,b,b}^n \delta)^{qn} + A_{a,b,b}^q \delta^2 - A_{a,b,b}^q)$$

である. したがって,

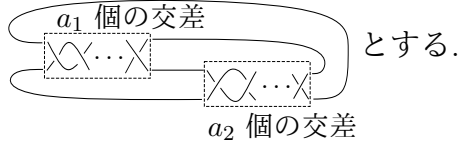
$$\Phi_X^\beta(T(2, q)) = \sum_{a,b \in X} u^{w^{-q}((A_{a,b,b}^n + B_{a,b,b}^n \delta)^{qn} + A_{a,b,b}^q \delta^2 - A_{a,b,b}^q)}$$

である.

(ii), (iii), (iv) についても同様にして計算することで主張が成り立つ.  $\square$

## 4 一般化ツイスト絡み目の量子 enhancement 多項式

Tribracket  $X$  を  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[a, b, c] = a + b - c$  とする. また, 一般化ツイスト絡み目を  $GT(a_1, a_2)$  と表し, 図式を



定理 4.1. 任意の  $\beta = (A, B)$  に対し,  $X, \beta$  に付随する一般化ツイスト絡み目  $GT(a_1, a_2)$  の量子 enhancement 多項式は,

(i)  $a_1, a_2$  が偶数のとき,

$$\Phi_X^\beta(GT(a_1, a_2)) = \sum_{a,b \in X} u^\alpha$$

$$\begin{aligned}\alpha &= w^{a_1 - a_2} (\delta^{-1} ((A_{a,b,b}^n \delta + B_{a,b,b}^n)^{-a_1 n} - B_{a,b,b}^{-a_1}) ((A_{b,a,a}^m \delta + B_{b,a,a}^m)^{a_2 m} - B_{b,a,a}^{a_2}) \\ &\quad + \delta (B_{a,b,b}^{-a_1} (A_{b,a,a}^m \delta + B_{b,a,a}^m)^{a_2 m} + B_{b,a,a}^{a_2} (A_{a,b,b}^n \delta + B_{a,b,b}^n)^{-a_1 n} - B_{a,b,b}^{-a_1} B_{b,a,a}^{a_2}))\end{aligned}$$

である.

(ii)  $a_1$  が偶数かつ  $a_2$  が奇数のとき,

$$\Phi_X^\beta(GT(a_1, a_2)) = \sum_{a,b \in X} u^\alpha$$

$$\alpha = w^{-a_1-a_2}(\delta^{-1}((A_{a,b,b}^n + B_{a,b,b}^n\delta)^{a_1n} - A_{a,b,b}^{a_1})((A_{a,b,b}^m\delta + B_{a,b,b}^m)^{a_2m} - B_{a,b,b}^{a_2}) + \delta(A_{a,b,b}^{a_1}(A_{a,b,b}^m\delta + B_{a,b,b}^m)^{a_2m} + B_{a,b,b}^{a_2}(A_{a,b,b}^n + B_{a,b,b}^n\delta)^{a_1n} - A_{a,b,b}^{a_1}B_{a,b,b}^{a_2}))$$

である.

(iii)  $a_1$  が奇数かつ  $a_2$  が偶数のとき,

$$\Phi_X^\beta(GT(a_1, a_2)) = \sum_{a,b \in X} u^\alpha$$

$$\alpha = w^{a_1+a_2}(\delta^{-1}((A_{a,b,b}^n\delta + B_{a,b,b}^n)^{-a_1n} - B_{a,b,b}^{-a_1})((A_{a,b,b}^m + B_{a,b,b}^m\delta)^{-a_2m} - A_{a,b,b}^{-a_2}) + \delta(B_{a,b,b}^{-a_1}(A_{a,b,b}^m + B_{a,b,b}^m\delta)^{-a_2m} + A_{a,b,b}^{-a_2}(A_{a,b,b}^n\delta + B_{a,b,b}^n)^{-a_1n} - B_{a,b,b}^{-a_1}A_{a,b,b}^{-a_2}))$$

である.

