

DIFFEOMORPHISM TYPES OF COMPLEMENTS OF LINEARLY EMBEDDED GRAPHS WITH HALF-LINES

小山元希 (北海道大学 大学院教育推進機構)

ABSTRACT. 有限単純連結な半直線付きグラフを \mathbb{R}^n へ線形に埋め込んだとき, $n \geq 4$ ならば, 補空間の微分同相型は, 埋め込み方に依らず, 半直線付きグラフの組合せ的な情報のみにより完全に決定されることを示す. なお本研究は, 吉永正彦氏 (大阪大学) との共同研究に基づくものである.

1. 導入

1.1. **半直線付きグラフ.** 半直線付きグラフを定義する. まず, V は有限集合とし, この要素を頂点と呼ぶ. 次に, $P(V, 1) := \{\{u\} \mid u \in V\}$, $P(V, 2) := \{\{u, u\} \mid u \in V\} \sqcup \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ とそれぞれ定義する. また, E を $P(V, 2)$ の multiset とする. この集合の要素を辺と呼ぶ. $e \in E$ に関して $e = \tilde{e}$ を満たす $\tilde{e} \in E \setminus \{e\}$ が存在するとき, これを多重辺と呼ぶ. また, $e \in E$ に関して, $e = \{u, u\}$ となる $u \in V$ が存在するとき, ループと呼ぶ. さらに, E' は, $P(V, 1)$ の multiset とする. E' の要素を半直線と呼ぶ. そして, 頂点集合及び, 辺集合, 半直線集合の組 $G = (V, E, E')$ を半直線付きグラフと定義する. 半直線付きグラフ $G = (V, E, E')$ が有限とは, V, E, E' の濃度がそれぞれ有限であると定義し, 単純とは, (V, E) が単純グラフであると定義し, 連結とは, グラフ $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ が連結グラフであると定義する. ただし $\tilde{V} = V \cup \{v_\infty\}$, $\tilde{E} = E \cup \{\{v, v_\infty\} \mid \{v\} \in E'\}$, $v_\infty \notin V$ とする. $G = (V, E, E')$ は有限単純な半直線付きグラフとする. 以下のふたつの写像

$$\rho : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \mu : E' \rightarrow S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

の組 $f := (\rho, \mu)$ を半直線付きグラフ G の線形写像と呼ぶことにする. なお $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ と書くこととする. また, $f(G) \subset \mathbb{R}^n$ は $\rho(V)$ と $\bigcup_{\substack{e' \in E' \\ u \in e'}} \text{hl}(\rho(u), \mu(e'))$ と $\bigcup_{\{u, v\} \in E} \overline{\rho(u), \rho(v)}$ の和集合として定義する. ただし $a, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\text{hl}(a, b) := \{a + sb \in \mathbb{R}^n \mid s \geq 0\}$, $\overline{a, c} := \{sa + (1-s)c \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq s \leq 1\}$ である. $f := (\rho, \mu)$ は半直線付きグラフ G の線形写像とする. $f := (\rho, \mu)$ が線形埋め込みであるとは, ρ が単

射かつ、次の集合

$$\{\text{hl}(\mu(u), \mu(e')) \in \mathbb{R}^n \mid e' \in E', u \in e'\} \cup \{\overline{\rho(u), \rho(v)} \in \mathbb{R}^n \mid \{u, v\} \in E\}$$

の任意の異なる2つの要素において、共通の頂点のみを共通部分に持つときであると定義する.

1.2. **具体例.** 有限単純連結な半直線付きグラフ及び、その線形埋め込みについて具体例を記述する.

Example 1.1. $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, $E' = \{\{1\}, \{2\}, \{2\}, \{4\}\}$ としたとき, $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフである.

Example 1.2. 半直線を持たない有限単純連結なグラフから頂点をひとつ取り除き、その頂点を端点に持つ辺を全て半直線にすることにより、有限単純連結な半直線付きグラフを構成することが出来る.

