

結び目の $(1, 1)$ -分解の Goeritz 群

田中 勇輝 (広島大学大学院 先進理工系科学研究科)

概要

L を 3 次元多様体 M 内の絡み目とする. $(M, L; \Sigma)$ が (M, L) の (g, n) -分解であるとは, $M = V_1 \cup_{\Sigma} V_2$ が種数 g の Heegaard 分解であり, Heegaard 曲面 Σ が L を 2 つの自明な n -タングルに分解するときをいう. この分解を保つ写像類群, すなわち 3 対 (M, V_1, L) を保つ M の向き保存自己同相写像のイソトピー類を, この (g, n) -分解 $(M, L; \Sigma)$ の Goeritz 群とよぶ. 本稿では, 結び目の $(1, 1)$ -分解の Goeritz 群を決定する.

1 橋分解とその Goeritz 群

はじめに, 本稿で使用する記号と設定をまとめる. 多様体内の曲線や円盤は, 交わりが最小の位置にあるものとする. 単純閉曲線 c に沿った Dehn twist を τ_c と書く. 曲面上の単純閉曲線 (のイソトピー類) c_1, c_2 に対して, c_1 と c_2 の幾何的交点数を $\iota(c_1, c_2)$ と書く. 曲面上の有向単純閉曲線 c_1, c_2 に対して, c_1 と c_2 の代数的交点数を $i(c_1, c_2)$ と書く.

1.1 橋分解

任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体 M は, ある閉曲面 Σ で切り開くことにより 2 つのハンドル体 V_1, V_2 に分解することができる. この分解 $M = V_1 \cup_{\Sigma} V_2$ を $(V_1, V_2; \Sigma)$ と書き, M の **Heegaard 分解**とよぶ. また, 閉曲面 Σ の種数をこの分解 $(V_1, V_2; \Sigma)$ の種数とよぶ.

定義 1.1 (タングル). V を種数 g のハンドル体とする. V に適切に埋め込まれた n 本の弧 $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ を **n -タングル**とよぶ. n -タングル $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ が**自明**であるとは, 各 i に対して, 円盤 $D_i \subset V$ が存在して, $T_i \subset \partial D_i$, $\partial D_i - T_i \subset \partial V$ かつ $D_i \cap D_j = \emptyset$ ($i \neq j$) が成り立つときをいう. このとき, (D_1, D_2, \dots, D_n) を n -タングル $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ の **canceling 円盤**とよぶ.

Heegaard 分解とタングルの自明性を用いて, 絡み目の橋分解が次のように定義される.

定義 1.2 (橋分解). M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, L を M 内の絡み目とする. $(V_1, V_2; \Sigma)$ を多様体 M の種数 g の Heegaard 分解とする. $V_1 \cap L$ が V_1 内の自明な n -タングルであり, $V_2 \cap L$ が V_2 内の自明な n -タングルであるとき, この分解 $(M, L) = (V_1, V_1 \cap L) \cup_{\Sigma} (V_2, V_2 \cap L)$ を L の (一般化された) **橋分解**または **(g, n) -分解**とよぶ. この橋分解を $(M, L; \Sigma)$ と書く.

M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, K を M 内の結び目とする. $\partial D = K$ となる M 内の円盤 D が存在するとき, K を**自明な結び目**とよぶ. $K \subset \Sigma$ となる M

の種数 1 の Heegaard 曲面 Σ が存在するとき, K をトールス結び目とよぶ. 外部空間 $M - \text{Int}(\text{Nbd}(K))$ がソリッドトールスであるとき, K を M のコア結び目とよぶ.

1.2 橋分解の距離

$\Sigma_{g,k}$ を種数 g の k 個穴あき向き付け可能閉曲面とする. $\Sigma_{g,k}$ の曲線グラフを $\mathcal{C}(\Sigma_{g,k})$ と書く. $\mathcal{C}(\Sigma_{g,k})$ が空でなく, 連結であるための必要十分条件は, $3g - 4 + k > 0$ である (例えば [5] を参照のこと). このとき, $\mathcal{C}(\Sigma_{g,k})$ 上の距離 $d_{\mathcal{C}(\Sigma_{g,k})}$ が

$$d_{\mathcal{C}(\Sigma_{g,k})}(x, y) := \min\{\mathcal{C}(\Sigma_{g,k}) \text{ の辺の長さを } 1 \text{ としたときの } x \text{ と } y \text{ を結ぶ道の長さ}\}$$

により定まる.