(iv)  $a_1, a_2$  が正の奇数かつ  $a_1$  の交差が正になるように向きを入れたとき,  $a_1$  が正の奇数,  $a_2$  が負の奇数かつ  $a_1$  の交差が正になるように向きを入れたとき,  $a_1$  が負の奇数,  $a_2$  が正の奇数かつ  $a_1$  の交差が負になるように向きを入れたとき,  $a_1, a_2$  が負の奇数かつ  $a_1$  の交差が負になるように向きを入れたときは,

$$\Phi_X^\beta(GT(a_1, a_2)) = \sum_{a,b,c \in X} u^\alpha$$

$$\alpha = w^{-a_1-a_2}(\delta^{-1}((A_{a,b,c}^n + B_{a,b,c}^n\delta)^{\frac{a_1n+1}{2}}(A_{a,c,b}^n + B_{a,c,b}^n\delta)^{\frac{a_1n-1}{2}} - (A_{a,b,c}^n)^{\frac{a_1n+1}{2}}(A_{a,c,b}^n)^{\frac{a_1n-1}{2}}) ((A_{a,b,c}^m\delta + B_{a,b,c}^m)^{\frac{a_2m+1}{2}}(A_{[a,b,c],b,c}^m\delta + B_{[a,b,c],b,c}^m)^{\frac{a_2m-1}{2}} - (B_{a,b,c}^m)^{\frac{a_2m+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^m)^{\frac{a_2m-1}{2}}) + \delta((A_{a,b,c}^n)^{\frac{a_1n+1}{2}}(A_{a,c,b}^n)^{\frac{a_1n-1}{2}}(A_{a,b,c}^m\delta + B_{a,b,c}^m)^{\frac{a_2m+1}{2}}(A_{[a,b,c],b,c}^m\delta + B_{[a,b,c],b,c}^m)^{\frac{a_2m-1}{2}} + (B_{a,b,c}^m)^{\frac{a_2m+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^m)^{\frac{a_2m-1}{2}}(A_{a,b,c}^n + B_{a,b,c}^n\delta)^{\frac{a_1n+1}{2}}(A_{a,c,b}^n + B_{a,c,b}^n\delta)^{\frac{a_1n-1}{2}} - (A_{a,b,c}^n)^{\frac{a_1n+1}{2}}(A_{a,c,b}^n)^{\frac{a_1n-1}{2}}(B_{a,b,c}^m)^{\frac{a_2m+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^m)^{\frac{a_2m-1}{2}}))$$

である.

(v)  $a_1, a_2$  が正の奇数かつ  $a_1$  の交差が負になるように向きを入れたとき,  $a_1$  が正の奇数,  $a_2$  が負の奇数かつ  $a_1$  の交差が負になるように向きを入れたとき,  $a_1$  が負の奇数,  $a_2$  が正の奇数かつ  $a_1$  の交差が正になるように向きを入れたとき,  $a_1, a_2$  が負の奇数かつ  $a_1$  の交差が正になるように向きを入れたときは,

$$\Phi_X^\beta(GT(a_1, a_2)) = \sum_{a,b,c \in X} u^\alpha$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & w^{a_1+a_2}(\delta^{-1}((A_{a,b,c}^n \delta + B_{a,b,c}^n)^{\frac{-a_1 n+1}{2}}(A_{[a,b,c],b,c}^n \delta + B_{[a,b,c],b,c}^n)^{\frac{-a_1 n-1}{2}} \\
& - (B_{a,b,c}^n)^{\frac{-a_1 n+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^n)^{\frac{-a_1 n-1}{2}}) \\
& ((A_{a,b,c}^m + B_{a,b,c}^m \delta)^{\frac{-a_2 m+1}{2}}(A_{a,c,b}^m + B_{a,c,b}^m \delta)^{\frac{-a_2 m-1}{2}} - (a_{a,b,c}^m)^{\frac{-a_2 m+1}{2}}(A_{a,c,b}^m)^{\frac{-a_2 m-1}{2}}) \\
& + \delta((B_{a,b,c}^n)^{\frac{-a_1 n+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^n)^{\frac{-a_1 n-1}{2}}(A_{a,b,c}^m + B_{a,b,c}^m \delta)^{\frac{-a_2 m+1}{2}}(A_{a,c,b}^m + B_{a,c,b}^m \delta)^{\frac{-a_2 m-1}{2}} \\
& + (A_{a,b,c}^m)^{\frac{-a_2 m+1}{2}}(A_{a,c,b}^m)^{\frac{-a_2 m-1}{2}}(A_{a,b,c}^n \delta + B_{a,b,c}^n)^{\frac{-a_1 n+1}{2}}(A_{[a,b,c],b,c}^n \delta + B_{[a,b,c],b,c}^n)^{\frac{-a_1 n-1}{2}} \\
& - (B_{a,b,c}^n)^{\frac{-a_1 n+1}{2}}(B_{[a,b,c],b,c}^n)^{\frac{-a_1 n-1}{2}}(A_{a,b,c}^m)^{\frac{-a_2 m+1}{2}}(A_{a,c,b}^m)^{\frac{-a_2 m-1}{2}})
\end{aligned}$$

である.

