

# ニット状曲面の構成とアレキサンダーの定理

安田順平\* (大阪大学大学院理学研究科)

## 概要

ブレイドのいくつかの交点をスプライスすることにより得られるタングルをニットという。またブレイドを曲面結び目理論へ拡張することにより、ブレイド状曲面が定義される。本講演では、ニット状曲面と呼ばれる4次元球体に埋め込まれた境界付き曲面を導入する。これはブレイド状曲面をスプライスして得られる曲面に対応する。併せて、4次元球体に埋め込まれた境界付き曲面があるニット状曲面と全同位であることを紹介する。本研究は中村伊南沙氏(佐賀大学)との共同研究に基づく。

## 1 導入

$D^2$  を2次元円板,  $I = [0, 1]$  を閉区間,  $n > 0$  を正の整数とする。また  $Q_n$  を  $D^2$  の内部の  $n$  点からなる部分集合として固定する。

次数  $n$  のブレイド (braid) とは円筒  $D^2 \times I$  に適切に埋め込まれた  $n$  本の曲線  $\beta$  であって各  $t \in I$  について  $D^2 \times \{t\} \cap \beta$  は横断的に交わる  $n$  点かつ  $\partial\beta = Q_n \times \{0, 1\}$  を満たすことをいう。Artin により次数  $n$  のブレイド (の同値類) は図1にある  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) の組み合わせによって得られることが知られている [1]。

次数  $n$  のニット (knit, BMW tangle) とは,  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$  の組み合わせによって得られる  $D^2 \times I$  内の曲線の非交和である。村上は結び目の多項式不変量をブレイド群を用いて理解する過程でニットを導入した [4]。

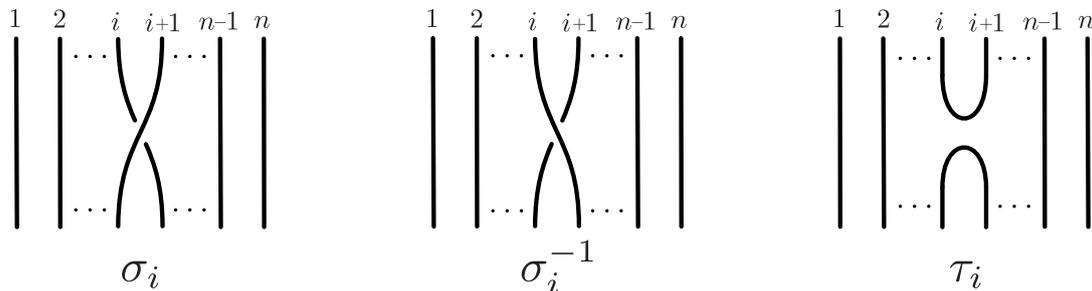


図1: ブレイドの生成元とニットの生成元

Rudolph はブレイドの高次元化としてブレイド状曲面 (braided surface) を導入した。これは  $D^2 \times B^2$  へ適切に埋め込まれた境界付き曲面であって分岐被覆の構造を持つものとして定義される。特に埋め込まれた境界付き曲面  $F$  がブレイド状曲面と全同位であることと  $F$  がリボン曲面<sup>1</sup>であることは同値である [6]。

本稿では曲面結び目理論におけるニットの次元化としてニット状曲面 (knitted surface, BMW surface) を導入する [5]。ブレイド状曲面はリボン曲面を表示していたが、ニット状曲面については次が成り立つ。

**定理 1.1.**  $D^2 \times B^2$  へ適切に埋め込まれた任意の境界付き曲面  $F$  はあるニット状曲面と全同位である。

ブレイド状曲面はチャート表示と呼ばれる  $B^2$  上の有限グラフによる記述が知られている [2, 3]。次の章ではチャート表示を拡張することによってニット状曲面を導入する。

## 2 チャート

2次元円板  $B^2$  上の有限グラフ  $\Gamma = (V, E)$  が以下の条件を満たすとき、 $\Gamma$  を  $n$ -チャート ( $n$ -chart, BMW  $n$ -chart) または単にチャートと呼ぶ。

