

結び目正則近傍のメリディアン判定問題の計算量について

西村勇哉 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)

概要

2 成分絡み目の図式が与えられたとき、片方の結び目が、もう片方の結び目の正則近傍のメリディアンとアンビエントイソトピックであるかを判定する問題を、結び目正則近傍のメリディアン判定問題と呼ぶ。本稿では、この問題がクラス NP に属することを紹介する。

1 導入

任意の問題に対する入力は、有限長の文字列として表現されていることを仮定する。ある文字列が入力として与えられたときに、“Yes” か “No” を出力する問題を**判定問題**と呼ぶ。 A を判定問題、文字列 s を A の入力としたときの A の出力を $A(s)$ で表す。判定問題 A が **NP** に属するとは、ある決定性多項式時間 Turing 機械 M が存在して、任意の入力 s に対して、 $A(s)$ が “Yes” であるとき、かつそのときに限り s の文字数に対して多項式長の文字列 w_s が存在し、 M が (s, w_s) を受理するときをいう。また、 w_s を入力 s に対する**証拠**と呼ぶ。後述する結び目の自明性判定問題や、絡み目 $L \subset S^3$ が分離可能かどうかを判定する問題など、結び目や絡み目に関するいくつかの問題は NP に属することが証明されている ([2])。

$L = K_1 \cup K_2$ を 3 次元球面 S^3 内の 2 成分絡み目とする。 S^3 内に適切に埋め込まれた円盤 δ で、 $\partial\delta = K_1$ かつ δ と K_2 の交わりは横断的で、かつ $|\delta \cap K_2| = 1$ を満たすものが存在するとき、 K_1 は K_2 の**メリディアン**であるという。

定義 1. D を 2 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ の図式とする。 D を入力として、 K_1 が K_2 のメリディアンかどうかを判定する問題を**結び目正則近傍のメリディアン判定問題**と呼ぶ。

$L \subset S^3$ を n 成分絡み目、 D を L の図式、 c を D の交点数とする。このとき、 $n+c-1$ を D の **crossing measure** と呼ぶ。絡み目図式を入力とする問題の計算量は、その図

式の crossing measure に関する関数で測る. 詳しくは [2] を参照されたい. 一方で, 結び目正則近傍のメリディアン判定問題の入力 D は 2 成分絡み目の図式であるので, c を D の交点数としたとき, D の crossing measure は $c+1$ である. したがって, 結び目正則近傍のメリディアン判定問題の計算量は, 入力図式 D の交点数に関する関数で測ることとする.

本稿では, 次の定理が成り立つことを証明する.

定理 1. 結び目正則近傍のメリディアン判定問題は NP に属する.

2 単体分割と normal surface

2.1 単体分割

$\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ を \mathbb{R}^3 内の互いに交わらない n 個の四面体の集合とする. 四面体 Δ_i の面 σ から, 四面体 Δ_j の面 σ' ($\sigma \neq \sigma'$) へのアフィン写像を Δ 上の **貼り合わせ写像** と呼ぶ. \mathcal{F} を Δ 上の貼り合わせ写像の集合で, 各四面体の各面が高々 1 回のみ現れるものとする. このとき, $\mathcal{T} = (\Delta, \mathcal{F})$ を **単体分割** と呼ぶ. また, $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ を各貼り合わせ写像 $f \in \mathcal{F}$ で貼り合わせて得られる空間を $|\mathcal{T}|$ と表し, $|\mathcal{T}|$ が 3 次元多様体 M と同相であるとき, \mathcal{T} を M の **単体分割** と呼ぶ. $\mathcal{T} = (\Delta, \mathcal{F})$ を M の単体分割とし, $h: |\mathcal{T}| \rightarrow M$ を同相写像とする. 以降, 記号の濫用ではあるが, $\Delta_i \subset |\mathcal{T}|$ の h による像 $h(\Delta_i) \subset M$ を単に Δ_i と表す. さらに, n を \mathcal{T} の **四面体数** と呼ぶ.

