向き付け不可能曲面のファイン曲線グラフの自己同型群

久野 恵理香　(大阪大学)*

1. 研究背景と主結果

本稿では，$N = N_g$ と $S = S_g$ で，種数 g の向き付け不可能閉曲面と向き付け可能閉曲面をそれぞれ表すとする．また，F を N または S とする．Bowden–Hensel–Webb [2] が，新しい曲線グラフとして以下を導入した．

定義 1.1. 曲面 F の**ファイン曲線グラフ** (**fine curve graph**) $\mathcal{C}^\dagger(F)$ とは，F 上の本質的な単純閉曲線を頂点とし，2 つの頂点はそれらに対応する 2 つの単純閉曲線が F 上で交わらないときに辺で結ばれる，と定めることによってできるグラフのことである (図 1)．ここで，曲面 F 上の単純閉曲線 c が**本質的** (**essential**) であるとは，c は非分離的であるか，もしくは c は分離的であり F 上の円板もメビウスの帯も囲まないことである．

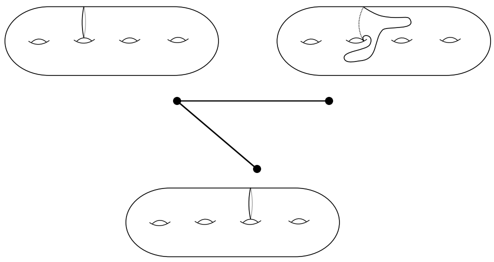

図 1: ファイン曲線グラフの例.

曲面 F の写像類群 $\mathrm{Mod}(F)$ が古典的な曲線グラフ $\mathcal{C}(F)$ に自然に作用するように，F の同相写像からなる群 $\mathrm{Homeo}(S)$ はファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(F)$ に自然に作用する．1997 年に Ivanov [3] は，種数 3 以上の向き付け可能閉曲面 S に対して，S の古典的な曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$ は拡大写像類群 $\mathrm{Mod}^\pm(S)$ と同型であることを証明した．Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] は，Ivanov [3] の結果をファイン曲線グラフに対して考えた．すなわち，種数 2 以上の向き付け可能閉曲面 S に対して，S のファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(S)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(S))$ は S の同相写像からなる群 $\mathrm{Homeo}(S)$ と同型であることを証明した．

一方向き付け不可能曲面に対しては，Atalan–Korkmaz [1] が，種数 5 以上の向き付け不可能閉曲面 N に対して，N の曲線グラフ $\mathcal{C}(N)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}(N))$ は N の写像類群 $\mathrm{Mod}(N)$ と同型であることを証明した．このような研究動向の中，講演者たちは Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] の結果を向き付け不可能閉曲面へ一般化した:

定理 1.2. 種数 4 以上の向き付け不可能閉曲面 N に対して，自然な準同型写像

$$\eta\colon \mathrm{Homeo}(N) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N))$$

本研究は，木村満晃氏（京都大学）との共同研究である．

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `e-kuno@math.sci.osaka-u.ac.jp`

は同型写像である.

2. 証明のアイディア

証明は，Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] の方法を向き付け不可能閉曲面に対して適用した.

定義 2.1. 曲面 F の**拡大ファイン曲線グラフ** (**extended fine curve graph**) $\mathcal{EC}^\dagger(F)$ とは，頂点集合を，本質的な単純閉曲線すべてと，曲面上の円板を囲む単純閉曲線すべての和集合とし，2つの頂点はそれらに対応する単純閉曲線が F 上で交わらないときに辺で結ばれる, と定めることによってできるグラフのことである

すると，拡大ファイン曲線グラフ $\mathcal{EC}^\dagger(N)$ に対して，次が成り立つ.

補題 2.2. 種数4以上の向き付け不可能閉曲面 N に対して，自然な準同型写像

$$\nu\colon \mathrm{Homeo}(N) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N))$$

は同型写像である.

定理 1.2の証明のアイディアを述べる.

準同型写像 $\varepsilon\colon \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N)) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N))$（後述）を定義し，$\varepsilon$ が同型写像となることを示す．更に次の合成写像が恒等写像となることを証明する:

$$\mathrm{Homeo}(N) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N)) \xrightarrow{\nu^{-1}} \mathrm{Homeo}(N).$$

すると，$\nu^{-1}\circ\varepsilon$ が同型写像であることより，$\eta\colon \mathrm{Homeo}(N) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N))$ が同型写像であることが従う.

ここから，準同型写像 $\varepsilon\colon \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N)) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N))$ の定義について説明する．任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N))$ をとる．$\mathcal{EC}^\dagger(N)$ 上の写像 $\hat{\alpha}$ を次で定める．本質的単純閉曲線 $c \in \mathcal{C}^\dagger(N)$ に対して，$\hat{\alpha}(c) = \alpha(c)$ とする．円板を囲む非本質的単純閉曲線 c に対して，c を定める**バイゴンペア** (**bigon pair**) (後述) $\{d_1, d_2\}$ を取ることができ（d_1, d_2 は $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の頂点）（図 2），$\hat{\alpha}(c)$ を，$\{\alpha(d_1), \alpha(d_2)\}$ が定める非本質的単純閉曲線で N 上の円板を囲むものとする．すると，$\hat{\alpha}$ は well-defined となり（鍵命題），さらに $\hat{\alpha}$ は拡大ファイン曲線グラフ $\mathcal{EC}^\dagger(N)$ 上の同型写像となることが示せる．そして，写像 $\varepsilon\colon \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N)) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N))$ を，$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(N))$ に対して $\varepsilon(\alpha) = \hat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{EC}^\dagger(N))$ により定めれば，ε が望んでいた準同型写像となる.

