Epimorphisms between genus two handlebody-knot groups

小澤 裕子 (明治大学大学院先端数理科学研究科)*

概 要

H_1, H_2 を種数 g のハンドル体結び目とし, $G(H_1), G(H_2)$ をそれらの (ハンドル体) 結び目群とする. 特に $g=1$ の場合は通常の結び目と同一視できる. $G(H_1)$ から $G(H_2)$ への全射準同型があるとき $H_1 \geq H_2$ と定義する. 素な結び目の場合, 関係 "$\geq$" は半順序となり, 11 交点までは決められている. 特に全射準同型の非存在性は Alexander 多項式とねじれ Alexander 多項式を用いて決められている. 今回は交差数 6 以下の既約な種数 2 のハンドル体結び目の結び目群の間の全射準同型の非存在性について調べた結果を報告する.

1. ハンドル体結び目

3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ に埋め込まれた種数 g のハンドル体を, **種数 g のハンドル体結び目**という. 2 つのハンドル体結び目 H_1, H_2 が**同型**であるとは, $\mathbb{S}^3$ から $\mathbb{S}^3$ への向きを保存する同相写像 Φ が存在して, $\Phi(H_1) = H_2$ となるときをいう. ハンドル体結び目が**自明**であるとは, それが $\mathbb{S}^3$ に標準的に埋め込まれたハンドル体に同型であるときをいう. ハンドル体結び目 K が**既約**であるとは, $\mathbb{S}^3$ 内の 2 次元球面 S で, $S \cap K$ が K に固有に埋め込まれた本質的円板となるものが存在しないときをいう.

ハンドル体結び目は空間グラフと密接に関係している. **空間グラフ**とは, $\mathbb{S}^3$ に埋め込まれた有限グラフのことであり, 全ての頂点の次数が 3 である空間グラフを**空間 3 価グラフ**という. 任意のハンドル体結び目はある空間 3 価グラフの正則近傍として得られるので, ハンドル体結び目の同型類は連結空間 3 価グラフの近傍同値類と 1 対 1 に対応する [3]. 特に種数 1 のハンドル体結び目は結び目と同一視でき, ハンドル体結び理論は結び目理論の種数の一般化であると考えることができる. ハンドル体結び目 H の交差数とは, H を正則近傍に持つ空間 3 価グラフの交差数を指す.

2. ハンドル体結び目の前順序

ハンドル体結び目 H の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - H)$ を $G(H)$ と定義し, H の **(ハンドル体) 結び目群**という. これは H の同型類の不変量である. 種数 g のハンドル体結び目 H_1, H_2 に対し $G(H_1)$ から $G(H_2)$ への全射準同型が存在するとき, $H_1 \geq H_2$ と定義する. 今回は特に, 種数 g のハンドル体結び目 H_1, H_2 に対し $G(H_1)$ から $G(H_2)$ への全射準同型が存在しないとき, $H_1 \ngeq H_2$ と書くこととする.

命題 2.1. 種数 g のハンドル体結び目の同型類の集合において, この関係 "$\geq$" は前順序になる. 即ち, 次を満たす.

- $H_1 \geq H_1$
- $H_1 \geq H_2,\ H_2 \geq H_3 \Rightarrow H_1 \geq H_3$

* 東京都中野区中野 4-21-1
e-mail: yuko_ozawa@meiji.ac.jp

特に種数1, 即ち結び目の場合, 次を満たす.

命題 2.2. 素な結び目型の集合において, この関係“ $\geq$ ”は半順序になる. 即ち, 次を満たす.

- $H_1 \geq H_1$
- $H_1 \geq H_2,\ H_2 \geq H_1 \Rightarrow H_1 \cong H_2$
- $H_1 \geq H_2,\ H_2 \geq H_3 \Rightarrow H_1 \geq H_3$

この半順序は, 交差数11以下までは完全に決められている (北野-鈴木 [9], [10], 堀江-北野-松本-鈴木 [2]). 特に全射準同型の非存在性についてはAlexander多項式とねじれAlexander多項式を用いて決められている. そこで今回は種数2の場合に着目し, 交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目において, 特に $H_1 \not\geq H_2$ となる順序対 (H_1, H_2) を調べた. ここで交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目は完全に分類されており, 図2.1の21個に限る (石井-岸本-森内-鈴木 [4]).

