Pairs of knot invariants

谷山 公規（早稲田大学教育学部）

概要

$\alpha:\mathcal{K}\to X$ を有向結び目型全体の集合 $\mathcal{K}$ から集合 X への写像とし、$\beta:\mathcal{K}\to Y$ を $\mathcal{K}$ から集合 Y への写像とする。写像 $(\alpha,\beta):\mathcal{K}\to X\times Y$ を $(\alpha,\beta)(K)=(\alpha(K),\beta(K))$（$K\in\mathcal{K}$）で定義する。このとき像 $(\alpha,\beta)(\mathcal{K})\subset X\times Y$ を α と β の間の**関係**と定義する。本稿では α、β として、交点数、結び目解消数、橋指数、組み紐指数、種数、標準種数を主として考え、これらの対の関係のうちのいくつかを決定する。

この報告は２０２３年１２月２３日（土）から２６日（火）まで東京女子大学２４号館（安井てつ記念ホール）２４２０２教室にて開催された研究集会「結び目の数理 VI 」における表題の講演内容をまとめたものです。世話人の大山淑之先生、新國亮先生はじめ関係の皆様に厚く御礼申し上げます。

$\mathcal{K}$ を 3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ 内の有向結び目型全体の集合とする。本稿では結び目は全て有向結び目であるとする。以下では結び目と結び目型を特に区別しない。また本稿では Rolfsen's knot table [11] の記号を使用する。特に 0_1 は自明結び目、3_1 は三葉結び目、4_1 は８の字結び目である。結び目 K の鏡像は K^* で表す。(p,q) 型トーラス結び目は $T(p,q)$、$(p_1,\cdots,p_k)$ 型プレッツェル結び目は $P(p_1,\cdots,p_k)$ で表す。$C(p_1,\cdots,p_k)$ を 2-橋結び目の Conway 表示とする。$p_1,\cdots,p_k$ が全て正ならばこの表記 $C(p_1,\cdots,p_k)$ に対応する図式は交代図式であり、この結び目の最小交点数図式である。２つの結び目 J と K の連結和を $J\#K$ で表す。結び目 K の p 個のコピーの連結和は $p\cdot K$ で表す。有限集合 X の元の数は $|X|$ で表す。素な結び目全体の集合を $\mathcal{P}$ とおき、$\mathcal{P}_0=\mathcal{P}\cup\{0_1\}$ とおく。交代結び目全体の集合を $\mathcal{A}$ とおく。0_1 は $\mathcal{A}$ の元である。2-橋結び目全体の集合を $\mathcal{R}$ とおき、$\mathcal{R}_0=\mathcal{R}\cup\{0_1\}$ とおく。$\mathcal{P}_0$ と $\mathcal{A}$ はともに $\mathcal{K}$ の真部分集合であり、$\mathcal{R}_0$ は $\mathcal{P}_0\cap\mathcal{A}$ の真部分集合である。

X と Y を集合とし、$\alpha:\mathcal{K}\to X$ と $\beta:\mathcal{K}\to Y$ をそれぞれ $\mathcal{K}$ から X と Y への写像とする。すなわちこれらは結び目不変量である。写像 $(\alpha,\beta):\mathcal{K}\to X\times Y$ を $(\alpha,\beta)(K)=(\alpha(K),\beta(K))$（$K\in\mathcal{K}$）で定義する。このとき像 $(\alpha,\beta)(\mathcal{K})\subset X\times Y$ を α と β の間の**関係**と定義する。

$c:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$u:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\mathrm{bridge}-1:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\mathrm{braid}-1:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$g:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$g_c:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ をそれぞれ（最小）交点数、結び目解消数、橋指数マイナス 1、組み紐指数マイナス 1、種数、標準種数とする。最初にこれらの間の関係について考える。

定理 1

$$(c,u)(\mathcal{K})=(c,g)(\mathcal{K})=(c,g_c)(\mathcal{K})=\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in(\mathbb{Z}_{>0})^2\mid y\leq\frac{1}{2}(x-1)\}.$$

さらには

$$(c,u)(\mathcal{K})=\{(6,2)\}\cup(c,u)(\mathcal{P}_0)=\{(c,u)(3_1\#3_1)\}\cup(c,u)(\mathcal{P}_0)$$