Remark 1.3. $G = (V, E, E')$ は有限単純な半直線付きグラフが連結である必要十分条件は、グラフ (V, E) の各連結成分に1本以上の半直線が存在することである.

Example 1.4. $n \geq 2$ とする. \mathcal{A} を \mathbb{R}^n における1次元アフィン部分空間の有限集合族であるとする. このとき \mathcal{A} を実直線配置という. 実直線配置の和集合は交点を頂点とみなすなど適切に頂点を取ることににより、有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みとみなすことが出来る.

Example 1.5. $n \geq 2$ とする. \mathbb{R}^n において、有限本の線分及び、2本の半直線(片側のみ端点を持ち、半直線を部分集合として持つような閉球は存在しない)によって構成される、連結な1次元部分多様体を本文中では、擬直線と呼ぶこととする. また、擬直線の有限集合族 \mathcal{A} の任意の異なる2つの擬直線の共通部分の要素数が高々1であるとき、 \mathcal{A} を擬直線配置という. 擬直線配置の和集合もまた、有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みとみなすことが出来る.

1.3. **モチベーション.** 石川剛郎氏(北海道大学)と講演者は、実直線配置の補空間の微分同相型について研究し、次の結果を得ていた.

Theorem 1.6 (石川, 小山 [4]). $\mathcal{B} = \{l_1, \dots, l_m\}$ を、 \mathbb{R}^n における実直線配置とする. p_k を \mathcal{B} における k 重点の個数とする. このとき $n \geq 3$ ならば、補空間 $M(\mathcal{B}) := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m l_i$ は、 n 次元閉球に $m + \sum_{k=2}^m (k-1)p_k$ 個の n 次元 $(n-2)$ -ハンドルを自明に接着した空間の内部と微分同相になる.

そこで、これを一般化した擬直線配置について $n=3$ の場合は結び目のアレンジメントになっているので明らかに難しそうであるが、 $n \geq 4$ の場合に関しては、Hatcher [2] の p429 の極小性に関する考察及び、Alexander の双対定理により、補空間が $(n-2)$ 次元球面の一点和とホモトピー同

値となり, 球面の個数は, 擬直線の本数と重点個数のみによって決定されることが分かったため, 微分同相型についても Theorem 1.6 と同様の性質を持つのではないかと考え, 研究を開始した. そして研究を行っていく中で, 擬直線配置を有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みに拡張し, その補空間の微分同相型について研究を行った.

Theorem 1.7 (主定理, 小山 [5]). $G = (V, E, E')$ は, 有限単純連結な半直線付きグラフとする. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ は線形埋め込みであり, $n \geq 4$ とする. このとき, $M(G, f) := \mathbb{R}^n \setminus f(G)$ は, $-\chi(G)$ 本の n -次元 $(n-2)$ -ハンドルを n -次元閉球に自明な接着をした空間の内部と微分同相となる. なお, $\chi(G) := \text{card}(V) - \text{card}(E) - \text{card}(E')$ とし, $\text{card}(A)$ は有限集合 A の要素数とする.

2. 主定理の証明の概略

以下について考察を行うことにより, 主定理を証明する:

- (1) 適切な高さ関数を定め, 頂点の通過前後の位相の変化について考察を行う;
- (2) 線形埋め込みを保ちながら連続的に変形した際の補空間の位相が変化しないことを示す;
- (3) $n \geq 4$ のとき, 任意の2つの線形埋め込みが, 線形埋め込みを保った連続変形により, 移りあうことを示す;
- (4) 任意の有限単純連結な半直線付きグラフにおいて, 各頂点の上部に伸びるその頂点を端点に持つ直線または半直線が1つ以上存在するような線形埋め込みが存在することを示す.

2.1. (1) について. $n \geq 2$ とする. また, \mathbb{R}^n の部分集合 X を半直線付きグラフの線形埋め込みの像とする.