3. ハンドル体結び目の(ねじれ)Alexander不変量

ハンドル体結び目 H_1, H_2 に対し, $H_1 \not\geq H_2$ を判定するための有効な手段として, Alexander不変量がある. 以下, $F_s = \langle x_1, x_2, \ldots, x_s \mid \emptyset \rangle$ を階数 s の自由群とし,

$$G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_s \mid r_1, r_2, \ldots, r_t \rangle$$

を**不足度** $d = s - t > 0$ の有限表示群とする. $\varphi : F_s \to G$ を標準全射とし, 一方, 可換群 C に対し, $\psi : G \to C$ を準同型とする. これらを群環の準同型 $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}G$, $\tilde{\psi} : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}C$ にそれぞれ拡張しておく. このとき, 成分を $\mathbb{Z}C$ に持つ ∞ 行 s 列の行列

$$A\left(G, \tilde{\psi}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \\ O \end{pmatrix}$$

を, G の ψ に関する **Alexander行列**と呼ぶ. ここで第 $t+1$ 行以降無限個並ぶ零行ベクトルを省略して単に

$$A\left(G, \tilde{\psi}\right) = \left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)$$

とも表す.

R を単位的可換環とし, M を R に成分を持つ ∞ 行 s 列の行列とする (但し最初の t 行のみ0でない成分がある). $d \geq 0$ に対し, M の $\boldsymbol{d}$ **番初等イデアル** $E_d(M)$ を, $s - d > t$ のとき (0), $0 < s - d \leq t$ のとき M の $(s-d)$ 次小行列式が生成する R のイデアル, $s - d \leq 0$ のとき $(1) = R$ と定義する. このとき, $A\left(G, \tilde{\psi}\right)$ に対し, 不足度を正として d 番初等イデアル $E_d\left(A\left(G, \tilde{\psi}\right)\right)$ を取ると,

$$E_d\left(A\left(G, \tilde{\psi}\right)\right) = \begin{cases} (0) & (0 \leq d < s - t) \\ A\left(G, \tilde{\psi}\right) \text{ の } (s-d) \text{ 次小行列式全体が生成する } \mathbb{Z}C \text{ のイデアル} & (s - t \leq d < s) \\ (1) & (s \leq d) \end{cases}$$