\*本研究は科研費 (課題番号:22J20494) の助成を受けたものである。

<sup>1</sup>4次元球体へ適切に埋め込まれた曲面がリボン (ribbon) であるとは、極大点を持たないようなモース関数が取れることをいう。

- (1) 各辺  $e \in E$  には  $\sigma_i$  または  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) のいずれかがラベルが付与されている。 $\sigma_i$  をラベルに持つ辺を  $\sigma$ -辺 ( $\sigma$ -edge)、 $\tau_i$  をラベルに持つ辺を  $\tau$ -辺 ( $\tau$ -edge) と呼ぶ。
- (2) 辺  $e \in E$  が  $\sigma$ -辺であるとき、またそのときに限って辺  $e$  は有向である。
- (3) 各頂点  $v \in V$  の次数は 1, 3, 4, 6 のいずれかである。
- (4) 各頂点に隣接する辺のラベリングは図 2 および図 3 のいずれかとなる<sup>2</sup>。ここで  $\sigma_i$  をラベルに持つ辺は青色の線分に添え字  $i$  と向きを記すことで表し、 $\tau_i$  をラベルに持つ辺は向きの付いていない赤色の線分に添え字  $i$  を記すことで表す。また添え字  $i, j, k$  は  $|i - j| = 1$  かつ  $|i - k| \geq 2$  を満たす。

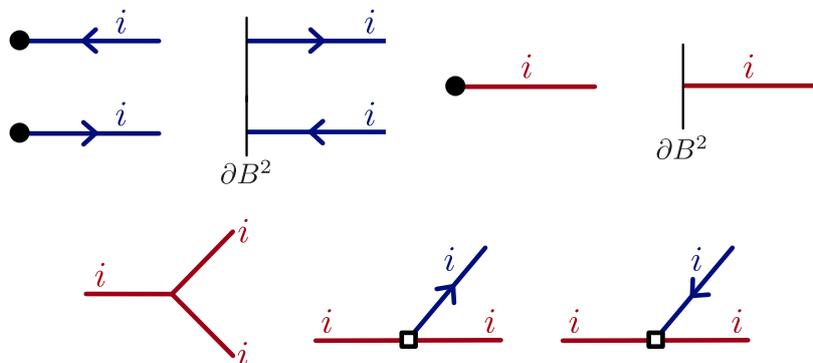


図 2: 次数 1(上段) と次数 3(下段) の頂点周辺のラベリング

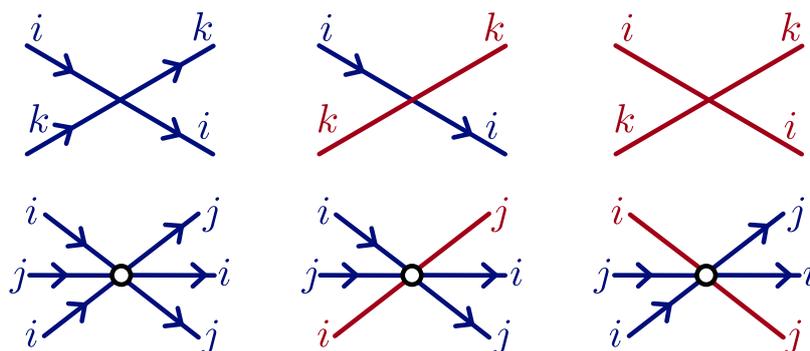


図 3: 次数 4(上段) と次数 6(下段) の頂点周辺のラベリング

頂点  $v \in V$  に隣接する全ての辺が  $\tau$ -辺であるとき  $v$  を  $\tau$ -頂点 ( $\tau$ -vertex) といい、 $v$  に隣接する全ての辺が  $\sigma$ -辺であるとき  $v \in V$  が  $\sigma$ -頂点 ( $\sigma$ -vertex) であるという。