定義 1.3 (橋分解の距離). $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ とする. M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, L を M 内の絡み目とする. $(M, L; \Sigma)$ を (g, n) -分解とすると, 種数 g の $2n$ 個穴あき閉曲面を $\Sigma' := \Sigma - L$ で定義する. このとき, $\mathcal{C}(\Sigma')$ 上で距離 $d_{\mathcal{C}(\Sigma')}$ が定義できる. $\mathcal{C}(\Sigma')$ の頂点で $V_i - L$ 上で円盤を張るものがなす最大の部分複体を $\mathcal{D}(V_i - L)$ と表す. このとき, (g, n) -分解 $(M, L; \Sigma)$ の距離 $d(M, L; \Sigma)$ を

$$d(M, L; \Sigma) := d_{\mathcal{C}(\Sigma')}(\mathcal{D}(V_1 - L), \mathcal{D}(V_2 - L))$$

で定義する.

距離が 1 以下の橋分解をもつ結び目は, 下記のように分類される.

定理 1.4 (Saito [7]). M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, K を M 内の結び目とする. $(M, K; \Sigma)$ を $(1, 1)$ -分解とする. 橋分解の距離に関して, 次が成立する.

- (1) K が自明な結び目であることは, $d(M, K; \Sigma) = 0$ が成立するための必要十分条件である.
- (2) $M = S^2 \times S^1$ かつ K がコア結び目であることは, $d(M, K; \Sigma) = 1$ が成立するための必要十分条件である.

1.3 橋分解の Goeritz 群

橋分解の Goeritz 群を定義し, 関連する先行研究を紹介する.

定義 1.5 (橋分解の Goeritz 群). M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, L を M 内の絡み目とする. $(M, L) = (V_1, V_1 \cap L) \cup_{\Sigma} (V_2, V_2 \cap L)$ を橋分解とする. $\text{MCG}^+(M, V_1, L)$ を $(M, L; \Sigma)$ の **Goeritz 群** とよび, $\mathcal{G}(M, L; \Sigma)$ と表す.

橋分解の距離を用いた, (g, n) -分解の Goeritz 群に関する結果として, 以下が示されている.

定理 1.6 (Iguchi–Koda [5]). $(M, L; \Sigma)$ を (g, n) -分解とする. ただし, $(g, n) \neq$

$(0, 1), (0, 2), (1, 1)$ とする. $d(M, L; \Sigma) \geq 6$ であるとき, Goeritz 群 $\mathcal{G}(M, L; \Sigma)$ は有限群である.

この定理で除外されている (g, n) のうち, $(g, n) = (0, 1), (0, 2)$ の場合については, Hirose–Iguchi–Kin–Koda [4] で次のことが言及されている.

- $(g, n) = (0, 1)$ のとき, $M = S^3$ で L は自明な結び目であり, $\mathcal{G}(M, L; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.
- $(g, n) = (0, 2)$ かつ L が結び目であるとき, $\mathcal{G}(M, L; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

本稿では, $(g, n) = (1, 1)$ の場合について議論する.

2 タングルの写像類群 $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$

M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, L を M 内の絡み目とする. $(M, L) = (V_1, V_1 \cap L) \cup_{\Sigma} (V_2, V_2 \cap L)$ を橋分解とすると, 以下の写像 (1), (2) の単射性が従う.

- (1) $\mathcal{G}(M, L; \Sigma) \hookrightarrow \text{MCG}^+(\Sigma, \Sigma \cap L); [f] \mapsto [f|_{\Sigma}]$.
- (2) $\text{MCG}^+(V_i, V_i \cap L) \hookrightarrow \text{MCG}^+(\Sigma, \Sigma \cap L); [f] \mapsto [f|_{\Sigma}]$ ($i = 1, 2$).

従って, 群 $\mathcal{G}(M, L; \Sigma)$, $\text{MCG}^+(V_i, V_i \cap L)$ ($i = 1, 2$) はそれぞれ $\text{MCG}^+(\Sigma, \Sigma \cap L)$ の部分群とみなせる. さらに,

$$\mathcal{G}(M, L; \Sigma) = \text{MCG}^+(V_1, V_1 \cap L) \cap \text{MCG}^+(V_2, V_2 \cap L) < \text{MCG}^+(\Sigma, \Sigma \cap L)$$

とみなせる.