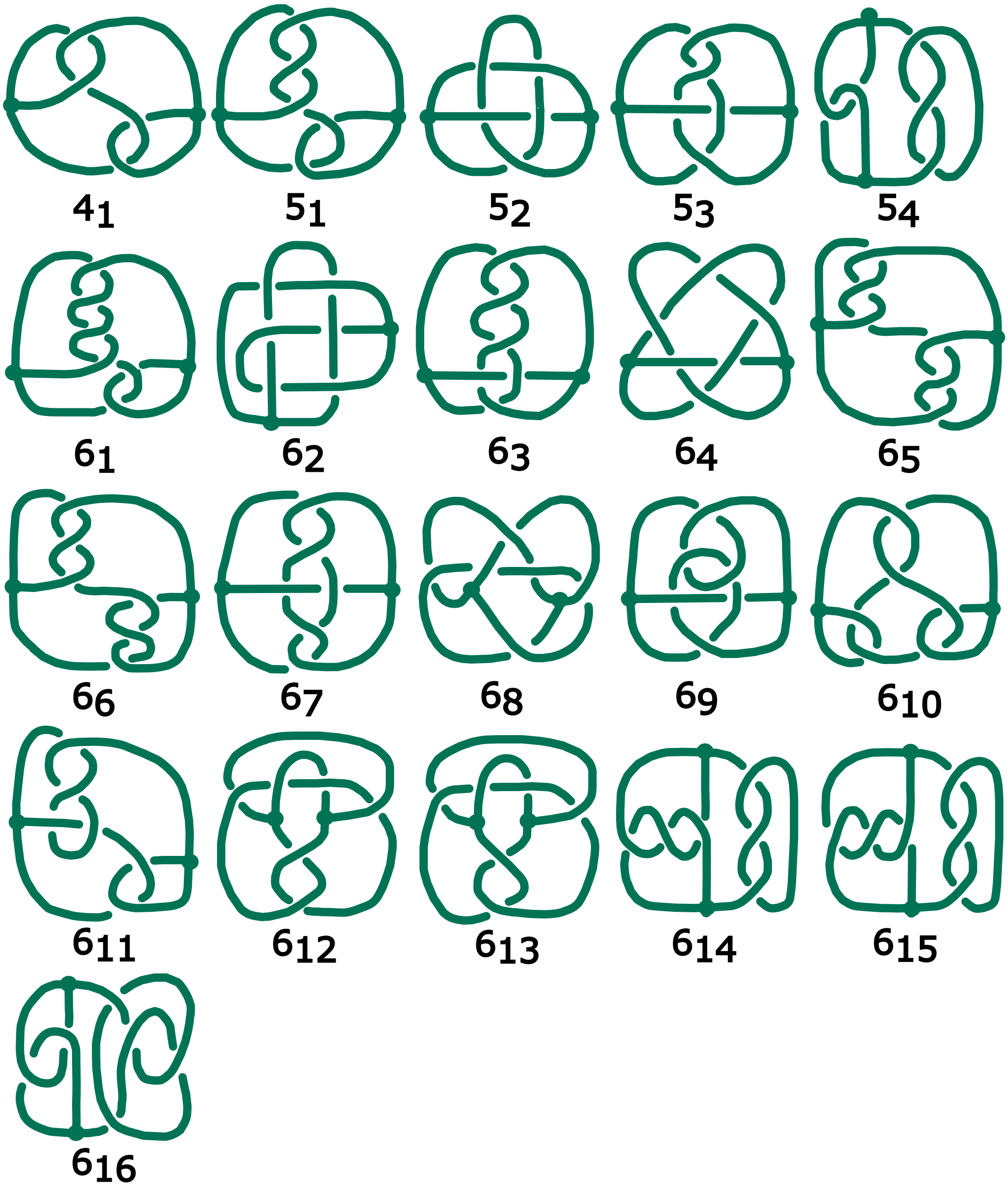

図 2.1: 交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目

となる．これを G の ψ に関する d **番 Alexander イデアル**という．G の ψ に関する d 番 Alexander イデアル $E_d\left(A\left(G,\tilde{\psi}\right)\right)$ は G の表示の取り方に依らない [1], [6].

更に, $GL(n;R)=\{A\in M_n(R)\mid \det A\neq 0\}$ を単位的可換環 R 上の n 次一般線形群とし, $\rho:G\to GL(n;R)$ を G の $GL(n;R)$ **表現**とする．これも環準同型 $\tilde{\rho}:\mathbb{Z}G\to M_n(R)$ に拡張しておく．また, 準同型 $\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}:\mathbb{Z}G\to M_n(RC)$ を

$$\left(\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\left(\sum r_i g_i\right)=\sum r_i\psi\left(g_i\right)\rho\left(g_i\right)\ \ (r_i\in\mathbb{Z},\ g_i\in G)$$

で定義し, これを $\tilde{\rho}$ と $\tilde{\psi}$ の**テンソル積準同型**という．このとき, 成分を $M_n(RC)$ に持つ ∞ 行 s 列の行列

$$A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)=\begin{pmatrix}\left(\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\circ\tilde{\varphi}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\\ O\end{pmatrix}$$

を, G の準同型 ψ と表現 ρ に関する**ねじれ Alexander 行列**という．ここで, 第 $t+1$ 行以降無限個並ぶ (n 行 n 列の零行列から成る) 零行ベクトルを省略して単に

$$A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)=\left(\left(\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\circ\tilde{\varphi}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)$$

とも表す．また, $A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)$ を RC に成分を持つ nt 行 ns 列の行列ともみなす．nt 行 ns 列の行列 $A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)$ に対し, その d 番初等イデアルは,

$$E_d\left(A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\right)$$
$$=\begin{cases}(0) & (0\leq d<ns-nt)\\ A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\text{ の }(nt-d)\text{ 次小行列式全体が生成するイデアル} & (ns-nt\leq d<ns)\\ (1) & (ns\leq d)\end{cases}$$

となる．これを, G の準同型 ψ と表現 ρ に関する d **番ねじれ Alexander イデアル**という．G の準同型 ψ と表現 ρ に関する d 番ねじれ Alexander イデアル $E_d\left(A\left(G,\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\right)$ は G の表示の取り方に依らない [6].