そして

$$(c,g)(\mathcal{K}) = (c,g)(\mathcal{R}_0) = (c,g_c)(\mathcal{R}_0).$$

図 1 は $(c,u)(\mathcal{K}) = (c,g)(\mathcal{K}) = (c,g_c)(\mathcal{K})$ を碁盤方式で図示したものである。

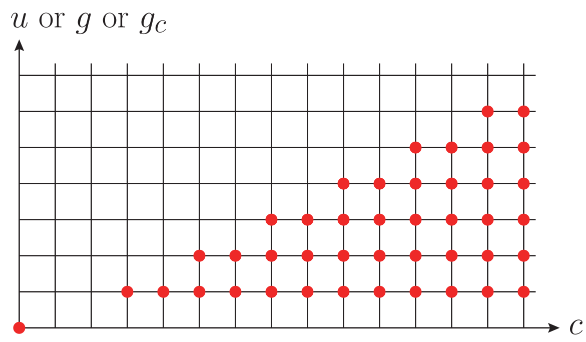

図 1　$(c,u)(\mathcal{K}) = (c,g)(\mathcal{K}) = (c,g_c)(\mathcal{K})$

図 2 は $(c,u)(\mathcal{K})$ を将棋盤方式で、$(c,u)(\mathcal{K})$ の各元に対して、その元に (c,u) で写る $\mathcal{K}$ の元を一つ選んで図示したものである。ここで等式 $u(K) = \dfrac{1}{2}(c(K)-1)$ を満たす結び目は青色で描かれたトーラス結び目 $T(2,p)$（とその鏡像）だけであることが分かっている [14]。また $u(K) = \dfrac{1}{2}(c(K)-2)$ を満たす結び目には 4_1、$3_1\#3_1$、$3_1\#3_1^*$、$P(2p+1,-2,2q+1)$ などがあり、これらの結び目の組み紐指数はすべて 3 であることが分かっている [2]。これらの結び目のうちのいくつかは緑色で描かれている。これらの結び目のうちには $P(3,-2,3) = T(3,4)$、$P(3,-2,5) = T(3,5)$、$P(7,-2,3) = P(-2,3,7)$ がある。最初の 2 つは概交代トーラス結び目のすべてであり [1]、最後の 1 つは結び目上のデーン手術理論において重要な例として知られている結び目である。$(0,0)$ と $(6,2)$ に写る素な結び目は存在しないが、これ以外は全て存在する。

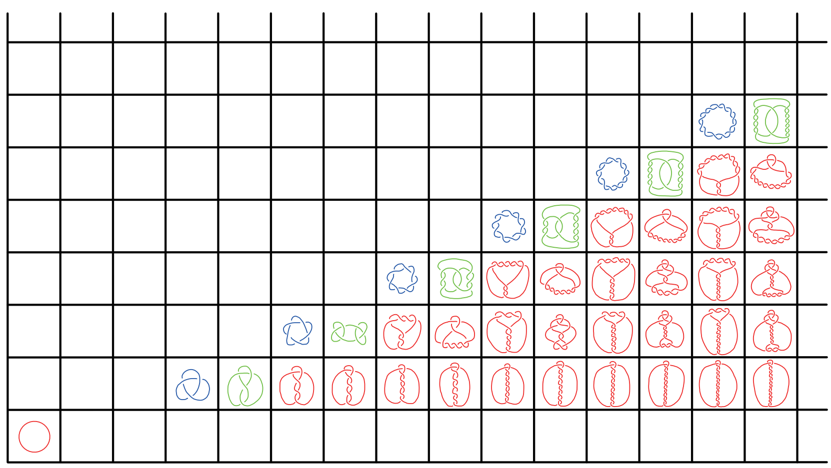

図 2　$(c,u)(\mathcal{K})$ の各元に対してその元に写る結び目を一つ選んだもの

図 3 は $(c, g)(\mathcal{R}_0) = (c, g_c)(\mathcal{R}_0)$ を将棋盤方式で、$(c, g_c)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対して、その元に (c, g_c) で写る $\mathcal{R}_0$ の元を一つ選んで図示したものである。