チャート  $\Gamma$  の  $\tau$ -頂点と  $\tau$ -辺から得られる  $B^2$  上のグラフ  $\Gamma_\tau = (V_\tau, E_\tau)$  を  $\Gamma$  の  $\tau$ -チャート ( $\tau$ -chart) という。ここで  $\tau$ -頂点でも  $\sigma$ -頂点でもない  $\Gamma$  の頂点  $v \in V$  は丁度 2 本の  $\tau$ -辺と隣接しているため、その 2 本の  $\tau$ -辺は  $v$  で結合することで 1 つの  $\tau$ -辺とみなす (図 4 参照)。

### 3 ニット状曲面の構成

チャートからニット状曲面を構成するために、チャートの高さ関数を定める。関数  $h : B^2 \rightarrow [0, 1]$  がチャート  $\Gamma$  の高さ関数 (height function) であるとは次を満たすことをいう。

- (1)  $h$  は全射かつ各  $t \in [0, 1]$  に対して  $H_t := h^{-1}(t)$  は  $I$  と同相である。
- (2) 各辺  $e \in E_\tau$  は  $H_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) と横断的である。

<sup>2</sup>講演時に用いた頂点の記法から変更があります、ご了承ください。

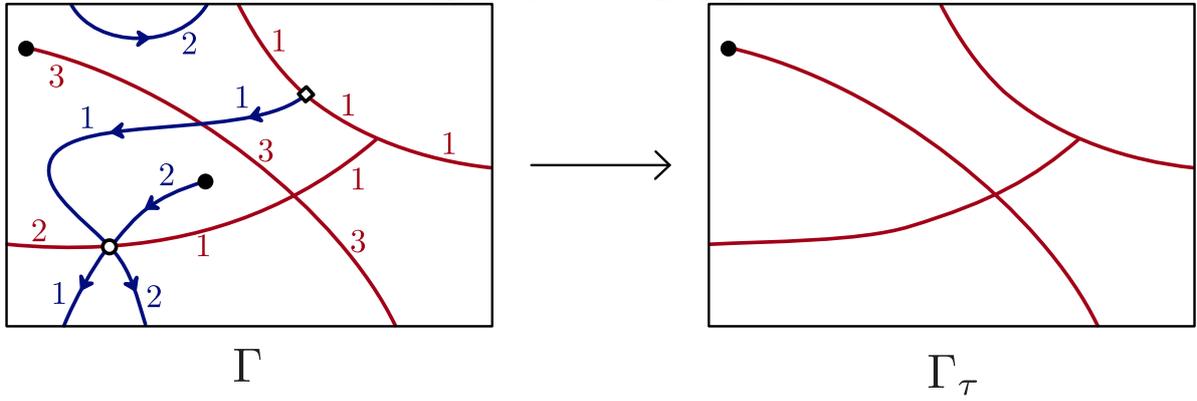


図4: チャート  $\Gamma$  の具体例 (左,  $n = 4$ ) と  $\Gamma$  の  $\tau$ -チャート (右)

(3) 各頂点  $v \in V_\tau$  について  $v$  の近傍  $N_v \subset B^2$  と十分小さな  $\varepsilon > 0$  が存在して

$$|\#(N_{t+\varepsilon} \cap E_\tau) - \#(N_{t-\varepsilon} \cap E_\tau)| \leq 1 \quad (t := h(v), N_t := H_t \cap N)$$

が成り立つ。すなわち、頂点  $v$  の前後において  $H_t$  と  $\tau$ -辺の交点の個数は高々1つ変化する。

$h : B^2 \rightarrow [0, 1]$  を  $\Gamma$  の高さ関数とする。すると  $B^2 = \cup_{t \in [0, 1]} H_t$  という1-パラメータ表示を得る。そこで各円筒  $D^2 \times H_t$  内にニット  $\beta_t$  (またはその変形) を定めることで  $D^2 \times B^2$  へ適切に埋め込まれた曲面  $S$  のモーションピクチャー  $\{\beta_t\}_{t \in [0, 1]}$  を構成する。