種数 g のハンドル体結び目 H に対し, そのハンドル体結び目群 $G(H)$ は, H を正則近傍に持つ空間連結 3 価グラフ K の空間グラフ群と同型で, K の図式を用いて計算でき, 不足度 g の有限表示を持つ．$\psi:G(H)\to C$ を $G(H)$ から可換群 C への準同型とし, $\rho:G(H)\to GL(n;R)$ を $G(H)$ の $GL(n;R)$ 表現とする．このとき, ハンドル体結び目の (ねじれ)Alexander イデアルが以下のように定義される．

（1）$E_d\left(A\left(G(H),\tilde{\psi}\right)\right)$ を, ハンドル体結び目 H の準同型 ψ に関する d **番 Alexander イデアル**という．$E_d\left(A\left(G(H),\tilde{\psi}\right)\right)$ は, $G(H)$ の表示の取り方に依らない．

（2）$E_d\left(A\left(G(H),\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\right)$ を, ハンドル体結び目 H の準同型 ψ と表現 ρ に関する d **番ねじれ Alexander イデアル**という．$E_d\left(A\left(G(H),\tilde{\rho}\otimes\tilde{\psi}\right)\right)$ は, $G(H)$ の表示の取り方に依らない．

4. ハンドル体結び目群の間の全射準同型と(ねじれ)Alexander不変量

以下で, (ねじれ)Alexander不変量を用いた, 全射準同型$\sigma : G(H_1) \to G(H_2)$の非存在性を示す方法を説明する.

命題 4.1. G_1, G_2を有限表示群とし, $\sigma : G_1 \to G_2$を全射準同型とする. $\psi_i : G_i \to C$ $(i = 1, 2)$はG_iから可換群Cへの準同型で, $\psi_1 = \psi_2 \circ \sigma$をみたすとする. $\rho_i : G_i \to GL(n; R)$ $(i = 1, 2)$はG_iの$GL(n; R)$表現で, $\rho_1 = \rho_2 \circ \sigma$をみたすとする. このとき, 任意の$d \geq 0$に対し

$$E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\psi}_1\right)\right) \subset E_d\left(A\left(G_2, \tilde{\rho}_2 \otimes \tilde{\psi}_2\right)\right)$$

が成り立つ.

命題4.1の直接の帰結として, 次が得られる.

命題 4.2. G_1, G_2を有限表示群とし, Cを可換群とする. このとき, ある準同型$\psi_2 : G_2 \to C$と表現$\rho_2 : G_2 \to GL(n; R)$が存在して, ある$d \geq 0$について

$$E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\psi}_1\right)\right) \not\subset E_d\left(A\left(G_2, \tilde{\rho}_2 \otimes \tilde{\psi}_2\right)\right)$$

が任意の準同型$\psi_1 : G_1 \to C$と任意の表現$\rho_1 : G_1 \to GL(n; R)$について成り立つならば, G_1からG_2への全射準同型は存在しない.

証明. もしG_1からG_2への全射準同型σが存在したとすると, $\psi_1 = \psi_2 \circ \sigma$, $\rho_1 = \rho_2 \circ \sigma$について, 命題4.1より

$$E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\psi}_1\right)\right) \subset E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\rho}_2 \otimes \tilde{\psi}_2\right)\right)$$

となる. しかし, 任意のψ_1, ρ_1に対しこの包含は成り立たないはずなので矛盾である. □

命題4.1において, G_iから$GL(1; R)$への自明表現を考えることにより$(i = 1, 2)$, 通常のAlexanderイデアルについて, 良く知られた次の事実が得られる.

系 4.3. (樹下 [8]) G_1, G_2を有限表示群とし, $\sigma : G_1 \to G_2$を全射準同型とする. $\psi_i : G_i \to C$ $(i = 1, 2)$はG_iから可換群Cへの準同型で, $\psi_1 = \psi_2 \circ \sigma$をみたすとする. このとき, 任意の$d \geq 0$に対し

$$E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\psi}_1\right)\right) \subset E_d\left(A\left(G_2, \tilde{\psi}_2\right)\right)$$

が成り立つ.

注意 4.4. 種数が1, 即ち結び目の場合, 系 4.3は, 全射準同型$\sigma : G(H_1) \to G(H_2)$が存在するならば, H_2のAlexander多項式$\Delta_{H_2}(t)$はH_1のAlexander多項式$\Delta_{H_1}(t)$を割り切るという事実([1])の一般化である.