$(M, L) = (V_1, V_1 \cap L) \cup_{\Sigma} (V_2, V_2 \cap L)$ を $(1, 1)$ -分解とする. M は種数 1 の Heegaard 分解を許容するため, M は S^3 , $S^2 \times S^1$, または, レンズ空間となる. また, $(1, 1)$ -分解を許容する絡み目は, 結び目に限られるため, L ではなく K と書く. V_i 内の自明な 1-タングルを $T_i := V_i \cap K$ ($i = 1, 2$) と書く. この章では, $(1, 1)$ -分解の Goeritz 群 $\mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ の表示を求めるために重要となる, タングルの写像類群 $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ について解説する.

2.1 Canceling 円盤のなす複体

この節では, $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ の表示を得るために必要となる canceling 円盤のなす単体複体を定義し, その性質を解説する.

$\text{Nbd}(T_1; V_1)$ を $D^2 \times [0, 1]$ と同一視して, C_{T_1} を円盤 $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ の境界とする. $\text{Cl}(V_1 - \text{Nbd}(T_1; V_1))$ は種数 2 のハンドル体である. このハンドル体を \tilde{V}_1 とおく. 2-ハンドル $D^2 \times [0, 1]$ を C_{T_1} に沿って \tilde{V}_1 に接着することで, (\tilde{V}_1, C_{T_1}) から (V_1, T_1) が復元できる. ここで, 自然な対応により

$$\text{MCG}^+(V_1, T_1) \cong \text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$$

が得られる. \tilde{V}_1 内の円盤でその境界が, C_{T_1} と 1 点で横断的に交わるものを (\tilde{V}_1, C_{T_1}) の

canceling 円盤とよぶ. (V_1, T_1) の canceling 円盤 (のイソトピー類) の集合と (\tilde{V}_1, C_{T_1}) の canceling 円盤 (のイソトピー類) の集合との間には自然な全単射があることに注意する.

種数 g のハンドル体 V の円盤複体を $D(V)$ と書く.

定義 2.1 (Canceling 円盤のなす複体). 円盤複体 $D(\tilde{V}_1)$ のフルな部分複体であって, 頂点集合が (\tilde{V}_1, C_{T_1}) 内の canceling 円盤のイソトピー類の集合であるものを **canceling 円盤のなす複体**とよび, $\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ と表す.

複体 $\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ は, 1次元単体複体である. また, Cho [1] の Theorem 4.2 を用いて, 複体 $\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の可縮性が示される. 従って, 複体 $\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ は木である.

2.2 $MCG^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の表示

$i = 1, 2$ に対して, T_i と交わらない V_i のメリディアン円盤の境界を m_i とおく. m_i はイソトピーを法として, 一意であることを注意する. これは, 対 (\tilde{V}_1, C_{T_1}) に対して, C_{T_1} と交わらない \tilde{V}_1 内の非分離的な円盤は一意的であることから従う. 詳しくは, Funayoshi-Koda [3] の Corollary 2.2 を参照のこと.