2.2 Normal surface

三角形 σ に適切に埋め込まれた弧が, σ の異なる 2 辺の内部を繋ぐとき, その弧を σ の **elementary arc** と呼ぶ. また, 2 つの elementary arc $a, a' \subset \sigma$ が **同じタイプ** であるとは, σ の任意の辺 e について, $a \cap e \neq \emptyset$ であるとき, かつそのときに限り $a' \cap e \neq \emptyset$ であるときをいう. 四面体 Δ_i に適切に埋め込まれた円盤 D の境界 ∂D が, 3 本, または 4 本の elementary arc から構成されるとき, D を Δ_i の **elementary disk** と呼ぶ. また, 四面体 Δ_i 内の 2 つの elementary disk D, D' が **同じタイプ** であるとは, Δ_i の任意の辺 e に対して, $e \cap D \neq \emptyset$ であるとき, かつそのときに限り $e \cap D' \neq \emptyset$ であるときをいう. 図 1 に示すように, 四面体内には, 7 タイプの elementary disk が存在する. M をコンパクトな 3 次元多様体, S を M に適切に埋め込まれた曲面とし, $\mathcal{T} = (\Delta, \mathcal{F})$ を M の単体分割とする. 任意の四面体 $\Delta_i \subset M$ に対して, $S \cap \Delta_i$ が elementary disk

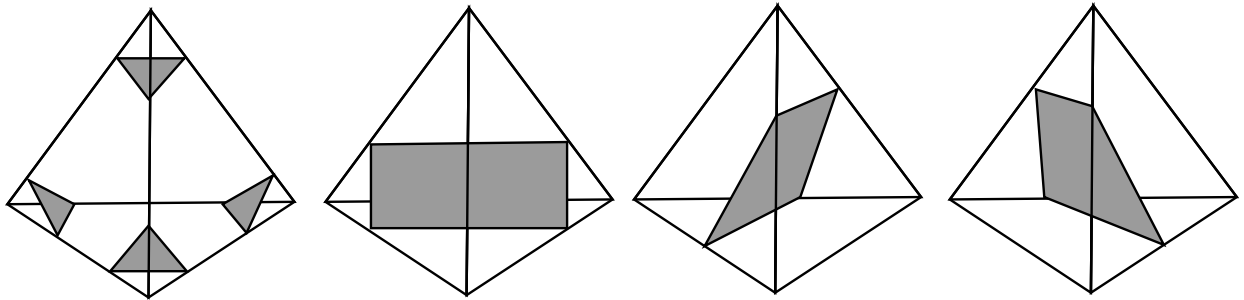


図1 四面体内の7つのタイプの elementary disk.

の非交和であるとき、 S を \mathcal{T} に関する **normal surface** と呼ぶ。また、 \mathcal{T} に関する normal surface S と \mathcal{T} の 1 骨格 $\mathcal{T}^{(1)}$ との共通部分の成分数を S の **weight** と呼び、 $\text{wt}(S)$ と表す。さらに、 $S \subset M$ とイソトピックな任意の normal surface $S' \subset M$ に対して、 $\text{wt}(S) \leq \text{wt}(S')$ が成り立つとき、 S は **least weight** であるという。

補題 1 ([4]). M をコンパクトで既約かつ境界既約な 3 次元多様体、 S を M に適切に埋め込まれた圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な曲面とする。このとき、 M の任意の単体分割 \mathcal{T} に対して、 \mathcal{T} に関する normal surface で S とイソトピックなものが存在する。

M をコンパクトな 3 次元多様体、 $\mathcal{T} = (\Delta, \mathcal{F})$ を四面体数が n の M の単体分割とする。 $S \subset M$ を \mathcal{T} に関する normal surface としたとき、 \mathcal{T} の各四面体ごとに各タイプの elementary disk の数を数えることで、整数ベクトル $\mathbf{v}(S) \in \mathbb{Z}^{7n}$ が得られる。この整数ベクトルを S の **ベクトル表現** と呼ぶ。 S, S_1, S_2 を \mathcal{T} に関する normal surface とする。これらの normal surface が $\mathbf{v}(S) = \mathbf{v}(S_1) + \mathbf{v}(S_2)$ を満たすとき、 S を S_1 と S_2 の **和** と呼び、 $S_1 + S_2$ で表す。また、normal surface S と自然数 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ に対して、 $mS = \sum_{i=1}^m S$ と定める。