系4.3より, 次の系も直ちに分かる.

系 4.5. G_1, G_2を有限表示群とし, Cを可換群とする. このとき, ある準同型$\psi_2 : G_2 \to C$が存在して, ある$d \geq 0$について

$$E_d\left(A\left(G_1, \tilde{\psi}_1\right)\right) \not\subset E_d\left(A\left(G_2, \tilde{\psi}_2\right)\right)$$

が任意の準同型$\psi_1 : G_1 \to C$について成り立つならば, G_1からG_2への全射準同型は存在しない.

そこでまずは結び目の場合と同様に整係数Laurent多項式環のAlexanderイデアルを応用したいが, 種数2以上のハンドル体結び目の場合は, 種数1の場合の1番Alexanderイデアル(Alexander多項式が生成する単項イデアル)のような標準的なAlexanderイデアルが一般には取れないため, 任意の準同型ψを考える必要がある. そこで次の命題が有効である.

命題 4.6. Hを種数gのハンドル体結び目, $\langle t \mid \emptyset \rangle$を$t$が生成する無限巡回群とする. このとき, 任意の準同型$\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$に対し, Hの整係数1次元ホモロジー類ℓが存在して, $\psi = \psi_\ell$となる. ここで$\psi_\ell : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$は, $x \in G(H)$に対し$\psi_\ell(x) = t^{\mathrm{lk}(\alpha(x),\ell)}$で定義される準同型写像で, $\alpha : G(H) \to H_1(\mathbb{S}^3 - H; \mathbb{Z})$はアーベル化写像, $\mathrm{lk}(\alpha(x), \ell)$は$\alpha(x)$と$\ell$の絡み数を表す.

命題4.6より, 任意の$\ell \in H_1(H;\mathbb{Z})$に対し準同型$\psi_\ell$を考えれば, 任意の準同型$\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$を網羅できることになる.

5. 交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目の結び目群の間の全射準同型の非存在性

交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目Hについて, 各$G(H)$の表示を求めて適当なTietze変換を施すことで, 各$G(H)$の生成元は3個, 関係子はちょうど1個となる. 従ってHの準同型$\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$に関する$d$番Alexanderイデアル$E_d\left(A(G(H), \tilde{\psi})\right)$は

$$E_d\left(A\left(G(H), \tilde{\psi}\right)\right) = \begin{cases} (0) & (d \leq 1) \\ A\left(G(H), \tilde{\psi}\right) \text{の各成分が生成するイデアル} & (d = 2) \\ (1) & (d \geq 3) \end{cases}$$

となるので, 2番Alexanderイデアルを求めればよい.

そこで命題4.2, 系4.5を適用して, $H_1 \not\geq H_2$となるハンドル体結び目の組(H_1, H_2)を見つけることができる.

例 5.1. $5_1, 5_4, 6_3, 6_4, 6_{10}, 6_{11}, 6_{16}$はどのような準同型$\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$についても2番Alexanderイデアルが$(1)$であり, 一方, $4_1, 5_2, 5_3, 6_1, 6_2, 6_5, 6_6, 6_7, 6_8, 6_9, 6_{12}, 6_{13}, 6_{14}, 6_{15}$は適当に準同型$\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$を取ると2番Alexanderイデアルが$(1)$でない. 従って系4.5から

$$5_1, 5_4, 6_3, 6_4, 6_{10}, 6_{11}, 6_{16} \not\geq 4_1, 5_2, 5_3, 6_1, 6_2, 6_5, 6_6, 6_7, 6_8, 6_9, 6_{12}, 6_{13}, 6_{14}, 6_{15}$$

が分かる.

例 5.2. 4_1の2番Alexanderイデアルは$(1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2})$と計算できる. $c_1 = 1, c_2 = -1$のとき, $(2 - t)$となる. 一方, 5_3の2番Alexanderイデアルは$(2, 1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2})$と計算できる. もし$(2, 1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2})$が$(2 - t)$に含まれていたとすると, ある$f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$が存在して, $2 = (2 - t)f(t)$と書けることになる. しかし$t = 2$のとき, $2 = 0$となり矛盾となる. よって, $(1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2}) \not\subset (2 - t)$となり, $5_3 \not\geq 4_1$となることが分かる.