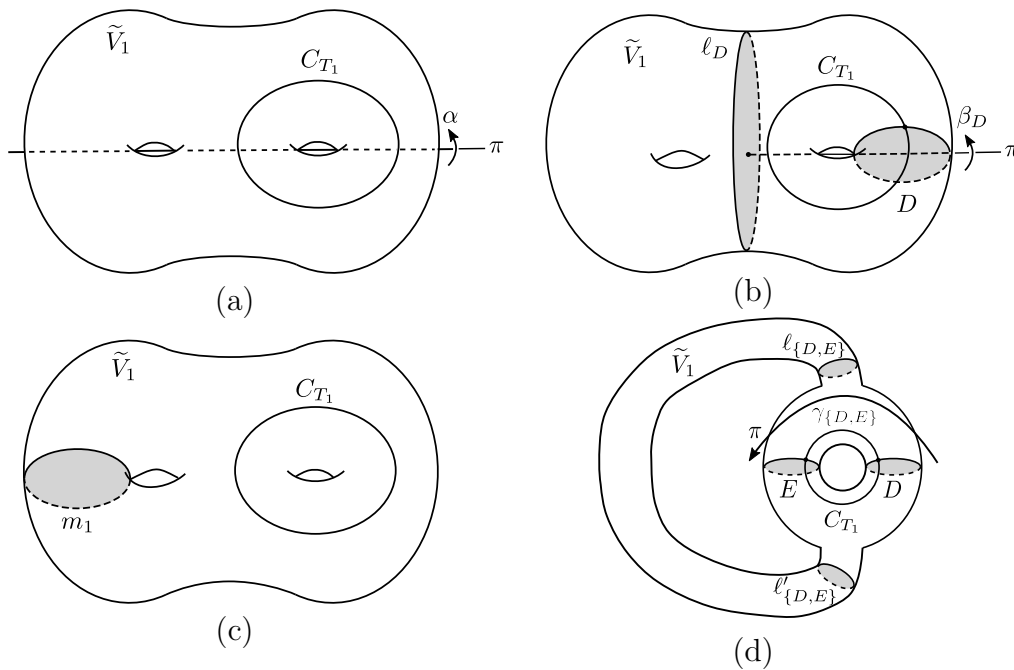


図1 $\alpha, \beta_D, \tau, \gamma_{\{D,E\}} \in MCG^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$.

まず, $MCG^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の特別な元 $\alpha, \beta_D, \tau, \gamma_{\{D,E\}}$ を次のように定める. 互いに交わらない2つの canceling 円盤 D, E を固定する.

- 種数 g の向き付け可能な閉曲面 Σ_g の **hyperelliptic involution** とは, 1次元ホモロジー群 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ への誘導写像が $-id_{H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})}$ である $MCG^+(\Sigma_g)$ の位数2

の元である。種数 2 の閉曲面 $\partial\tilde{V}_1$ の hyperelliptic involution は一意的であり、これを \tilde{V}_1 に伸ばしたものを α と定める (図 1 (a) 参照). 詳しくは, [2] の Chapter 7 を参照のこと.

- $\ell_D := \partial(\text{Nbd}(\partial D \cup C_{T_1}; \partial\tilde{V}_1))$ とおく. β_D を図 1 (b) のような ℓ_D に沿った half twist で定める.
- $\tau_{m_1} \in \text{MCG}^+(\partial\tilde{V}_1)$ を \tilde{V}_1 に伸ばしたものを τ と定める.
- $\partial(\text{Nbd}((\partial D \cup \partial E) \cup C_{T_1}; \partial\tilde{V}_1))$ は $\partial\tilde{V}_1$ 上の 2 つの単純閉曲線となる. これら 2 つの単純閉曲線を $\ell_{\{D,E\}}, \ell'_{\{D,E\}}$ とおく. $\gamma_{\{D,E\}}$ を図 1 (d) のような $\ell_{\{D,E\}}, \ell'_{\{D,E\}}$ に沿った half twist で定める. $\gamma_{\{D,E\}}$ は, 2 つの canceling 円盤 D, E を入れ替える位数 2 の元である.

木 $\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の重心細分 $\text{Sd}(\mathcal{C}(\tilde{V}_1, C_{T_1}))$ を \mathcal{T} とおく. D と $\{D, E\}$ を \mathcal{T} の頂点とし, e を 2 つの頂点 $D, \{D, E\}$ が張る \mathcal{T} の辺とする. (\tilde{V}_1, C_{T_1}) 内の canceling 円盤の $\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の元による像は, また canceling 円盤となる. よって, 群 $\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ の木 \mathcal{T} への作用が自然に定まる. この群作用による商グラフ $\Gamma := \mathcal{T}/\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ は図 2 のようなグラフとなる.

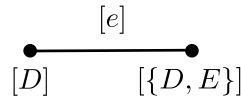


図 2 $\Gamma = \mathcal{T}/\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$.

Bass–Serre 理論 ([8]) より, $\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1})$ は安定化部分群と群の融合積を用いて, $\text{MCG}^+(\tilde{V}_1, C_{T_1}) = \text{Stab}(D) *_{\text{Stab}(e)} \text{Stab}(\{D, E\})$ と表される. ここで, 安定化部分群 $\text{Stab}(D), \text{Stab}(\{D, E\}), \text{Stab}(e)$ は次の表示をもつ.

- $\text{Stab}(D) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta_D\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle$.
- $\text{Stab}(\{D, E\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma_{\{D,E\}}\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle$.
- $\text{Stab}(e) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle$.