次に単位ベクトル $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を取り, 高さ関数 $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x \cdot v$ を定義する. そして v を以下を満たすようにとる:

- v は, X のどの線分及び, 半直線とも垂直にならない.;
- 任意の $c \in \mathbb{R}$ において, $h^{-1}(c)$ は, X の頂点を高々1つ含む.

以上を満たす単位ベクトルは, generic に取ることが出来る. 次に, $h(x) = x_n$ となるように座標を取り替えておくこととする. よって $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ と書くことにする. $M := \mathbb{R}^n \setminus X$ とし, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に関して,

$$M_{\leq c} := \{x \in M \mid x_n \leq c\}, \quad M_{< c} := \{x \in M \mid x_n < c\}$$

と定義する. $V \subset X$ を X の頂点集合とし, 次のように添え字を付ける: $V = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, $c_i = h(u_i)$ and $C = h(V) = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ with $c_1 < c_2 < \dots < c_r$.

Lemma 2.1. $i = 0, 1, \dots, r$, $c_0 = -\infty$, $c_{r+1} = \infty$ とし, $M_{<\infty} := M$ とする. このとき $M_{<c}$ の微分同相型は, $c_i < c < c_{i+1}$ において変化せず, $M_{<c}$ の微分同相型もまた, $c_i < c \leq c_{i+1}$ において変化しない.

証明. 省略. □

Lemma 2.2. u は X の頂点とし, $c = h(u)$ とする. $s = s(u)$ を u の上部に隣接した辺及び, 半直線の本数とし, $t = t(u)$ を u の下部に隣接した辺及び, 半直線の本数と仮定する. また, $s \geq 1$ と仮定する. このとき, 十分小さな $\varepsilon > 0$ において, $M_{<c+\varepsilon}$ は, 以下の空間の内部と微分同相となる:

$$M_{<c-\varepsilon} \cup_{\varphi} \left(\bigsqcup_{i=1}^{s-1} (D_i^2 \times D_i^{n-2}) \right).$$

なお,

$$\varphi : \bigsqcup_{i=1}^{s-1} (D_i^2 \times \partial(D_i^{n-2})) \rightarrow h^{-1}(c - \varepsilon) \setminus X = \partial(M_{<c-\varepsilon}) \subset M_{<c-\varepsilon},$$

は, $(s - 1)$ 個の $(n - 2)$ -ハンドルに関する自明な接着写像である.

証明. First let $s = 1$. Since $M_{<c+\varepsilon}$ can be transformed as the Figure 3, $M_{<c+\varepsilon}$ is diffeomorphic to $M_{<c-\varepsilon}$. This shows Lemma 2.2 in the case $s = 1$.

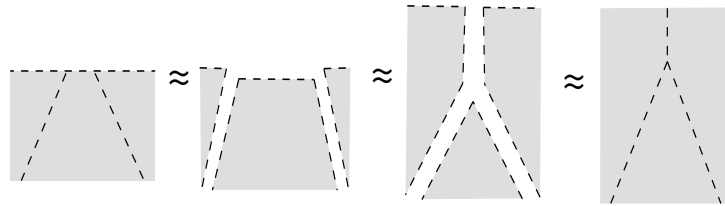


FIGURE 1. No topological changes of complements occur when $s = 1$.

In general, for any $s \geq 2$, the topological change is obtained by attaching trivial $s - 1$ handles of index $n - 2$. See Figure 2. Thus we have Lemma 2.2. □

Remark 2.3. 以上の2つの補題を用い, Theorem 1.6を示すことが出来る.

2.2. (2), (3) について. はじめに (2) について記述し, その後 (3) についての説明を行う. $G = (V, E, E')$ は, 有限単純な半直線付きグラフとする. 線形埋め込み $f = (\rho, \mu) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ において $\mu : E' \rightarrow S^{n-1}$ が単射であるとき, non-parallel な線形埋め込みと呼ぶ.