チャート  $\Gamma$  に対して  $B^2$  の全同位を施すことで、 $\Gamma$  は高さ関数  $h$  に関してモース的であり、各  $H_t$  に含まれる  $\Gamma$  の頂点または  $h$  の臨界点が高々1つであるとして良い。  $[0, 1]$  の分割  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$  を  $h(V)$  および  $\Gamma$  に関する  $h$  の臨界値によって定める。また  $\varepsilon > 0$  を十分小さい正数、  $J = I \setminus \cup_{i=1}^m (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$  とおく。

$t \in J$  のとき、  $D^2 \times H_t$  内のニット  $\beta_t$  を図5のようにして構成する：  $J$  の定義から  $H_t \cap \Gamma$  は有限個の横断的二重点であり各交点は  $\Gamma$  の辺の内点である (図5左)。そこで各交点にニットの生成元  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau$  を対応させる。ここで  $\sigma_i$  の符号は、  $H_t$  と交わる  $\sigma$ -辺の向きが  $H_{t-\varepsilon}$  から  $H_{t+\varepsilon}$  へ方向と一致するとき正とし、そうでないとき負として定める。(図5中央の符号は、  $H_{t-\varepsilon}$  が  $H_t$  の左側、  $H_{t+\varepsilon}$  が  $H_t$  の右側にあるときに相当する。) これによりニットの生成元によるワードを得る。このワードに従って  $D^2 \times H_t$  内のニット  $\beta_t$  を定める。

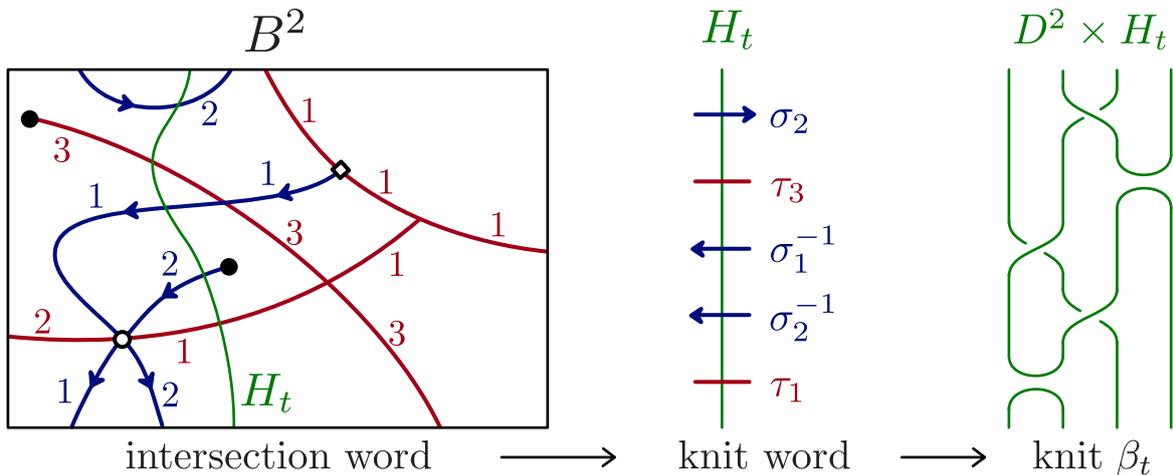


図5: ニット  $\beta_t$  の構成 ( $t \in J$ )

次に  $t \in [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) における  $\beta_t$  を構成する。  $x \in H_{t_i}$  を  $\Gamma$  の頂点または  $h$  の  $\Gamma$  に関する臨界点とする。このとき、図6~10のようにして  $x$  に対応するモーションピクチャーを  $\{\beta_t\}_{[t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]}$  として定める。ここでそれぞれの図の下段にあるチャートの一部は  $x$  の近傍を表示したものであり、高さ関数  $h$  は紙面の上下方向に関する射影を考えている。また上段のモーションピクチャーはそれぞれのチャートの近傍において定義されるものである。