従って, 以下が示される.

命題 2.2. タングル (V_1, T_1) の写像類群 $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ は次の表示をもつ.

$$\text{MCG}^+(V_1, T_1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle.$$

3 主結果とその証明

3.1 (1, 1)-分解の Goeritz 群の有限表示

この節では, 本稿の主結果である結び目の (1, 1)-分解の Goeritz 群の有限表示を紹介し, その証明に必要な補題を与える.

主結果を述べるために、まず、特殊な対称性をもつ $(1, 1)$ -分解を定義する。

定義 3.1. p と q を互いに素な整数とし、 p を 0 でない偶数とする。 $i = 1, 2$ に対して、 V_i をソリッドトーラスとし、 T_i を V_i 内の自明なタングルとする。 f を \mathbb{R}^2 からトーラス $\partial V_1 (= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ への普遍被覆写像とする。 さらに、 $\partial T_1 = \{t, t'\}$ としたとき、 $f^{-1}(\{t\}) = \{(n, m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, $f^{-1}(\{t'\}) = \{(n + \frac{1}{2}, m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つと仮定する。 \mathbb{R}^2 上の直線族 $\mathcal{L} = \{L_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ を次で定める (図 3 左参照)。

$$L_k : y = \frac{p}{q} \left(x - \frac{k}{p} \right) + \sqrt{2}.$$

$f \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k \right)$ は、 $\partial V_1 - \{t, t'\}$ 上の単純閉曲線である (図 3 右参照)。 m_2 を T_2 と交わらない V_2 のメリディアン円盤の境界とおく。 このとき、 T_1 と T_2 の端点同士が共有されるように、 m_2 と $f \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k \right)$ を貼り合わせることで、 レンズ空間 $L(p, q)$ 内のある結び目 $K_{p/q}$ の $(1, 1)$ -分解を得る。 $\Sigma_{p/q} := \partial V_1 = \partial V_2 \subset L(p, q)$ とおくと、 この $(1, 1)$ -分解は $(L(p, q), K_{p/q}; \Sigma_{p/q})$ と書ける。

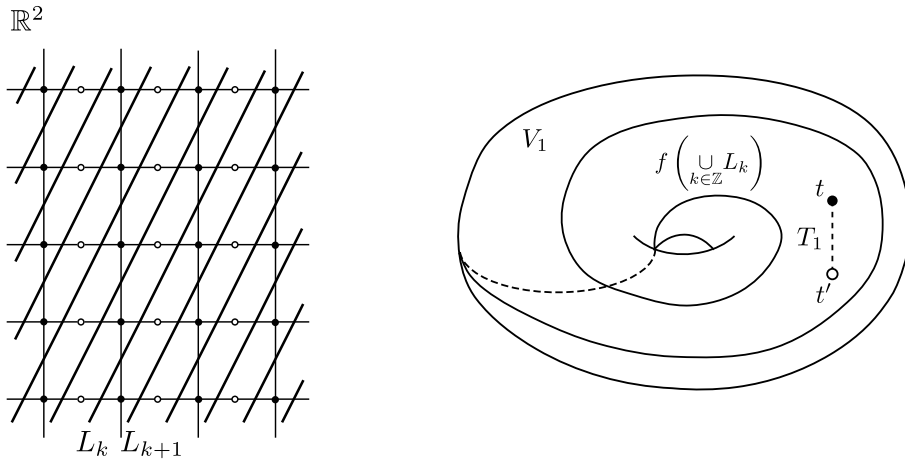


図 3 \mathbb{R}^2 上の直線族 \mathcal{L} (左) と $\partial V_1 - \{t, t'\}$ 上の単純閉曲線 $f \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k \right)$ (右) ($(p, q) = (2, 1)$).

定理 3.2 (主結果). M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし、 K を M 内の結び目とする。 $(M, K; \Sigma)$ を $(1, 1)$ -分解とする。 このとき、以下の (1)–(5) が成立する。

- (1) $M \neq S^2 \times S^1$ であり、 K が自明な結び目であるとき、 $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \alpha \rangle \times \mathbb{Z}\langle \beta \rangle$ である。
- (2) $M = S^2 \times S^1$ であり、 K が自明な結び目であるとき、 $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \alpha \rangle \times \mathbb{Z}\langle \tau \rangle \times \langle \beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1 \rangle$ である。
- (3) $M = S^2 \times S^1$ であり、 K がコア結び目であるとき、 $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \alpha \rangle \times \mathbb{Z}\langle \tau \rangle \times \mathbb{Z}\langle \tau' \rangle$ である。

- (4) p と q を互いに素な整数とし, p を 0 でない偶数とする. $M = L(p, q)$, $K = K_{p/q}$, $\Sigma = \Sigma_{p/q}$ であるとき, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$ である.
- (5) (1)–(4) 以外するとき, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ である.