補題 2 (Jaco–Tollefson [3]). M をコンパクトで既約かつ境界既約な 3 次元多様体とし、 \mathcal{T} を M の単体分割とする。 $S \subset M$ を \mathcal{T} に関する normal surface で、球面でも円盤でもなく、least weight なものとする。さらに、自然数 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ と \mathcal{T} に関する normal surface $S_1, S_2 \subset M$ が存在して、 $mS = S_1 + S_2$ が成り立つとする。このとき、 S が M 内で 2-sided かつ圧縮不可能かつ境界圧縮不可能ならば、 S_1, S_2 も圧縮不可能かつ境界圧縮不可能である。さらに、 S_1, S_2 は球面でも円盤でもない。

$\mathcal{T} = (\Delta, \mathcal{F})$ を 3 次元多様体 M の四面体数 n の単体分割とし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{7n}) \in$

\mathbb{Z}^{7n} を整数ベクトルとする. 一般には, \mathcal{T} に関する normal surface で \boldsymbol{x} に対応するものが存在するとは限らないが, 以下の 3 条件を満たすことと, \mathcal{T} に関する normal surface S が存在して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(S)$ となることが同値である. 詳しくは, [1, 2] を参照されたい. 1 つ目の条件は, 任意の $i \in \{1, \dots, 7n\}$ に対して $x_i \geq 0$ を満たすことである. 2 つ目の条件は, 隣り合う四面体に含まれる全ての elementary disk がそれらの辺で貼り合わされることである. 以下でこの条件について詳しく説明する. $f: \sigma \rightarrow \sigma'$ を Δ 上の貼り合わせ写像とし, $\sigma \subset \Delta_i$ かつ $\sigma' \subset \Delta_j$ とする. a を σ 内の elementary arc としたとき, 2 タイプの elementary disk $D_{i_1}, D_{i_2} \subset \Delta_i$ が存在して, $D_{i_1} \cap \sigma$ と $D_{i_2} \cap \sigma$ は a と同じタイプの elementary arc となる. D_{i_1} と D_{i_2} のタイプに対応する $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{7n}$ の成分をそれぞれ x_{i_1}, x_{i_2} とする. 同様に, 2 タイプの elementary disk $D_{j_1}, D_{j_2} \subset \Delta_j$ が存在して, $D_{j_1} \cap \sigma'$ と $D_{j_2} \cap \sigma'$ は $f(a)$ と同じタイプの elementary arc となる. D_{j_1} と D_{j_2} のタイプに対応する \boldsymbol{x} の成分をそれぞれ x_{j_1}, x_{j_2} とする. このとき, f による四面体の面の貼り合わせで, それぞれの四面体内の elementary disk が貼り合わされているならば, $x_{i_1} + x_{i_2} = x_{j_1} + x_{j_2}$ が成り立つ. \mathcal{T} の貼り合わせ写像は最大で $2n$ 個存在し, 1 つの三角形には 3 タイプの elementary arc が存在するので, \mathcal{T} に含まれる任意の隣り合う 2 つの四面体に含まれる elementary disk が貼り合わされるためには, 最大で $6n$ 個の等式を満たす必要がある. これらの等式を \mathcal{T} の **matching 連立方程式** と呼び, その係数行列 $A_{\mathcal{T}}$ を \mathcal{T} の **matching 行列** と呼ぶ. 2 つ目の条件は, \boldsymbol{x} が \mathcal{T} の matching 連立方程式 $A_{\mathcal{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たすことである. 3 つ目の条件は, \mathcal{T} の任意の四面体 Δ_i について, Δ_i 内に含まれる四面体が高々 1 タイプであることである. 整数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{7n}$ がこれらの条件を満たすとき, かつそのときに限り \mathcal{T} に関する normal surface S が存在して, $\boldsymbol{v}(S) = \boldsymbol{x}$ を満たす.