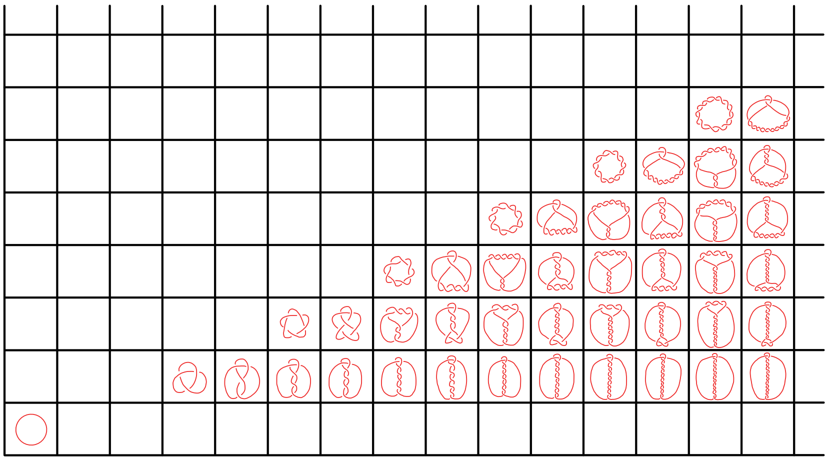

図 3　$(c, g)(\mathcal{R}_0) = (c, g_c)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対してその元に写る結び目を一つ選んだもの

(c, u) の場合と同様に等式 $g_c(K) = \dfrac{1}{2}(c(K) - 1)$ を満たす結び目はトーラス結び目 $T(2, p)$ だけである。すなわち次の定理が成立する。

定理 2　$K \in \mathcal{K}$ が

$$g_c(K) = \frac{1}{2}(c(K) - 1)$$

を満たすならば奇数 $p \neq \pm 1$ が存在して $K = T(2, p)$ である。

大山淑之さんは、全ての結び目 K は次の不等式を満たすことを示した [9]。

$$(\mathrm{braid} - 1)(K) \leq \frac{1}{2}c(K).$$

この結果に基づいて次の定理が示される。

定理 3

$$(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{K}) = \{(0, 0)\} \cup \{(2n + 1, 1) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{(x, y) \in (\mathbb{Z}_{\geq 2})^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x\}.$$

さらには

$$(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{K}) = (c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{R}_0).$$

図 4 は $(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{K})$ を碁盤方式で図示したものである。

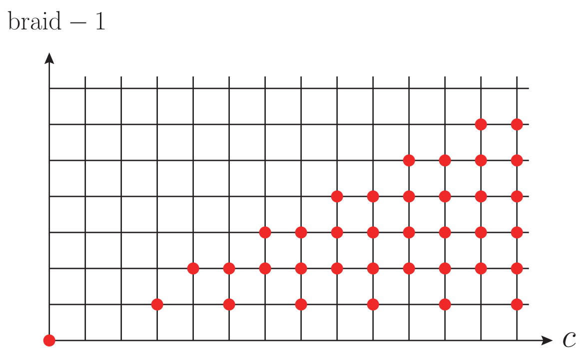

図 4　$(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{K})$

図 5 は $(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{R}_0)$ を将棋盤方式で、$(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対して、その元に $(c, \mathrm{braid} - 1)$ で写る $\mathcal{R}_0$ の元を一つ選んで図示したものである。

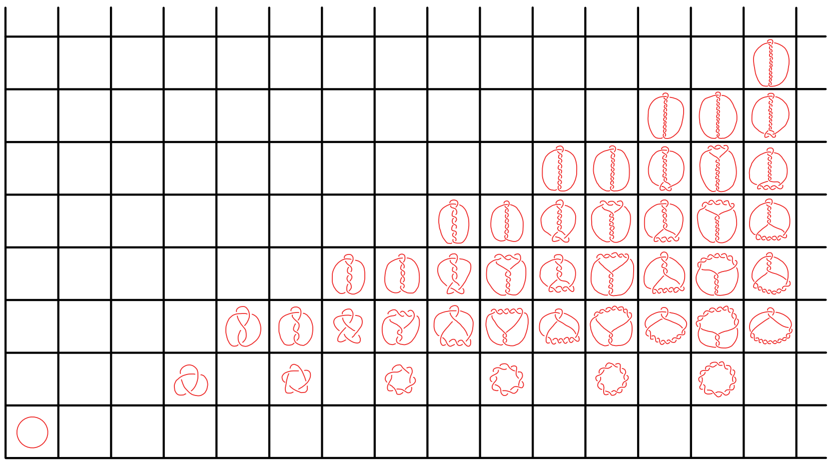

図 5　$(c, \mathrm{braid} - 1)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対してその元に写る結び目を一つ選んだもの