一般に絡み目 L と $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ を固定しても, L の (g, n) -分解の Goeritz 群は, 橋分解のとり方に依存するが, この定理 3.2 により, $(1, 1)$ -分解の場合, $K = K_{p/q} \subset L(p, q)$ である場合を除き, その Goeritz 群は 3 次元多様体 M と結び目 K のみに依存することに注意する.

定理 3.2 と定理 1.4 より, 定理 1.6 の主張は $(g, n) = (1, 1)$ の場合でも成り立つことが分かる. 実際, より強い次の事実が帰結される.

系 3.3. M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, K を M 内の結び目とする. $(M, K; \Sigma)$ を $(1, 1)$ -分解とする. $d(M, K; \Sigma) \geq 2$ であるとき, かつそのときに限り, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ は有限群である.

以下では, 定理 3.2 の証明に必要な補題をまとめる.

補題 3.4. $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ とする. このとき, canceling 円盤 D であって, $\#(\partial D \cap m_2)$ が最小となるものは高々 2 つである.

補題 3.5. $(M, K; \Sigma)$ を $(1, 1)$ -分解とする. $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ とする. m_2 との交わりが最小の canceling 円盤が一意的であるとする. この円盤を除いて, m_2 との交わりが最小の canceling 円盤は, 分解 $(M, K; \Sigma)$ に対して, 一意的である.

補題 3.6. $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ の元 ϕ を任意にとる. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

- (i) $\phi(m_2) = m_2$.
- (ii) $\phi \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$.

補題 3.6 により $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ の元が $\mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ に含まれるかを確かめるためには, m_2 を保つことを確認するだけでよい. また, $\mathcal{G}(M, K, \Sigma) = \text{MCG}^+(V_1, T_1, m_2) < \text{MCG}^+(V_1, T_1)$ である.

$\partial\tilde{V}_1$ 上の任意の閉曲線 c に対して, $\alpha(c) = c$ が成り立つ. 実際, α が $\text{MCG}^+(\partial\tilde{V}_1)$ の全ての元と可換であることと [2] の Fact 3.7 より $\tau_{\alpha(c)} = \alpha\tau_c\alpha^{-1} = \tau_c$ が成り立つ. [2] の Fact 3.6 より $\alpha(c) = c$ が成り立つ. 特に, どのような $(1, 1)$ -分解 $(M, K; \Sigma)$ に対しても $\alpha(m_2) = m_2$ が成立する. 従って, 補題 3.6 より, $\alpha \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ が成立する.

定義 3.1 で定義された $(1, 1)$ -分解 $(L(p, q), K_{p/q}; \Sigma_{p/q})$ について考える. ある canceling 円盤 D, E が存在して, $\gamma_{\{D, E\}} \in \mathcal{G}(L(p, q), K_{p/q}; \Sigma_{p/q})$ が成り立つ. 実際, f を定義 3.1 にある普遍被覆写像とし, D と E を $T_1 \cup f([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \subset V_1$ と $T_1 \cup f([\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}) \subset V_1$ がそれぞれ張る円盤として定義すると, $\gamma_{\{D, E\}}(m_2) = m_2$ となる. 従って, 補題 3.6 より,

$\gamma_{\{D,E\}} \in \mathcal{G}(L(p,q), K_{p/q}; \Sigma_{p/q})$ が成立する. ここで, D, E は, m_2 との交わりが最小の canceling 円盤であることに注意する.

補題 3.7. $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ とする. c を $\partial\tilde{V}_1$ 上の単純閉曲線とし, $c \cap m_1 \neq \emptyset$ を満たすとする. このとき, $\iota(c, \tau^n(c)) \neq 0$ である.

3.2 定理 3.2 の証明

まず, m_2 に関する以下の場合分けに応じて $\mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ が決定されることを見る.