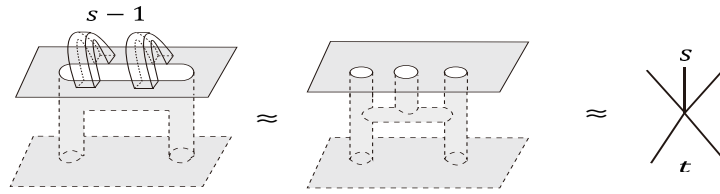


FIGURE 2. The case $s = 3, t = 2$.

Definition 2.4. $G = (V, E, E')$ は有限単純な半直線付きグラフとする. また, f_0, f_1 は G から \mathbb{R}^n への (non-parallel な) 線形埋め込みとし, $f_0 = (\rho_0, \mu_0), f_1 = (\rho_1, \mu_1)$ と書くことにする. f_0, f_1 が (non-parallel) linear isotopic であるとは, 次の性質を満たすときという: 任意の $t \in \mathbb{R}$ において, $(F_t = F|_{V \times \{t\}}, H_t = |_{E' \times \{t\}})$ が (non-parallel な) 線形埋め込みとなり, $t = 0, 1$ のときそれぞれ, f_0, f_1 となるような, 可微分写像

$$F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$H : E' \times \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1}$$

が存在する. また, そのような (F, H) を (non-parallel) linear isotopy と呼ぶことにする.

Lemma 2.5. $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフとし, E' は空集合でないとする. また, $f_0 = (\rho_0, \mu_0), f_1 = (\rho_1, \mu_1)$ は G から \mathbb{R}^n への線形埋め込みであるとする. このとき, f_0 と f_1 が linear isotopic であるならば, $\mathbb{R}^n \setminus f_0(G)$ と $\mathbb{R}^n \setminus f_1(G)$ は微分同相となる.

証明の概略. \mathbb{R}^n に無限遠点を追加し S^n とする. そして $S^n \times \mathbb{R}$ から \mathbb{R} への projection map $P_{\mathbb{R}}$ を考える. 次に (F, H) を用い $S^n \times \mathbb{R}$ に Whitney stratification ([1] を参照) を入れる. このとき, $t = 0, 1$ において, $P_{\mathbb{R}}^{-1}(t)$ は, f_t により Whitney stratification を入れた \mathbb{R}^n とみなすことが出来る. そして Thom's first isotopy lemma ([1] を参照) を用いることにより, この補題を示すことが出来る. \square

Remark 2.6. Lemma 2.5 の証明方法は, Randell の [6] を参考にしており, ほとんど同じ方法で示している.

Lemma 2.7. $G = (V, E, E')$ は有限単純な半直線付きグラフとする. また, $n \geq 4$ とする. f_0, f_1 が G から, \mathbb{R}^n への non-parallel な線形埋め込みであるならば, f_0, f_1 は non-parallel linear isotopic となる.

証明の概略. $V = \{v_1, \dots, v_d\}, E' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ とする. また, $\text{LM}(G, n)$ は, 有限連結な半直線付きグラフ G から \mathbb{R}^n への線形写像全体の集合と

する. このとき次の写像は,

$$\begin{array}{ccc} \text{LM}(G, n) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f = (\rho, \mu) & \longmapsto & (\rho(v_1), \dots, \rho(v_d), \mu(e'_1), \dots, \mu(e'_m)) \end{array}$$