以上によりモーションピクチャー  $\{\beta_t\}_{t \in [0, 1]}$  と  $D^2 \times B^2$  へ適切に埋め込まれた曲面  $S = \cup_{t \in [0, 1]} \beta_t$  が得られる。この曲面  $S$  を  $(\Gamma, h)$  に付随する次数  $n$  のニット状曲面 (knitted surface, BMW surface) という。  $\Gamma$  の全

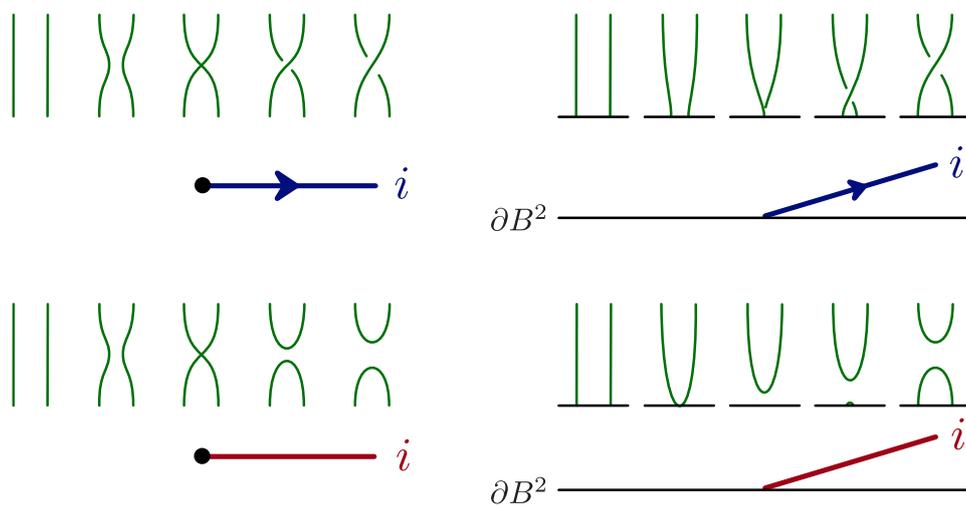


図 6: 次数 1 の頂点 (下段) に対応するモーションピクチャー (上段)

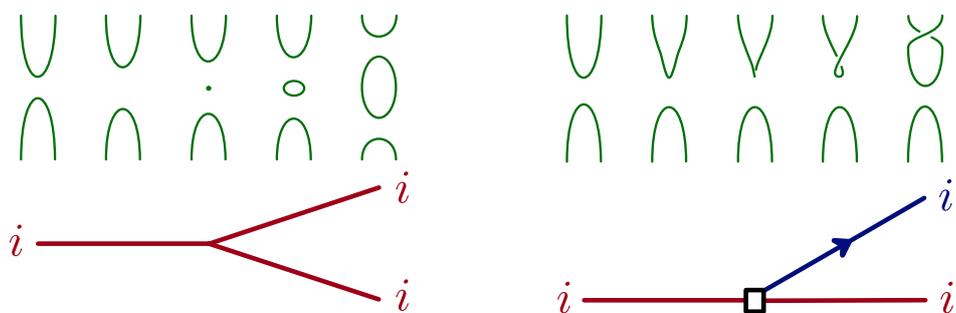


図 7: 次数 3 の頂点 (下段) に対応するモーションピクチャー (上段)