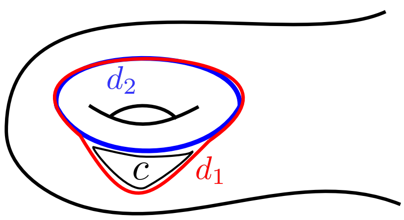

図 2: 円板を囲む非本質的曲線 c を定めるバイゴンペア $\{d_1, d_2\}$ の例.

3. 向き付け不可能曲面における困難点と解決策

この節では，Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] の証明を向き付け不可能曲面に対して適用する際に現れた困難点とその解決策について説明する．

定義 3.1. 単純閉曲線 c, d を $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の頂点で双側なものとする．

- 組 $\{c, d\}$ が**バイゴンペア** (**bigon pair**) であるとは，$c \cap d$ がちょうど 1 つの非自明な閉区間であって，さらに c と d がホモトピックであることである（図 2）．
- 組 $\{c, d\}$ が**トーラスペア** (**torus pair**) であるとは，$c \cap d$ がちょうど 1 つの閉区間であって，さらに c と d が “交差的である” ことである（図 3）．
- 組 $\{c, d\}$ が**パンツペア** (**pants pair**) であるとは，$c \cap d$ がちょうど 1 つの閉区間であって，さらに c と d が “交差的でない” ことである（図 3）．

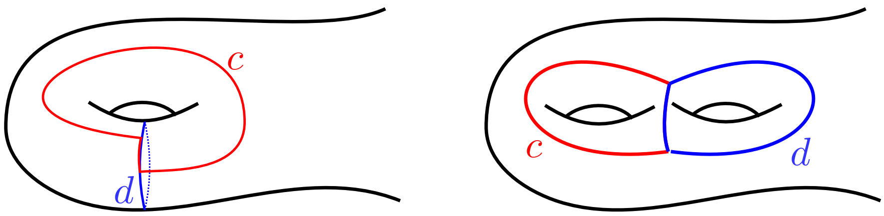

図 3: トーラスペアの例（左）とパンツペアの例（右）．

定義 3.2. 曲面 F 上の単純閉曲線の集合 X の**包** (**hull**) とは，X と X の元たちが囲む F 上の円板すべての和集合のことである．

次の補題が必要となる．

補題 3.3. F を種数 2 以上の向き付け可能閉曲面，もしくは種数 4 以上の向き付け不可能閉曲面とする．ファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(F)$ 上の任意の自己同型写像 α と，任意のトーラスペア $\{c, d\}$ (c, d は $\mathcal{C}^\dagger(F)$ の頂点) に対して，$\{\alpha(c), \alpha(d)\}$ はトーラスペアとなる．

向き付け可能曲面の場合． Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] は，補題 3.3 を次の 2 つのステップで証明する．

Step 1. α はトーラスペア全体とパンツペア全体の和集合を保つ．

Step 2. α はトーラスペア全体を保つ．

更に，Step 1 において Long–Margalit–Pham–Verberne–Yao [4] は次を示す．組 $\{c, d\}$ をファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(S)$ の頂点の組で S 上で交わるものとする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(1) 組 $\{c, d\}$ はトーラスペアまたはパンツペアである．

(2) 組 $\{c, d\}$ の包に，c でも d でもない本質的単純閉曲線は高々1 つしかない．

向き付け不可能曲面の場合． 向き付け不可能閉曲面 N に対して，N 上で交わるような $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の 2 つの頂点 c と d に対して，上記の (1) と (2) は同値な条件にならない．具体的には，組 $\{c,d\}$ はトーラスペアでもパンツペアでもないが，$\{c,d\}$ の包に c でも d でもない本質的単純閉曲線が高々1つしかないという状況がある．そこで，向き付け不可能閉曲面に対しては $\{c,d\}$ に「c と d は共に非分離的である」という条件を追加すれば 2 つの条件 (1) と (2) が同値となることがわかった:

組 $\{c,d\}$ をファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の頂点の組で N 上で交わるもので，c と d は共に**非分離的**であるものとする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(1) 組 $\{c,d\}$ はトーラスペアまたはパンツペアである．

(2) 組 $\{c,d\}$ の包に，c でも d でもない本質的単純閉曲線は高々1つしかない．

条件を追加しても補題 3.3 を証明できた理由． 組 $\{c,d\}$ がトーラスペアであるならば，c と d は共に非分離的であることが従う．よって，非分離的な曲線 c, d で構成されるトーラスペアすべてからなる集合は，トーラスペアすべてからなる集合と一致する．つまり,「c と d は共に非分離的である」という条件を付け加えて制限されるのはパンツペアのみであるため，補題 3.3 を証明することができた．

謝辞

研究集会「結び目の数理 VI」における講演の機会を与えてくださった世話人の大山淑之先生と新國亮先生に心から感謝申し上げます．著者は科研費 (課題番号: 21K13791) の助成を受けました．共同研究者の木村満晃氏は JST 未来 (課題番号:JPMJMI22G1) の助成を受けました．

参考文献

[1] F. Atalan and M. Korkmaz, *Automorphisms of curve complexes on nonorientable surfaces*, Groups Geom. Dyn. **8** (2014), no. 1, 39–68.

[2] J. Bowden, S. W. Hensel, and R. Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, J. Amer. Math. Soc. **35** (2022), no. 1, 211–231.

[3] N. V. Ivanov, *Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces*, Internat. Math. Res. Notices (1997), no.14, 651–666.

[4] A. Long, D. Margalit, A. Pham, Y. Verberne, and C. Yao, *Automorphisms of the fine curve graph*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.