となっており, $\text{LM}(G, n)$ を $(\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ とみなすことが出来, G から \mathbb{R}^n への non-parallel な線形埋め込み写像全体の集合 $\text{NPLE}(G, n)$ は $(\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ の部分空間としてみなすことが出来る. このとき, $\text{NPLE}(G, n)$ は, $(\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ の開部分集合となることは明らかである. 次に連結性を示すために, $Y \subset (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ を

$$\begin{aligned} Y := & \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq d} Y_{v_i, v_j} \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\} \in E, \\ \{v_i, v_j\} \neq \{v_k, v_\ell\}}} Y_{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} \right) \\ & \cup \left(\bigcup_{\substack{e'_i \in E', e'_i = \{v_j\} \\ \{v_k, v_\ell\} \in E}} Y_{\{e'_i, v_j\}, \{e'_k, v_\ell\}} \right) \\ & \cup \left(\bigcup_{\substack{i \neq k \\ e'_i, e'_k \in E', \\ e'_i = \{v_j\}, e'_k = \{v_\ell\}}} Y_{\{e'_i, v_j\}, \{e'_k, v_\ell\}} \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq m} Y_{e'_i, e'_j} \right). \end{aligned}$$

と定義する (詳細な定義は [5] を参照). このように定義することにより, $\text{NPLE}(G, n)$ を $(\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \setminus Y$ と同一視することが出来る. 次に, 連結性を示す. $\{v_i, v_j\} \cap \{v_k, v_\ell\} = \emptyset$ のとき, $Y_{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}}$ は,

$$\begin{aligned} Y_{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} := & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\ & | x_i \neq x_j, x_k \neq x_\ell, \overline{x_i, x_j} \cap \overline{x_k, x_\ell} \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

と定義されている. このとき $Y_{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}}$ は次の2つの集合の非交和集合となる:

$$\begin{aligned} Y_{0, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} := & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\ & | x_i \neq x_j, x_k \neq x_\ell, \overline{x_i, x_j} \cap \overline{x_k, x_\ell} \neq \emptyset, \\ & L(x_i, x_j - x_i) \neq L(x_k, x_\ell - x_k)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{1, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} := & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\ & | x_i \neq x_j, x_k \neq x_\ell, \overline{x_i, x_j} \cap \overline{x_k, x_\ell} \neq \emptyset, \\ & L(x_i, x_j - x_i) = L(x_k, x_\ell - x_k)\}, \end{aligned}$$

なお, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, L(x, y) := \{x + sy \in \mathbb{R}^n | s \in \mathbb{R}\}$ とする.
 $Y_{1, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}}$ は以下の集合

$$\begin{aligned}
 & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\
 & \quad | x_i \in \mathbb{R}^n, x_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\}, x_k \in \overline{x_i, x_j}, \\
 & \quad x_\ell \in L(x_i, x_j - x_i) \setminus \{x_k\}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\
 & \quad | x_i \in \mathbb{R}^n, x_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\}, \\
 & \quad x_k \in L(x_i, x_j - x_i) \setminus \overline{x_i, x_j}, x_\ell \in \overline{x_i, x_j}\},
 \end{aligned}$$

の非交和集合となるため, 余次元 $2n - 2$ の境界付き多様体の有限非交和集合となることが分かる. また, $Y_{0, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}}$ は,

$$\begin{aligned}
 Y_{0, n-2, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} := & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\
 & | x_i \in \mathbb{R}^n, x_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\}, x_k \in \mathbb{R}^n \setminus L(x_i, x_j - x_i), \\
 & x_\ell \in x_k + \{u(x_j - x_i) + v(x_i - x_k) \in \mathbb{R}^n \\
 & \quad | 1 \leq v, 0 \leq u \leq v\}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{0, n-1, \{v_i, v_j\}, \{v_k, v_\ell\}} := & \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \\
 & | x_i \in \mathbb{R}^n, x_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\}, x_k \in \overline{x_i, x_j}, \\
 & x_\ell \in \mathbb{R}^n \setminus L(x_i, x_j - x_i)\}.
 \end{aligned}$$

の非交和集合となっており, それぞれ余次元 $n - 2, n - 1$ の境界付き多様体となっていることが分かる. 以上のような考察を場合分けして全てのケースについて行うことにより, $Y \subset (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ は, 余次元 $n - 2$ 以上の境界付き多様体の有限非交和集合となることが分かる. よって, $n \geq 4$ のとき, $(\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m \setminus Y$ は連結な可微分多様体になるため補題は示された. \square

Remark 2.8. $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフとする. Lemma 2.7 より, Y は, 余次元 $n - 2$ 以上の境界付き多様体の有限非交和集合となることが分かった. よって $n \geq 3$ のとき, non-parallel な線形埋め込みは $\text{LM}(G, n) \cong (\mathbb{R}^n)^d \times (S^{n-1})^m$ において generic に取ることが出来る. 同様の考察により, 線形埋め込み写像も generic に取ることが出来る.