はじめに, 次の (I), (II) に場合分けされる.

(I) $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ の場合, 補題 3.4 より, さらに次の 2 つの場合に分けられる.

- (i) m_2 と交わりが最小な canceling 円盤が一意的である (この円盤を D_1 とおく).
- (ii) m_2 と交わりが最小な canceling 円盤がちょうど 2 つである (この円盤を D_1, E_1 とおく).

$\beta = \beta_{D_1}, \gamma = \gamma_{\{D_1, E_1\}}$ とおく.

(i) のとき, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) \subset G_{[D_1]} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle$ が成り立つ. さらに, 次の (a), (b) に場合分けされる.

(a) $D_1 \cap m_2 = \emptyset$ の場合, $m_2 \neq C_{T_1}$ かつ $m_2 \cap C_{T_1} = \emptyset$ であるため, $\ell_{D_1} \cap m_2 = \emptyset$ であるため, $\beta(m_2) = m_2$ が成り立つ. よって, 補題 3.6 より $\beta \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ が成り立つ. $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ であったので, 補題 3.7 より $\tau^n(m_2) \neq m_2$ ($n \neq 0$) が成り立つ. 補題 3.6 より $\tau^n \notin \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ ($n \neq 0$) が成り立つ. よって, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$ である.

(b) $D_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ の場合について考える. $\beta^n \tau^m \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) とする. D_1 を除いて, m_2 との交わりが最小の canceling 円盤を E_1 とする. 補題 3.5 より E_1 も分解に対して一意的である. 従って, $\beta^n \tau^m(E_1) = E_1$ が成り立つ. 任意の canceling 円盤は, m_1 と交わらないため, τ は任意の canceling 円盤を固定する. よって, $\beta^n(E_1) = E_1$ であり, $n = 0$ が成り立つ. 仮定より $\tau^m(m_2) = m_2$ であるので, $\iota(m_2, \tau^m(m_2)) = 0$ である. $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ であるため, 補題 3.7 より $m = 0$ が成り立つ. よって, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ である.

(ii) のとき, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) \subset G_{\{D_1, E_1\}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\gamma\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle$ が成り立つ. $\tau^n \gamma^m \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \{0, 1\}$) とする. このとき, $\tau^{2n} \gamma^{2m} = \tau^{2n} \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ である. 補題 3.6 より $\tau^{2n}(m_2) = m_2$ が成り立つため, $\iota(m_2, \tau^{2n}(m_2)) = 0$ が成り立つ. 補題 3.7 より $n = 0$ が従う. さらに, 次の (a)', (b)' に場合分けされる.

(a)' $\iota(\partial(D_1 \cup E_1), m_2) = |\hat{\iota}(\partial(D_1 \cup E_1), m_2)|$ の場合, m_2 は定義 3.1 の $f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \right)$ にあたる. よって, $\gamma \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ である. 従って, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$ である.

(b)' $\iota(\partial(D_1 \cup E_1), m_2) \neq |\hat{\iota}(\partial(D_1 \cup E_1), m_2)|$ の場合は, 仮定を用いて $\gamma(m_2) \neq m_2$ が示

される. よって, $\gamma \notin \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ である. 従って, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ である.

(II) $m_1 \cap m_2 = \emptyset$ の場合, 次の (i)', (ii)' に場合分けされる.

(i)' $m_1 = m_2$ であるときについて考える. $\text{MCG}^+(V_1, T_1)$ の元は $m_1 (= m_2)$ を保つことから $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \text{MCG}^+(V_1, T_1, m_2) = \text{MCG}^+(V_1, T_1)$ である. 従って, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \langle\beta, \gamma \mid \gamma^2 = 1\rangle$ である.

(ii)' $m_1 \neq m_2$ のときについて考える. $\tau(m_2) = m_2$ であるので, 補題 3.6 より $\tau \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ である. m_2 に対して, 適切に canceling 円盤 D, E を定めると, $\gamma_{\{D,E\}} \beta_D(m_2) = m_2$ となる. $\tau' = \beta_D \gamma_{\{D,E\}}$ とおく. $\mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ は α, τ, τ' により生成される. よって, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau\rangle \times \mathbb{Z}\langle\tau'\rangle$ である.

定理 3.2 の証明.