Ralph Fox さんは、全ての結び目 K は次の不等式を満たすのではないかと予想した [4]。この予想を Fox 予想と呼ぶ [8][9]。

$$\mathrm{bridge}(K) - 1 \leq \frac{1}{3}c(K).$$

この Fox 予想に基づき次が予想される。

予想 4

$$(c, \mathrm{bridge} - 1)(\mathcal{K}) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq \frac{1}{3}x\}.$$

図 6 は $(c, \mathrm{bridge} - 1)(\mathcal{K})$ を碁盤方式で図示したものである。

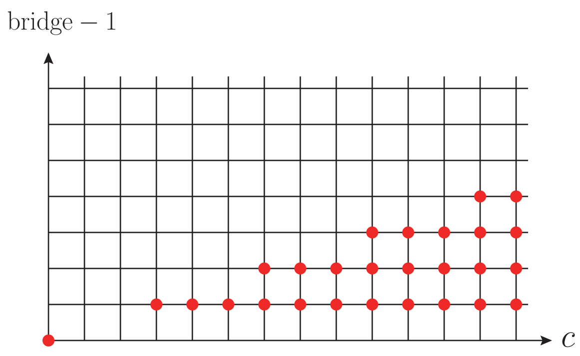

図 6　$(c, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$ (Fox 予想を仮定して)

図 7 は $(c, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$ を将棋盤方式で、$(c, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$ の各元に対して、その元に $(c, \mathrm{bridge}-1)$ で写る $\mathcal{K}$ の元を一つ選んで図示したものである。

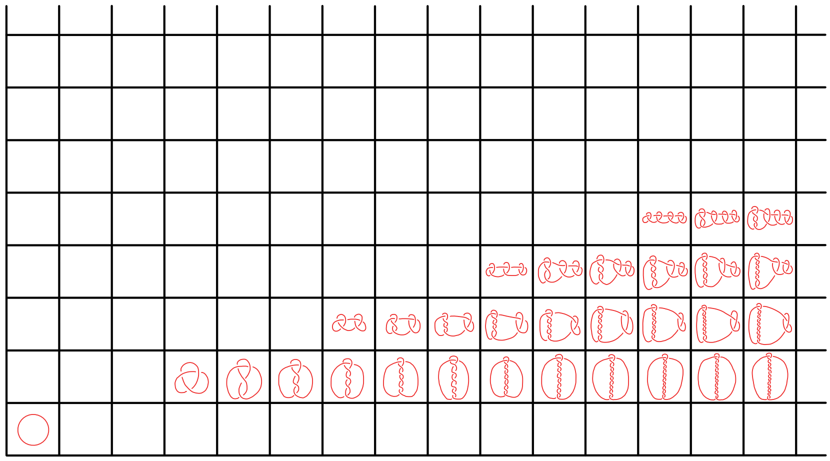

図 7　$(c, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$ の各元に対してその元に写る結び目を一つ選んだもの (Fox 予想を仮定して)

定義より任意の $K \in \mathcal{K}$ について $\mathrm{bridge}(K) \leq \mathrm{braid}(K)$ である。実際に次の定理が成立する。

定理 5

$$(\mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq x\}.$$

図 8 を参照のこと。

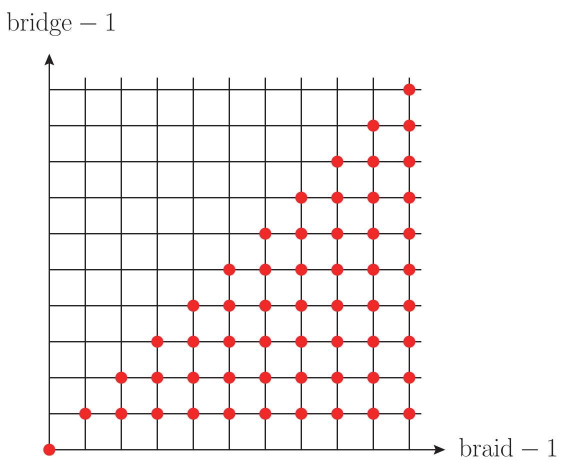

図 8　(braid − 1, bridge − 1)($\mathcal{K}$)