例 5.3. $6_3, 6_{10}$ について, 任意の準同型 $\psi_1 : G(6_3) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$, 及び任意の準同型 $\psi_2 : G(6_{10}) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$ に対し,

$$E_2\left(A\left(G(6_3), \tilde{\psi_1}\right)\right) = (1), \quad E_2\left(A\left(G(6_{10}), \tilde{\psi_2}\right)\right) = (1)$$

となるので, 系4.5を応用することができない. ここで, ねじれAlexanderイデアルを計算する.
$G(6_3)$ の群表示は,

$$G(6_3) \cong \langle x, y_1, y_2 | y_2 y_1^{-1} x^{-1} y_1 y_2^{-1} x^{-1} y_1 x y_1^{-1} x y_1^{-1} x^{-1} y_1 x^{-1} y_1^{-1} x y_2 y_1^{-1} x y_1 \rangle$$

となる. 準同型 $\psi : G(6_3) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$ の対応を

$$\psi(x) = 1, \quad \psi(y_1) = t, \quad \psi(y_2) = t$$

とし, 表現 $\rho : G(6_3) \to SL(2; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の対応を

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき 6_3 の4番ねじれAlexanderイデアルを計算すると,

$$E_4\left(A\left(G(6_3), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}\right)\right) = (1 - t^2)$$

となる. 一方, 6_{10} はどのような準同型 $\psi : G(6_{10}) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$ と表現 $\rho : G(6_{10}) \to SL(2; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ についても4番ねじれAlexanderイデアルが(1)と計算できる. 従って, 命題4.2より $6_{10} \not\geq 6_3$ が分かる.

0_1 を種数2の自明なハンドル体結び目とする. 0_1 の結び目群 $G(0_1)$ は階数2の自由群である. 0_1 は既約でないので, 交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目の中には含まれていない.

交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目 H で $H \geq 0_1$ となるものを考えることで, 交差数6以下の既約な種数2のハンドル体結び目の結び目群の間の全射準同型の非存在性を決定できる場合もある. 実際に 0_1 への全射準同型を構築することで次が得られる.

定理 5.4. $4_1, 5_4, 6_1, 6_7, 6_{10}, 6_{14}, 6_{16} \geq 0_1$.

また, ハンドル体結び目群が自由群への全射準同型を持つ場合について, 以下の事実がJaco-McMillan [7], 鈴木 [12] によって知られている.

定理 5.5. 種数 g のハンドル体結び目 H に対し, $G(H)$ から階数 g の自由群 F_g への全射準同型が存在するならば, 任意の準同型 $\psi : G(H) \to \langle t \mid \emptyset \rangle$ に対し, g 番Alexanderイデアル $E_g\left(A\left(G(H), \tilde{\psi}\right)\right)$ は単項イデアルである.

定理5.4, 定理5.5を組み合わせて, 次が得られる.

定理 5.6. $5_2, 5_3, 6_2, 6_5, 6_6, 6_8, 6_9, 6_{12}, 6_{13} \not\geq 4_1, 5_4, 6_1, 6_7, 6_{10}, 6_{14}, 6_{16}$.

証明. $5_2, 5_3, 6_2, 6_5, 6_6, 6_8, 6_9, 6_{12}, 6_{13}$ は, 適当に準同型 ψ を取ることで 2 番 Alexander イデアルが非単項イデアルとなる. 従って定理 5.5 により, これらのハンドル体結び目群から $G(0_1)$ への全射準同型は存在しない. また, もしこれらのハンドル体結び目群から $G(4_1), G(5_4), G(6_1), G(6_7), G(6_{10}), G(6_{14}), G(6_{16})$ への全射準同型が存在するなら, 定理 5.4 の全射準同型と合成して $G(0_1)$ への全射準同型が存在することになるが, これは全射準同型が存在しないことに矛盾する. □

更に, ハンドル体結び目群から有限群への準同型の個数によって決定できる組もある.

命題 5.7. H_1, H_2 を種数 g のハンドル体結び目とする. ある有限群 G が存在して, $G(H_1)$ から G への (共役を除いた) 準同型の個数が, $G(H_2)$ から G への (共役を除いた) 準同型の個数を下回るならば, $G(H_1)$ から $G(H_2)$ への全射準同型は存在しない.