Lemma 2.9. $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフとし, $n \geq 3$ とする. また, $f = (\rho, \mu)$ を G から \mathbb{R}^n への線形埋め込み写像とする. このとき, f と linear isotopic となる non-parallel な線形埋め込み写像が存在する.

証明. 省略

\square

2.3. (4) について.

Definition 2.10. $G = (V, E, E')$ は, 有限単純な半直線付きグラフとする. また, $n \geq 2$ とし, f は, G から \mathbb{R}^n への線形埋め込み写像とする. 単位ベクトル $u \in S^{n-1}$ が以下の条件を満たすとき, 線形埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ の *complete ascending direction* と呼ぶ:

- (i) u は, $f(G)$ のどの線分及び, 半直線とも垂直にならない;
- (ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に関して, 超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot u = c\}$ は, $f(G)$ の頂点を高々1つ含む. なお, \cdot は, Euclidean inner product とする.
- (iii) 任意の $v \in V$ に対して, $(\rho(w) - \rho(v)) \cdot u > 0$ を満たす $\{v, w\} \in E$ または, $\mu(\{v\}) \cdot u > 0$ を満たす $\{v\} \in E'$ が存在する.

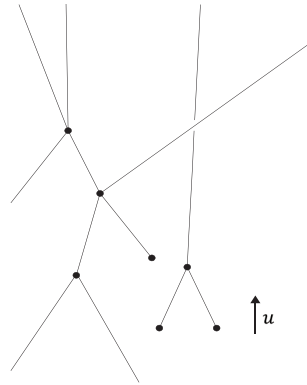


FIGURE 3. Linearly embedded graph with half-lines having a complete ascending direction u .

Lemma 2.11. $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフとする. また, $n \geq 3$ とする. このとき, *complete ascending direction* を持つ線形埋め込み写像が存在する.

証明の概略. 単位ベクトル $u \in S^{n-1}$ を固定し, 高さ関数 $h(x) := x \cdot u$ を定める. 次に G の半直線の片側に端点 v_∞ を追加し, 有限連結グラフを構成する. $\text{card}(V) = d$ と仮定する. d 個の実数 $c_1 > c_2 > \dots > c_{d-1} > c_d$ を取り, v_∞ との距離が小さい順に V の元をそれぞれレベル集合 $h^{-1}(c_1), h^{-1}(c_2), \dots, h^{-1}(c_{d-1}), h^{-1}(c_d)$ 内に写すような頂点集合の写像を取る. さらに, u との内積が正となるように半直線集合の写像を取る. ことにより, 半直線付きグラフの線形写像を構成する. Remark 2.8 より, $n \geq 3$ のとき, グラフの線形埋め込み写像は generic にとることが出来るので, 頂点及び, 半直線を適切に perturb することにより, $u \in S^{n-1}$ を complete ascending direction に持つ, 線形埋め込み写像が得られる. \square

2.4. 主定理の証明.