M をコンパクトな 3 次元多様体, \mathcal{T} を n 個の四面体からなる M の単体分割とする. $A_{\mathcal{T}}$ を \mathcal{T} の matching 行列とする. このとき, $A_{\mathcal{T}}$ の核と $\{x_i \in \mathbb{R}^{7n} \mid x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{7n}$ の共通部分として定義される \mathbb{R}^{7n} の部分空間 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^{7n}$ を \mathcal{T} の **Haken normal cone** と呼ぶ. \mathcal{T} に関する normal surface $S \subset M$ が **vertex surface** であるとは, S が連結かつ M 内で 2-sided であり, そのベクトル表現 $\boldsymbol{v}(S) \in \mathbb{R}^{7n}$ が $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ の 1 次元の辺上にあるときをいう. \mathcal{T} に関する任意の normal surface S のベクトル表現 $\boldsymbol{v}(S)$ は $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ の元であるので, ある自然数 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ と有限個の vertex surface V_1, \dots, V_k が存在して, $m\boldsymbol{v}(S) = V_1 + \dots + V_k$ とかける.

3 結び目正則近傍のメリディアン判定問題の証拠

$L = K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{S}^3$ を有向 2 成分絡み目とし, D を L の図式とする. K_1 と K_2 からなる全ての交点の符号の和を 2 で割って得られる値を D の絡み数と呼ぶ. また, 絡み数は L の図式の取り方によらないので, L のある図式に対する絡み数を L の絡み数と呼び, $\text{lk}(L)$ と表す. 絡み数は, 有向絡み目に対する不変量であるが, その絶対値は各成分の向きの付け方によらずに定まる. したがって, 向きのついていない絡み目 $L \subset \mathbb{S}^3$ についても, L の各成分にある向きを定めたときの絡み数の絶対値を $|\text{lk}(L)|$ で表す.

補題 3. $L = K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{S}^3$ を 2 成分絡み目とし, $E(L) = \mathbb{S}^3 - \text{int}N(L)$ を L の外部空間とする. このとき, K_1 が K_2 のメリディアンであるための必要十分条件は, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であり, かつ本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在することである.

証明. K_1 が K_2 のメリディアンであると仮定する. このとき, 円盤 $\delta \subset \mathbb{S}^3$ が存在して, $\partial\delta = K_1$ かつ $|\delta \cap K_2| = 1$ を満たす. したがって, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 は自明絡み目である. また, $A = \delta \cap E(L)$ とすれば, A は $E(L)$ 内の本質的アニュラスで $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たす.

次に, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であり, かつ本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在すると仮定する. まず, $A \cap \partial N(K_2)$ が $N(K_2)$ のメリディアンであると仮定する. このとき, 円盤 $\delta' \subset N(K_2)$ で $\partial\delta' \subset \partial A$ を満たすものが存在する. また, A は $E(K)$ において本質的であるので, $\partial A \cap \partial N(K_1)$ は $\partial N(K_1)$ において本質的であり, $\partial(A \cup \delta') = \partial A \cap \partial N(K_1)$ も $\partial N(K_1)$ において本質的である. したがって, $A \cup \delta'$ は $E(K_1) = \mathbb{S}^3 - \text{int}N(K_1)$ 内の本質的円盤であり, $A \cup \delta'$ を $E(K_1)$ 内のイソトピーで変形することで $\partial(A \cup \delta')$ と $N(K_1)$ のメリディアンが一点のみで交わるようにできる. よって, 円盤 $\delta \subset \mathbb{S}^3$ で $\partial\delta = K_1$ かつ $|\delta \cap K_2| = 1$ を満たすものが存在することが分かる. ゆえに, K_1 は K_2 のメリディアンである.