交差数 6 以下の既約な種数 2 のハンドル体結び目 H について, $G(H)$ から $SL(2;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ $(p = 2, 3, 5, 7, 11)$ と $SL(3;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ $(q = 2, 3)$ への共役を除いた準同型の個数を計算し, その結果から, それらのハンドル体結び目群の間の全射準同型の非存在性が分かるものがある.

例 5.8. $G(6_5)$ から $SL(2;\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ への共役を除いた準同型の個数は 3412, $G(6_3)$ から $SL(2;\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ への共役を除いた準同型の個数は 3444 と計算できる. 従って, 命題 5.7 より $6_5 \not\geq 6_3$ が分かる.

以上の議論を組み合わせた結果, 交差数 6 以下の既約な種数 2 のハンドル体結び目の組 (H_1, H_2) で, 以下に挙げたものが, $G(H_1)$ から $G(H_2)$ への全射準同型が存在するか否かの判定が現段階でできていないものである. ここで, $G(5_1)$ と $G(6_4)$, $G(5_2)$ と $G(6_{13})$, $G(6_{14})$ と $G(6_{15})$ はそれぞれ同型であることが知られている (石井-岸本-小沢 [5], Lee-Lee [11]). そのため, $6_4, 6_{13}, 6_{15}$ については省略する.

$(4_1, 5_1), (4_1, 5_2), (4_1, 5_3), (4_1, 6_2), (4_1, 6_3), (4_1, 6_5), (4_1, 6_6), (4_1, 6_8), (4_1, 6_{11}),$
$(5_2, 5_1), (5_2, 6_3), (5_2, 6_{11}), (5_3, 6_3), (5_3, 6_{11}), (5_4, 5_1), (5_4, 6_3), (5_4, 6_{10}), (5_4, 6_{11}),$
$(6_1, 5_1), (6_1, 5_3), (6_1, 6_2), (6_1, 6_3), (6_1, 6_5), (6_1, 6_6), (6_1, 6_8), (6_1, 6_{11}), (6_2, 6_3), (6_2, 6_{11}),$
$(6_7, 5_1), (6_7, 5_3), (6_7, 6_2), (6_7, 6_3), (6_7, 6_5), (6_7, 6_8), (6_7, 6_{11}), (6_7, 6_{12}), (6_9, 5_1), (6_9, 6_3), (6_9, 6_{11}),$
$(6_{12}, 5_1), (6_{12}, 6_3), (6_{12}, 6_{11}), (6_{14}, 5_1), (6_{14}, 5_2), (6_{14}, 6_3), (6_{14}, 6_9), (6_{14}, 6_{10}), (6_{14}, 6_{11}),$
$(6_{16}, 5_1), (6_{16}, 6_3), (6_{16}, 6_{10}), (6_{16}, 6_{11}).$

参考文献

[1] R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to knot theory, Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics **57**, *Springer-Verlag, New York-Heidelberg,* 1977.

[2] K. Horie, T. Kitano, M. Matsumoto and M. Suzuki, A partial order on the set of prime knots with up to 11 crossings, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), 275–303.

[3] A. Ishii, Moves and invariants for knotted handlebodies, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 1403–1418.

[4] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi and M. Suzuki, A table of genus two handlebody-knots up to six crossings, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250035, 9 pp.

[5] A. Ishii, K. Kishimoto and M. Ozawa, Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots. *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), 407–417.

[6] A. Ishii, R. Nikkuni and K. Oshiro, On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links, *Osaka J. Math.* **55** (2018), 297–313.

[7] W. Jaco and D. R. McMillan, Retracting three-manifolds onto finite graphs, *Illinois J. Math.* **14** (1970), 150–158.

[8] S. Kinoshita, On elementary ideals of polyhedra in the 3-sphere, *Pacific J. Math.* **42** (1972), 89–98.

[9] T. Kitano and M. Suzuki, A partial order in the knot table, *Experiment. Math.* **14** (2005), 385–390.

[10] T. Kitano and M. Suzuki, Corrigendum to: “A partial order in the knot table”, *Exp. Math.* **20** (2011), 371.

[11] J. H. Lee and S. Lee, Inequivalent handlebody-knots with homeomorphic complements, *Algebr. Geom. Topol.* **12** (2012), 1059–1079.

[12] S. Suzuki, Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, *Tokyo J. Math.* **7** (1984), 233–247.