Quasitoric組み紐群の最小生成系について

大森　源城　(芝浦工業大学)*

1. 導入

B_n を n 本の紐からなる組み紐群とし，B_n の元を n-組み紐もしくは単に組み紐と呼ぶ．B_1 は自明群であり B_2 は無限巡回群となる為，本稿では，本質的に $n \geq 3$ の場合を考える．絡み目とは，$\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれたいくつかの単位円周の非交和のことであり，特にその成分数が 1 のものを結び目という．Alexander [1] によって，任意の絡み目はある組み紐の閉包で表されることが示されている．

トーラス絡み目とは，$\mathbb{R}^3$ 内に標準的に埋め込まれたトーラスに埋め込まれている絡み目のことである．組み紐 β の閉包がトーラス絡み目となる時，その組み紐 β を**トーラス組み紐**と呼ぶ．$\sigma_i \in B_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を図 1 右のような組み紐とし，組み紐 $b_1, b_2 \in B_n$ に対し，それらの積 b_1b_2 は図 1 中央のように定める．この時，任意のトーラス絡み目 L に対し，ある正整数 $n, m \in \mathbb{Z}$ が存在して，L は n-組み紐 $\beta(n,m) = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^m \in B_n$ の閉包として表されることが分かる．この n-組み紐 $\beta(n,m)$ を (n,m)-*toric* **組み紐**と呼ぶ．例えば，図 2 左は，$(4,3)$-toric 組み紐 $\beta(4,3)$ の閉包として得られるトーラス結び目である．

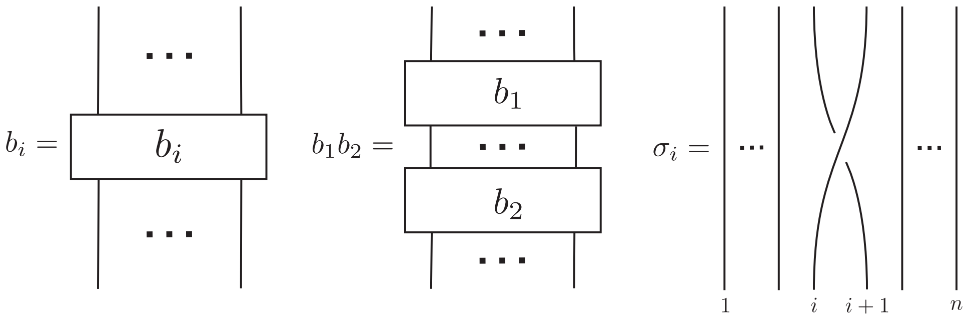

図 1: 組み紐の積 b_1b_2 と組み紐 $\sigma_i \in B_n$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

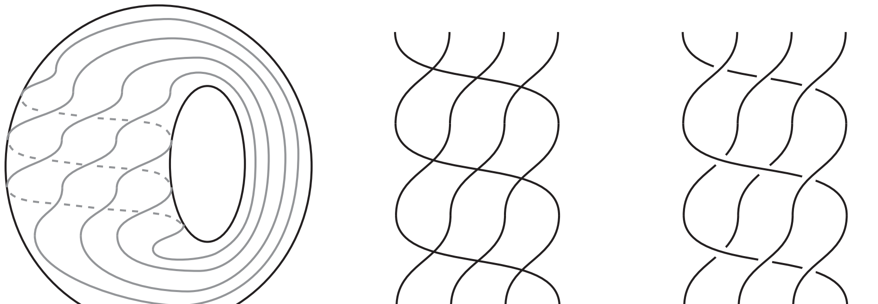

図 2: $(4,3)$-toric 組み紐 $\beta(4,3)$ の閉包及び $\beta(4,3)$ の“影”と $(4,3)$-quasitoric 組み紐 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3)(\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_3)$.

本研究は科研費 (課題番号: JP21K13794*1) の助成を受けたものである．
* 〒337-8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307
e-mail: omori@sic.shibaura-it.ac.jp

Manturov [4] は，(n,m)-toric 組み紐 $\beta(n,m) \in B_n$ の一般化として n-組み紐

$$(\sigma_1^{\varepsilon_1^1}\sigma_2^{\varepsilon_2^1}\cdots\sigma_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}^1})(\sigma_1^{\varepsilon_1^2}\sigma_2^{\varepsilon_2^2}\cdots\sigma_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}^2})\cdots(\sigma_1^{\varepsilon_1^m}\sigma_2^{\varepsilon_2^m}\cdots\sigma_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}^m}) \in B_n$$