次に, $A \cap \partial N(K_2)$ が $N(K_2)$ のメリディアンではないとする. 仮定から K_1 は自明結び目であるので, $E(K_1) = \mathbb{S}^3 - \text{int}N(K_1)$ はソリッドトーラスである. このとき, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ, 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2)$ は $N(K_2)$ のメリディアンではないものが存在するので, K_2 はソリッドトーラス $E(K_1)$ のコアである ([5]). ここで, ソリッドトーラス $V = D^2 \times \mathbb{S}^1$ 内の結

び目 K が V のコアであるとは、 x を D^2 の内部の点としたときに、 K が $\{x\} \times S^1$ とアンビエントイソトピックなときをいう。 K_2 はソリッドトーラス $E(K_1)$ のコアであるので、本質的円盤 $\delta' \subset E(K_1)$ で K_2 と一点で交わるものが存在する。したがって、 K_1 は K_2 のメリディアンである。 \square

補題 3 より、2 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ の図式 D が与えられたとき、 K_1 が K_2 のメリディアンであることを確かめるためには、 $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であり、かつ本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在することを確かめればよい。有向絡み目 $L \subset S^3$ の図式 D が与えられたとき、 L の絡み数 $\text{lk}(L)$ は、 D の各交点の符号を足し合わせて 2 で割ることで得られる。したがって、 $\text{lk}(L)$ は D の交点数に対して多項式時間で計算できる。よって、向きのついていない絡み目 $L \subset S^3$ の図式 D が与えられたとき、 $|\text{lk}(L)|$ は D の交点数に対して多項式時間で計算可能であり、1 つ目の条件は多項式時間で判定することができる。

結び目 $K \subset S^3$ の図式 D が与えられたときに、 K が自明結び目かどうか判定する問題を**結び目の自明性判定問題**と呼ぶ。次の定理より、2 つ目の条件を判定する問題はクラス NP に属することがわかる。

定理 2 (Hass–Lagarias–Pippenger [2]). 結び目の自明性判定問題はクラス NP に属する。

以上より、結び目正則近傍のメリディアン判定問題が NP に属することを証明するためには、 $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目のときに、本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在するかどうかを判定する問題が、NP に属することを示せばよい。以下では、そのようなアニュラス A が存在するならば、 A は L の図式 D の交点数に関して多項式長で符号化できることを示す。

補題 4 (Hass–Lagarias–Pippenger [2]). $L \subset S^3$ を絡み目、 D を L の図式とし、 D の交点数を c とする。このとき、 D を入力として受け取り、 L の外部空間の単体分割 \mathcal{T}_L を出力する多項式時間アルゴリズムが存在する。また、 \mathcal{T}_L の四面体数は高々 $\mathcal{O}(c)$ である。

補題 5 (Hass–Lagarias–Pippenger [2]). \mathcal{T} を 3 次元多様体 M の単体分割で、四面体数が n のものとする。また、 S を \mathcal{T} に関する vertex surface とし、 $v(S) = (x_1, \dots, x_{7n}) \in \mathbb{Z}^{7n}$ を S のベクトル表現とする。このとき、任意の i について、 $x_i \leq 2^{7n-1}$ が成り立つ。

補題 5 より、四面体数が n の単体分割 \mathcal{T} に関する vertex surface S のベクトル表現は、 n に関して多項式長の文字列で表現できることがわかる。さらに、 D を絡み目 $L \subset S^3$ の交点数 c の図式とし、 \mathcal{T}_L を補題 4 のアルゴリズムにより得られる L の外部空

間 $E(L)$ の単体分割とすると, \mathcal{T}_L に関する vertex surface $S \subset E(L)$ は, 交点数 c に関して多項式長の文字列で表現できることがわかる.

補題 6. $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ を 2 成分絡み目とし, K_1 は K_2 のメリディアンであるとする. $E(L)$ を L の外部空間とし, F を $E(L)$ に適切に埋め込まれたアニュラスとする. このとき, $\partial F \subset \partial N(K_1)$ ならば, F は圧縮可能であるか, または境界圧縮可能である.

証明.

F は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能であると仮定する. ∂F の成分で, $\partial N(K_1)$ において非本質的なものが存在すると, F は圧縮可能である. したがって, ∂F の各成分は $\partial N(K_1)$ において本質的である.