ただし,  $a_1$  の交差が正のとき  $n = 1$ , 交差が負のとき  $n = -1$ ,  $a_2$  の交差が正のとき  $m = 1$ , 交差が負のとき  $m = -1$  とする.

## 5 2 元集合に付随する tribracket bracket の分類

以降, tribracket  $X$  を  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[a, b, c] = a + b - c$  とし,  $R$  を整域とする. この章では, tribracket bracket の数え上げの結果と, 普遍 tribracket bracket を紹介する.

Type 1 から type 5 までの 5 種類の tribracket bracket を定義し, 任意の tribracket bracket はこれらのいずれかから得られることを説明する. 以下 tribracket bracket  $(A, B)$  を次のように行列の組で表す.

$$\begin{aligned}
A &= \left( \begin{pmatrix} A_{0,0,0} & A_{0,0,1} \\ A_{0,1,0} & A_{0,1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{1,0,0} & A_{1,0,1} \\ A_{1,1,0} & A_{1,1,1} \end{pmatrix} \right) \\
B &= \left( \begin{pmatrix} B_{0,0,0} & B_{0,0,1} \\ B_{0,1,0} & B_{0,1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1,0,0} & B_{1,0,1} \\ B_{1,1,0} & B_{1,1,1} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

**定義 5.1.** 各  $i \in \{1, \dots, 5\}$  について, 写像  $A^{(i)}, B^{(i)} : X^3 \rightarrow \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}]$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
\text{type 1 } A^{(1)} &= \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 x_3 x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix} \right) \\
B^{(1)} &= \left( \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1} x_2 x_5 \\ x_1 x_3 x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 & x_1 x_4 x_5^{-1} \\ x_1^{-1} x_2 x_3 x_4^{-1} x_5 & x_5 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{type 2 } A^{(2)} &= \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1^3 x_5^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^3 x_5^{-2} & x_4 \\ x_2 x_3 x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix} \right) \\
B^{(2)} &= \left( \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1} x_2 x_5 \\ x_1 x_3 x_5^{-1} & x_1^4 x_5^{-3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^4 x_5^{-3} & x_1 x_4 x_5^{-1} \\ x_1^{-1} x_2 x_3 x_4^{-1} x_5 & x_5 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{type 3 } A^{(3)} &= \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 x_3 x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix} \right) \\ B^{(3)} &= \left( \begin{pmatrix} x_5 & x_1 x_2 x_5^{-1} \\ x_1^{-1} x_3 x_5 & x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1} x_4 x_5 \\ x_1 x_2 x_3 x_4^{-1} x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{type 4 } A^{(4)} &= \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1^3 x_5^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^3 x_5^{-2} & x_4 \\ x_2 x_3 x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix} \right) \\ B^{(4)} &= \left( \begin{pmatrix} x_5 & x_1 x_2 x_5^{-1} \\ x_1^{-1} x_3 x_5 & x_1^4 x_5^{-3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^4 x_5^{-3} & x_1^{-1} x_4 x_5 \\ x_1 x_2 x_3 x_4^{-1} x_5^{-1} & x_5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{type 5 } A^{(5)} &= \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 x_3 x_4^{-1} & x_1 \end{pmatrix} \right) \\ B^{(5)} &= \left( \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1} x_2 x_5 \\ x_1^{-1} x_3 x_5 & x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 & x_1^{-1} x_4 x_5 \\ x_1^{-1} x_2 x_3 x_4^{-1} x_5 & x_5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

定義 2.1 の条件を確認することで,  $(A^{(i)}, B^{(i)})$  が tribracket bracket であることがわかる. さらに, 次の定理が成り立つ.

**定理 5.2.** 写像  $A, B : X^3 \rightarrow R$  に対し, 環準同型写像  $f : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}] \rightarrow R$  を次のように定める.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1_R, f(x_1) = A_{0,0,0}, f(x_2) = A_{0,0,1}, f(x_3) = A_{0,1,0}, \\ f(x_4) &= A_{1,0,1}, f(x_5) = B_{0,0,0} \end{aligned}$$

このとき,  $(A, B)$  が tribracket bracket であることと,  $(A, B) = (f \circ A^{(i)}, f \circ B^{(i)})$  となる  $i \in \{1, \dots, 5\}$  が存在することは同値である.

定理 5.4 より, 任意の tribracket bracket  $(A, B)$  は, ある  $(A^{(i)}, B^{(i)})$  と環準同型写像  $f : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}] \rightarrow R$  から得られることがわかる. このことから,  $(A^{(1)}, B^{(1)}), \dots, (A^{(5)}, B^{(5)})$  を, **普遍 tribracket bracket** と呼ぶ.