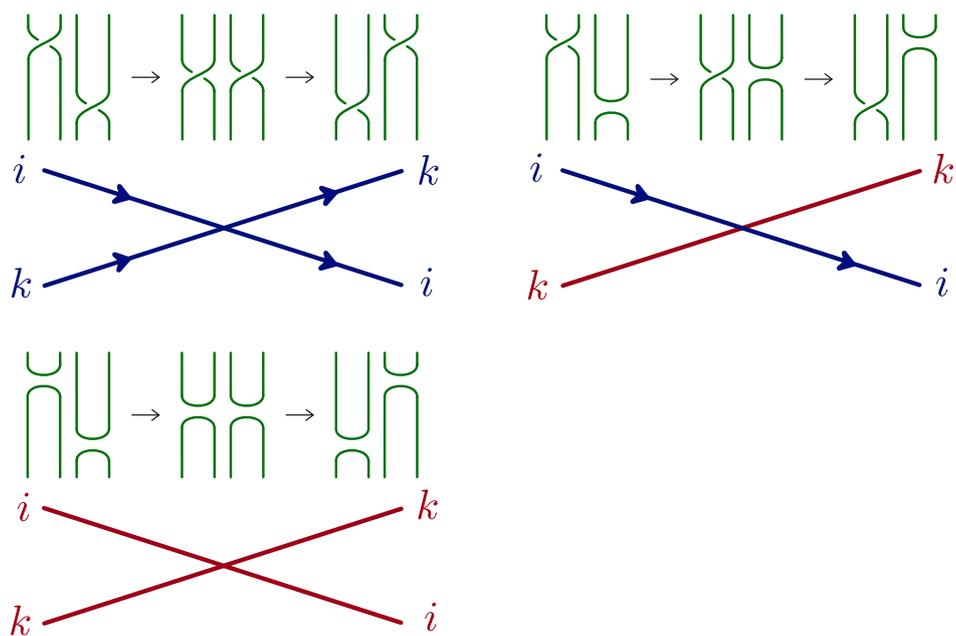


図 8: 次数 4 の頂点 (下段) に対応するモーションピクチャー (上段)

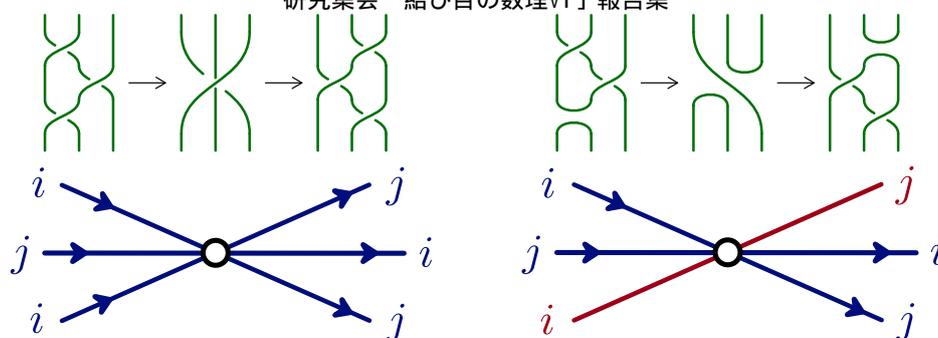
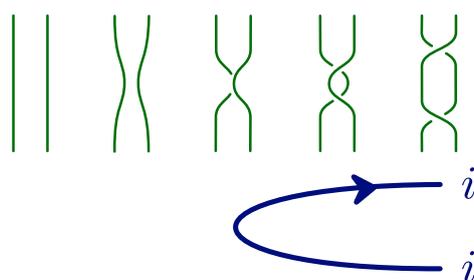


図 9: 次数 6 の頂点 (下段) に対応するモーションピクチャー (上段)

図 10:  $h$  の臨界点 (下段) に対応するモーションピクチャー (上段)

ての頂点が  $\sigma$ -頂点であるとき、モーションピクチャーはニットではなくブレイドからなるモーションピクチャーとなる。このとき  $S$  を次数  $n$  の**ブレイド状曲面 (braided surface)** という。

## 参考文献

- [1] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.
- [2] Seiichi Kamada. Surfaces in  $\mathbf{R}^4$  of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.
- [3] Seiichi Kamada. *Braid and knot theory in dimension four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [4] Jun Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.*, 24(4):745–758, 1987.
- [5] Inasa Nakamura. Knotted surfaces constructed using generators of the BMW algebras and their graphical description. 2023.
- [6] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.