補題 3 より, K_1 は自明結び目であるので, $E(K_1) = S^3 - \text{int}N(K_1)$ はソリッドトーラスである. したがって, F は $E(K_1)$ において境界平行であり, F と $\partial E(K_1)$ の一部はソリッドトーラス $V \subset E(K_1)$ を張る. もし $K_2 \not\subset V$ ならば, F は $E(L)$ においても境界平行であるが, これは F が境界圧縮不可能であることに矛盾する. したがって, $K_2 \subset V$ である. K_1 は K_2 のメリディアンであるので, 円盤 $\delta \subset S^3$ が存在して, $\partial\delta = K_1$ かつ $|\delta \cap K_2| = 1$ を満たす. $A = \delta \cap E(L)$ とする. F と A は横断的に交わり, かつ $|F \cap A|$ が最小になるように A を $E(L)$ 内のイソトピーで変形する. $|\text{lk}(L)| = 1$ であるので, ∂F の各成分は $E(K_1)$ をロンジチュード方向に 1 回だけ回っている. したがって, $\partial F \cap \partial A \neq \emptyset$ であり, 弧 $\alpha \subset F \cap A$ が存在する. $\partial F \subset \partial N(K_1)$ より, α は ∂A の同じ成分を繋ぐ. よって, α と ∂A の一部は円盤 $D_A \subset A$ を張る.

$D_A \cap F$ に円周が存在すると仮定する. $\beta \subset D_A \cap F$ を D_A における最も内側の円周とする. F は $E(L)$ において圧縮不可能なので, β は F において円盤 $D_F \subset F$ を張る. $\text{int}D_F \cap \text{int}D_A = \emptyset$ であるので, $D_F \cup D_A$ は $E(L)$ に適切に埋め込まれた 2 次元球面である. $|\text{lk}(L)| = 1$ より, $E(L)$ は既約であるので, $D_F \cup D_A \subset E(L)$ は 3 次元球体 $B \subset E(L)$ を張る. よって, B に沿ったイソトピーで $F \cap A$ の成分数を減らすことができるが, これは $|F \cap A|$ の最小性に矛盾する. したがって, $D_F \cap A$ に円周は存在しない.

α を A における最も外側の弧に取り直し, α と ∂A の一部が張る円盤を再び $D_A \subset A$ とする. F は境界圧縮不可能であるので, α は F において非本質的であり, α と ∂F の一部は円盤 $D_F \subset F$ を張る. $D_A \cup D_F$ は $E(L)$ に適切に埋め込まれた円盤であり, $|\text{lk}(L)| = 1$ より $E(L)$ は既約かつ境界既約であるので, $\partial(D_A \cup D_F)$ は $\partial E(L)$ において円盤 $D' \subset \partial E(L)$ を張る. $E(L)$ の既約性から, $D_A \cup D_F \cup D'$ は 3 次元球体 $B \subset E(L)$ を張る. したがって, B に沿ったイソトピーで $F \cap A$ の成分数を減らすことができるが, これは $|F \cap A|$ の最小性に矛盾する. 以上より, F は圧縮可能であるか, 境界圧縮可能

である. □

補題 7. $L = K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{S}^3$ を 2 成分絡み目とし, \mathcal{T}_L を L の外部空間 $E(L)$ の単体分割とする. このとき, K_1 が K_2 のメリディアンならば, \mathcal{T} に関する vertex surface $A \subset E(L)$ で, かつ A は本質的アニュラスで, $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する.

証明. K_1 は K_2 のメリディアンであると仮定する. 補題 3 より, 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する. 補題 1 より, \mathcal{T}_L に関する normal surface で A とイソトピックなものが存在するので, その normal surface を改めて A とおく. このとき, 自然数 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ と \mathcal{T}_L に関する vertex surface V_1, \dots, V_k が存在して, $mA = V_1 + \dots + V_k$ とかける. A は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能なので, 補題 2 より, 任意の i について V_i は円盤でも球面でもなく, 圧縮不可能かつ境界圧縮不可能である. したがって, 任意の i について $\chi(V_i) \leq 0$ が成り立つ. ただし, $\chi(V_i)$ は V_i の Euler 標数を表す. また, $0 = \chi(mA) = \chi(V_1 + \dots + V_k) = \chi(V_1) + \dots + \chi(V_k)$ より, 任意の i について, $\chi(V_i) = 0$ である. Vertex surface は $E(L)$ 内で 2-sided であることに注意すると, 任意の i について V_i はアニュラスかトーラスのどちらかである. 特に, $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ であるので, アニュラスである vertex surface V_j で, $V_j \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する. $\partial V_j \subset \partial N(K_1)$ を仮定すると, 補題 6 より, V_j は圧縮可能または境界圧縮可能であるが, これは V_j が圧縮不可能かつ境界圧縮不可能であることに矛盾する. したがって, $V_j \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $V_j \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ が成り立つ. □