また、定義より任意の $K \in \mathcal{K}$ について $g(K) \leq g_c(K)$ である。ところが $(g_c, g)(K) = (2, 1)$ を満たす結び目 K は存在しないことが Alexander Stoimenow さんによって示されている [12, Theorem 1.1]。そして次の定理が成立することが証明なしに述べられている [12]。

定理 6

$$(g_c, g)(\mathcal{K}) = \{(0, 0)\} \cup (\{(x, y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq x\} \setminus \{(2, 1)\}).$$

図 9 を参照のこと。

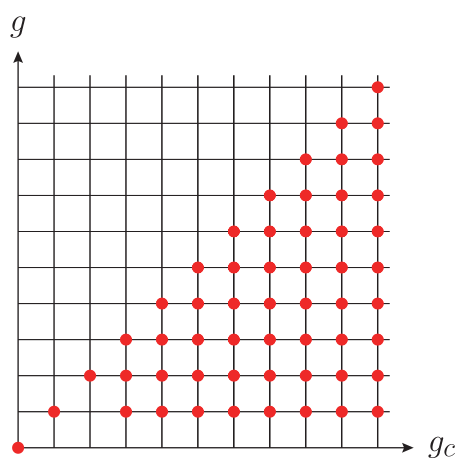

図 9　$(g_c, g)(\mathcal{K})$

結び目解消数と組み紐指数は、$u(K) = 0$ と $\mathrm{braid}(K) = 1$ が同値であることを除いて、互いに独立であることはよく知られている。同様のことが他の不変量の対のうちのいくつかについても成立する。すなわち次の定理が成立する。

定理 7

$$
\begin{aligned}
&(u, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (u, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = (g, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) \\
&= (g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{Z}_{>0})^2.
\end{aligned}
$$

図 10 を参照のこと。

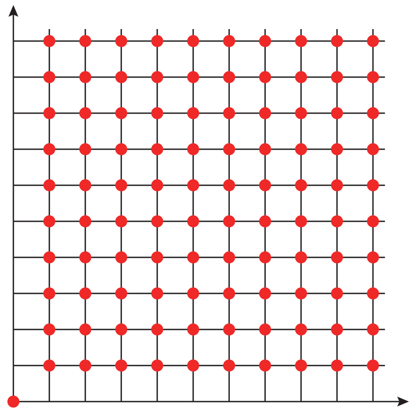

図 10 $(u, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (u, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$
$= (g, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$

図 11 は $(g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{R}_0)$ を将棋盤方式で、$(g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対して、その元に $(g_c, \mathrm{braid}-1)$ で写る $\mathcal{R}_0$ の元を一つ選んで図示したものである。

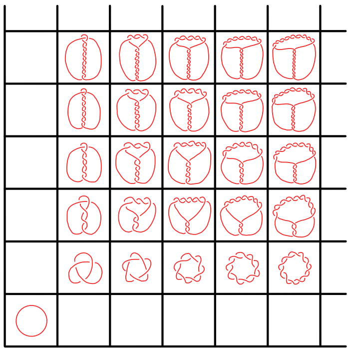

図 11 $(g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{R}_0)$ の各元に対してその元に写る結び目を一つ選んだもの

交点数、結び目解消数、橋指数マイナス 1、組み紐指数マイナス 1、種数、標準種数という 6 つの結び目不変量の無順序対は 15 対あるが、そのうちの 12 対それぞれの関係について述べてきた。残る 3 対 (u, g), (u, g_c), $(g_c, \mathrm{bridge}-1)$ それぞれの関係については（少なくとも筆者は）よく分かっていない。例えば結び目

K で $g(K)=1$ で $u(K)\geq 4$ であるものの存在は（少なくとも筆者には）知られていない。$g(P(3,3,3))=1$ で $u(P(3,3,3))=3$ であることが知られているまでである [10]。標準種数 1 の結び目は 2-橋結び目 $C(2p,2q)$ またはプレッツェル結び目 $P(2p+1,2q+1,2r+1)$ であることが知られている [13, Theorem 2.1]。よって $g_c(K)=1$ で $\mathrm{bridge}(K)\geq 4$ である結び目 K は存在しない。一般に次の定理が成立する。

定理 8　k を正数とする。このとき正数 m が存在して $g_c(K)=k$ であるすべての $K\in\mathcal{K}$ について $\mathrm{bridge}(K)\leq m$ が成立する。