Theorem 1.7 の証明. はじめに, Lemma 2.7, 2.9, 2.11 より, f と linear isotopic な complete ascending direction を持つ線形埋め込み写像が存在することが分かる. さらに, Lemma 2.1, 2.2, 2.5 より, 補空間 $\mathbb{R}^n \setminus f(G)$ は, いくつかの n -次元 $(n-2)$ -ハンドルを n -次元閉球に自明な接着をした空間の内部と微分同相となることが分かる. 最後に, Alexander の双対定理より, 補空間 $\mathbb{R}^n \setminus f(G)$ の整係数簡約ホモロジー群は

$$\begin{cases} \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus f(G); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{-\chi(G)} & (i = n - 2) \\ \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus f(G); \mathbb{Z}) \simeq \mathbf{0} & (i \neq n - 2) \end{cases}$$

となる. よって接着している n -次元 $(n-2)$ -ハンドルの個数は $-\chi(G)$ となることが分かる. \square

3. $n = 3$ のとき及び, グラフのとき

主定理の証明に用いた補題や, その証明手法により, $n = 3$ の場合や, 半直線を持たない一般的なグラフの場合においても, いくつかの結果が得られた. よってここに, 結果のみ記述する.

Proposition 3.1. $G = (V, E, E')$ は有限単純連結な半直線付きグラフとする. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ は線形埋め込み写像とする. f と linear isotopic な complete ascending direction を持つ線形埋め込み写像が存在するならば, 補空間 $\mathbb{R}^3 \setminus f(G)$ は, 種数 $-\chi(G)$ のハンドル体の内部と微分同相となる. なお, $\chi(G) := \text{card}(V) - \text{card}(E) - \text{card}(E')$ とし, $\text{card}(A)$ は有限集合 A の要素数とする.

Proposition 3.2. $G = (V, E)$ が有限連結グラフであるならば, 補空間 $S^3 \setminus f(G)$ が種数 $1 - \chi(G)$ のハンドル体の内部と微分同相となるようなグラフの埋め込み写像 $f : G \rightarrow S^3$ が存在する. なお $\chi(G)$ は, グラフの Euler 標数である.

Huh, Lee は [3] において descending direction というものを定義している. G は有限単純グラフとし, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, グラフの線形埋め込み写像とする. $f(G)$ に制限したときに極小値をとる頂点がただひとつのみ存在するような, 高さ関数が存在するとき, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, descending direction を持つという. Huh, Lee は, descending direction を持つ線形埋め込み写像について次のことを示している.

Theorem 3.3 (Huh, Lee [3]). $G = (V, E)$ は有限単純連結グラフであるとする. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が, descending direction を持つ線形埋め込み写像ならば, 補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus f(G))$ は自由群となる.

Complete ascending direction と descending direction は類似しているため, Lemma 2.11 と同様の方法により, 次のことを示すことが出来る.

Proposition 3.4. $G = (V, E)$ が有限単純連結グラフならば, *descending direction* を持つ G から \mathbb{R}^3 への線形埋め込み写像が存在する.

Theorem 3.3, Proposition 3.4 より, 以下のことがただちに示される.

Corollary 3.5. $G = (V, E)$ が有限単純連結グラフならば, 補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus f(G))$ が自由群となるような線形埋め込み写像 $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する.

謝辞

この度は研究集会「結び目の数理VI」において講演の機会を与えていただきましたことを感謝申し上げます. また, 世話人の大山淑之先生, 新國亮先生をはじめ, 研究集会の運営に携わられた方々に心より感謝申し上げます.

REFERENCES

- [1] R. Goresky, R. MacPherson, *Stratified Morse Theory*, Springer-Verlag, (1988).
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2001).
- [3] Y. Huh, J. H. Lee, *Linearly free graphs*, Journal of Graph Theory Volume 100, Issue 4 (2022), 613-629.
- [4] G. Ishikawa, M. Oyama, *Topology of complements to real affine space line arrangements*, Journal of Singularities Volume 22 (2020), 373-384.
- [5] M. Oyama, *Topology of Complements of Real Space Line Arrangements and Linearly Embedded Graphs*, Hokkaido University, Ph.D. thesis, (2023).
- [6] R. Randell, *Lattice-isotopic arrangements are topologically isomorphic*, Proceedings of the American Mathematical Society (1989), 555-559.