以上の準備のもと, 定理 1 の証明を行う.

定理 1. 結び目正則近傍のメリディアン判定問題はクラス NP に属する.

証明. $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分絡み目とし, D を L の交点数 c の図式とする. 補題 3 より, K_1 が K_2 のメリディアンであるための必要十分条件は, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であり, かつ本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在することである. 前述したように, $|\text{lk}(L)|$ は交点数に対して多項式時間で計算可能であり, 結び目の自明性判定問題はクラス NP に属する. したがって, $|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であるときに, 本質的アニュラス $A \subset E(L)$ で $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在するかどうかを判定する問題が NP に属することを示せばよい.

$|\text{lk}(L)| = 1$ かつ K_1 が自明結び目であることを仮定する. 補題 4 より, D が与えられたときに, L の外部空間 $E(L)$ の単体分割 \mathcal{T}_L を出力する多項式時間アルゴリズムが存在する. また, \mathcal{T}_L の四面体数 n は高々 $\mathcal{O}(c)$ である. $E(L)$ に適切に埋め込まれた本質的アニュラスで, $E(L)$ の両方の境界と交わるものが存在すること, すなわち, K_1 は K_2 のメリディアンであることを仮定する. 補題 7 より, \mathcal{T}_L に関する vertex surface $A \subset E(L)$ で, A は本質的アニュラスかつ, $A \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $A \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する. $v(A)$ を A のベクトル表現とする. ベクトル $x_F \in \mathbb{Z}^{7n}$ と \mathcal{T}_L を受け取り, x_F が \mathcal{T}_L に関する normal surface F を表し, かつ F は $E(L)$ 内の本質的アニュラスで $F \cap \partial N(K_1) \neq \emptyset$ かつ $F \cap \partial N(K_2) \neq \emptyset$ を満たすかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムが存在する ([5]). また, A は \mathcal{T}_L に関する vertex surface なので, 補題 5 より, $v(A)$ は c に対して多項式長の文字列で表現できる. したがって, この問題は NP に属する. 以上より, 結び目正則近傍のメリディアン判定問題はクラス NP に属する. \square

謝辞

本研究集会において, 講演の機会を与えてくださった東京女子大学の大山淑之先生, ならびに新國亮先生に感謝申し上げます. また, 本研究は, 研究集会トポロジーとコンピュータ 2023 における筆者の講演に対する, 慶應義塾大学の石川昌治先生からの質問をきっかけとしております. このような研究を始めるきっかけいただきましたことに感謝申し上げます. また, 本研究集会での発表にあたって, 慶應義塾大学の古宇田悠哉先生には丁寧なご指導をいただきましたこと, お礼申し上げます. 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2129 の支援を受けたものです.

参考文献

- [1] Wolfgang Haken. Theorie der Normalflächen. *Acta Math.*, 105:245–375, 1961.
- [2] Joel Hass, Jeffrey C. Lagarias, and Nicholas Pippenger. The computational complexity of knot and link problems. *J. ACM*, 46(2):185–211, 1999.
- [3] William Jaco and Jeffrey L. Tollefson. Algorithms for the complete decomposition of a closed 3-manifold. *Illinois J. Math.*, 39(3):358–406, 1995.

- [4] Sergei Matveev. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, volume 9 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 2007.
- [5] Yuya Nishimura. The computational complexity of the solid torus core recognition problem. *To appear in Hiroshima Mathematical Journal*.