を導入した．ここで，上式内の各 σ_i の指数は，$\varepsilon_i^j \in \{\pm 1\}$ である．この n-組み紐を，(n,m)-*quasitoric* **組み紐**または n-*quasitoric* **組み紐**と呼ぶ．例えば，図 2 右は，$(4,3)$-quasitoric 組み紐 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3)(\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_3)$ である．定義から (n,m)-quasitoric 組み紐の“影”は，(n,m)-toric 組み紐 $\beta(n,m) \in B_n$ の“影”と一致し，例えば，$(4,3)$-quasitoric 組み紐の影は図 2 中央のようになる．(n,m)-quasitoric 組み紐は，(n,m)-toric 組み紐 $\beta(n,m)$ の“影”に対し，その各交差の上下を指定する事で得ることが出来る．Manturov [4] は，任意の絡み目はある (n,m)-quasitoric 組み紐の閉包で表されることを示した．Lamm [2, 3] は，Manturov とは独立に，n-quasitoric 組み紐と B_n の中で共役な rosette 組み紐と呼ばれる組み紐を定義しており，Manturov と同様の結果を与えている．

QB_n を n-quasitoric 組み紐全体からなる B_n の部分集合とする．論文 [4] にて，Manturov は，n-quasitoric 組み紐の逆元もまた n-quasitoric 組み紐となることを示しており，これにより，QB_n は B_n の部分群となる事が分かる．この部分群 QB_n を *quasitoric* **組み紐群**と呼ぶことにする．

本稿の主結果は，QB_n の最小生成系を与えた事であり，その最小性は，本稿で与える QB_n のアーベル化の生成元の個数による下からの評価により保証される．

2. 主結果

$(n,1)$-quasitoric 組み紐 $\delta_i \in QB_n$ $(0 \le i \le n-1)$ を，以下のように定義する（図 3 参照）：

$$\delta_0 = \sigma_1\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}, \qquad \delta_1 = \sigma_1\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1}, \qquad \delta_2 = \sigma_1\cdots\sigma_{n-3}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1},$$
$$\cdots \qquad \delta_{n-2} = \sigma_1\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1}, \qquad \delta_{n-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1}.$$

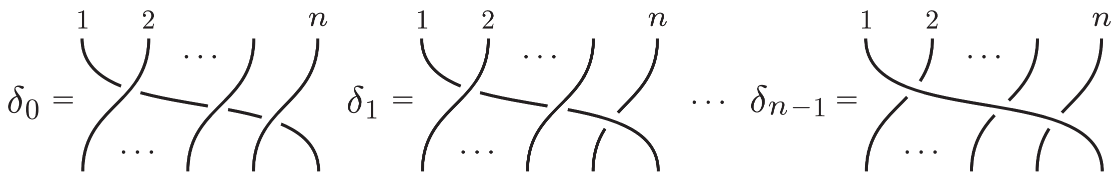

図 3: $(n,1)$-quasitoric 組み紐 $\delta_i \in QB_n$ $(0 \le i \le n-1)$.

以降，便宜上，

$$N = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \ge 3\text{：奇数}), \\ \frac{n+2}{2} & (n \ge 4\text{：偶数}) \end{cases}$$

とおく．以下が本稿の主結果である．

定理 2.1. $n \ge 3$ に対し，QB_n は δ_i $(0 \le i \le N-1)$ たちで生成される．

定理 2.2.

$$H_1(QB_n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{N-1} \oplus \mathbb{Z}_n & \textit{if } n \ge 3 \textit{ is odd}, \\ \mathbb{Z}^{N-1} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}} & \textit{if } n \ge 4 \textit{ is even}. \end{cases}$$

注意 2.3. 定理2.2により，QB_n のアーベル化は N 元生成される為，QB_n の生成元の個数は下から N で抑えられる．従って，定理 2.1 の QB_n の生成系が最小である事が分かる．

参考文献

[1] J. W. Alexander, *A lemma on a system of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sri. USA. **9** (1923), 93–95.

[2] C. Lamm, *Zylinder-Knoten und symmetrische Vereinigungen*, Ph.D. thesis, University of Bonn, Bonner Mathematische Schriften 321 (1999).

[3] C. Lamm, *Fourier Knots*, arXiv:1210.4543 (English translation of a part of "Zylinder-Knoten und symmetrische Vereinigungen", Ph.D. thesis, University of Bonn, Bonner Mathematische Schriften 321 (1999)).

[4] V. O. Manturov, *A combinatorial representation of links by quasitoric braids*, European J. Combin. **23** (2002), no. 2, 207–212.