まず, (1) を示す. $M \neq S^2 \times S^1$ であるので, $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ が成立する. また, K が自明であることから $D_1 \cap m_2 = \emptyset$ が成立する. よって, (I)-(i)-(a) の場合にあたることから (1) が従う.

次に (2) であるが, このとき (M, K) は (V_1, T_1) のダブルであるため, $m_1 = m_2$ である. これは, (II)-(i)' の場合にあたるため, (2) が従う.

次に (3) を示す. このとき, $m_1 \cap m_2 = \emptyset$, $m_1 \neq m_2$ が成り立つ. これは, (II)-(ii)' の場合にあたるため (3) が従う.

次に (4) を示す. このとき, (I)-(ii)-(a)' の場合にあたることから, (4) が従う.

最後に (5) を示す. (1), (2), (3) 以外るとき, $M \neq S^2 \times S^1$ かつ K が自明な結び目でないか, あるいは, $M = S^2 \times S^1$ かつ K が自明な結び目でもコア結び目でない.

まず, $M \neq S^2 \times S^1$ であり K が自明な結び目でないとする. $M \neq S^2 \times S^1$ であるため, $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ が成立する. m_2 と交わりが最小な canceling 円盤がちょうど 2 つのときは, (I)-(ii) の場合にあたる. さらに, (4) 以外であるため, (I)-(ii)-(b)' の場合にあたる. よって, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ が成り立つ. m_2 と交わりが最小な canceling 円盤 D_1 が一意的であるとする. $D_1 \cap m_2 = \emptyset$ と仮定する. このとき, $\beta_{D_1}^2 \in \mathcal{G}(M, K; \Sigma)$ が成り立つ. すなわち, 曲面 Σ 上の ℓ_{D_1} に沿った Dehn twist $\beta_{D_1}^2$ が, V_2 側に延びる. このとき, McCullough [6] の Theorem 1 より, ℓ_{D_1} は V_2 内で円盤を張る. この円盤で V_2 を切ったときにできる 3 次元球体を B_2 とおく. T_2 は B_2 内の自明なタングルである. 一方で, ℓ_{D_1} は V_1 内でも円盤を張る. この円盤で V_1 を切ったときにできる 3 次元球体を B_1 とおくと, T_1 は B_1 内の自明なタングルである. よって, K を境界としてもつような $B_1 \cup B_2$ 内の円盤が存在する. よって, K は自明であるが, これは矛盾である. 以上より $D_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ が成り立ち, これは (I)-(i)-(b) の場合にあたる. よって, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ である.

次に, $M = S^2 \times S^1$ であり, K が自明な結び目でもコア結び目でもないとする. $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ が成り立つとき, 先程の議論と同じで, $\mathcal{G}(M, K; \Sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ となる. そこで, $m_1 \cap m_2 = \emptyset$ が成り立つとする. $m_1 = m_2$ のとき, K は自明な結び目であるが,

これは仮定に反する. $m_1 \neq m_2$ のとき, K はコア結び目であるが, これも仮定に反する. よって, (5) が成り立つ. □

謝辞

本研究集会において, 講演の機会を与えてくださった東京女子大学の大山淑之先生, ならびに新國亮先生に深く感謝申し上げます. また, 本研究集会での発表に際し, 慶應義塾大学の古宇田悠哉先生から, 丁寧なご指導を賜りました. 心よりお礼申し上げます.

参考文献

- [1] S. Cho, Homeomorphisms of the 3-sphere that preserve a Heegaard splitting of genus two, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (3): 1113–1123, 2008.
- [2] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [3] K. Funayoshi, Y. Koda, Extending automorphisms of the genus-2 surface over the 3-sphere, Q. J. Math. **71** (1): 175–196, 2020.
- [4] S. Hirose, D. Iguchi, E. Kin, Y. Koda, Goeritz groups of bridge decompositions, Int. Math. Res. Not. **IMRN 2022** (12): 9308–9356, 2022.
- [5] D. Iguchi, Y. Koda, Distance and the Goeritz groups of bridge decompositions, Pacific J. Math. **315** (2): 347–368, 2021.
- [6] D. McCullough, Homeomorphisms which are Dehn twists on the boundary, Algebr. Geom. Topol. **6**: 1331–1340, 2006.
- [7] T. Saito, Genus one 1-bridge knots as viewed from the curve complex, Osaka J. Math. **41** (2): 427–454, 2004.
- [8] J. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.