Tribracket bracket 全体の集合を  $T_{X,R}$  と表し,  $(A^{(i)}, B^{(i)})$  に環準同型写像  $f : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}] \rightarrow R$  を合成して得られる tribracket bracket 全体の集合を  $T_{X,R}^{(i)}$  と表す. このとき, 以下が成り立つ.

**系 5.3.** 任意の  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$  ( $i \neq j$ ) に対して,  $T_{X,R}^{(i)} \cap T_{X,R}^{(j)} = \bigcap_{k=1}^5 T_{X,R}^{(k)} = \{(A, B) \mid A_{0,0,0}^2 = B_{0,0,0}^2\}$  である.

**系 5.4.**  $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p \neq 2$ ) のとき,  $|T_{X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}| = 5(p-1)^5 - 8(p-1)^4$  である.



## 6 普遍 tribracket bracket から定まる量子 enhancement 多項式

Tribracket  $X$  を  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[a, b, c] = a + b - c$  とし,  $(A^{(i)}, B^{(i)})$  を  $X$  に関する普遍 tribracket bracket とする. この章では, 普遍 tribracket bracket を用いた量子 enhancement 多項式と Jones 多項式の関係について述べる.

定理 5.4 より次のことがわかる.

**系 6.1.**  $L, L'$  を絡み目とする. 任意の  $i \in \{1, \dots, 5\}$  に対して  $\Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(L')$  ならば, 任意の tribracket bracket  $(A, B)$  に対して  $\Phi_X^{(A, B)}(L) = \Phi_X^{(A, B)}(L')$  が成り立つ.

$J(L)$  を絡み目  $L$  の Jones 多項式とする. 以降, 普遍 tribracket bracket を用いた量子 enhancement 多項式と Jones 多項式の関係を検討する.

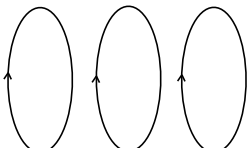
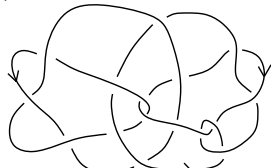
標準同型写像  $f: \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{4}}]$  を

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(x_1) = t^{-\frac{1}{4}}, f(x_2) = t^{-\frac{1}{4}}, f(x_3) = t^{-\frac{1}{4}}, \\ f(x_4) &= t^{-\frac{1}{4}}, f(x_5) = t^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

により定め,  $\beta = (f \circ A^{(5)}, f \circ B^{(5)})$  と定める. このとき, 任意の絡み目  $L$  の任意の図式  $D$  と,  $D$  の任意の  $X$ -彩色  $C$  に対して,  $\beta(D, C) = J(L)$  が成り立つ. よって, 次の命題が成り立つ.

**命題 6.2.**  $L, L'$  を絡み目とする. このとき,  $\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L) = \Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L')$  ならば,  $J(L) = J(L')$  である.

この命題より  $\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L)$  は  $J(L)$  と同じか, それより強いことがわかる. さ

らに,  $L_1 =$ ,  $L_2 =$  に対し, Thistlethwaite

[2] より,  $J(L_1) = J(L_2)$  が成り立ち, 計算機による計算より  $\Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L_1) \neq \Phi_X^{(A^{(5)}, B^{(5)})}(L_2)$  が得られるので, 以下の定理が成り立つ.

**定理 6.3.**  $(A^{(5)}, B^{(5)})$  を用いた量子 enhancement 多項式は Jones 多項式より真に強い.

また, 結び目のみを考えると, 以下が成り立つ.

**命題 6.4.**  $K, K'$  を結び目,  $J(K)$  を  $K$  の Jones 多項式とする. 任意の  $i \in \{1, \dots, 5\}$  に対して,  $\Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(K) = \Phi_X^{(A^{(i)}, B^{(i)})}(K')$  と  $J(K) = J(K')$  は同値である.

## 謝辞

本研究集会において、講演の機会をくださった東京女子大学の大山淑之先生、新國亮先生に深く感謝いたします。また、本研究集会での発表にあたり、慶應義塾大学の古宇田悠哉先生に丁寧なご指導をいただきました。心よりお礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Laura Aggarwal, Sam Nelson, and Patricia Rivera. Quantum enhancements via tribracket brackets. *Mediterr. J. Math.* 18 (2021), no. 1, Paper No. 10, 13.
- [2] Morwen Thistlethwaite. Links with trivial Jones polynomial. *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), no. 4, pp. 641–643.