以下では他の結び目不変量について少し述べる。

例 9　$a_2:\mathcal{K}\to\mathbb{Z}$ を結び目のコンウェイ多項式の 2 次の係数とする。

$$(c,a_2)(T(2,2k+1))=(2k+1,\frac{1}{2}k(k+1))$$

なので、a_2 の c の 1 次式による上からの評価は存在しないことが分かる。図 12 を参照のこと。

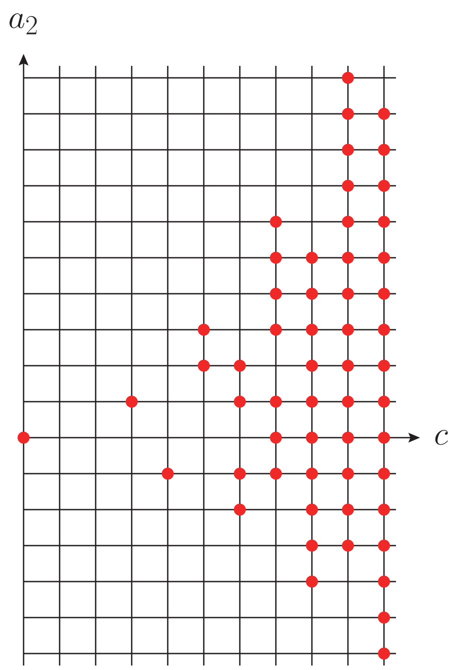

図 12　$(c,a_2)(\mathcal{K})$ $(c\leq 10)$

図 13 の局所変形をデルタ変形と云う。

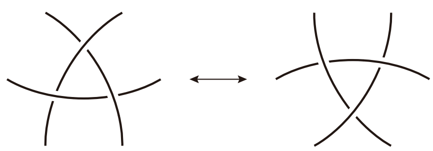

図 13　デルタ変形

この変形は [6] と [7] で独立に定義された。任意の 2 つの結び目はデルタ変形の有限回で互いに移り合う [7]。$K \in \mathcal{K}$ から 0_1 へのデルタ変形の最小回数を K のデルタ結び目解消数と云って $u_\Delta(K)$ と記す。$u_\Delta : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。次の定理が成立する。

定理 10　$K \in \mathcal{K}$ とする。このとき

$$u_\Delta(K) \leq \frac{1}{4}(c(K)-1)^2$$

である。

これまで結び目不変量の対について考えてきたが、結び目不変量のトリプルやそれ以上について少し触れておく。

一例として、トリプル $(c, u, \mathrm{braid}-1)$ は 3 対 (c,u), $(c, \mathrm{braid}-1)$, $(u, \mathrm{braid}-1)$ に帰着出来ない情報を持っていることを示す。実際に $(c,u)(5_1) = (5,2)$, $(c, \mathrm{braid}-1)(5_2) = (5,2)$, $(u, \mathrm{braid}-1)(3_1\#3_1) = (u, \mathrm{braid}-1)(7_3) = (2,2)$ であるが、$(c, u, \mathrm{braid}-1)(K) = (5,2,2)$ を満たす $K \in \mathcal{K}$ は存在しない。

また、結び目不変量のトリプルに関する不等式として

$$c(K) \geq 2g(K) + (\mathrm{braid}-1)(K)$$

が知られている [3, Theorem 2.6]。実際には

$$c(K) \geq 2g_c(K) + (\mathrm{braid}-1)(K)$$

がすべての $K \in \mathcal{K}$ について成立する。

逆向きの不等式についても伊藤哲也さんによる研究がある [5]。

いくつかの結び目不変量のなす次元を定義することが出来る。ここでは定義は述べずに次の例を示すに留める。

$$\dim(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1) = 3.$$

実際に $(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1)(3_1) = (3,1,1)$, $(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1)(4_1) = (4,2,1)$,
$(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1)(5_1) = (5,1,1)$ なので

$$(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1)((p\cdot 3_1)\#(q\cdot 4_1)\#(r\cdot 5_1)) = p(3,1,1)+q(4,2,1)+r(5,1,1).$$

となり、3 つのベクトル $(3,1,1)$, $(4,2,1)$, $(5,1,1)$ は 1 次独立なので

$$\dim(c, \mathrm{braid}-1, \mathrm{bridge}-1) = 3$$

となる。

参考文献

[1] T. Abe, An estimation of the alternation number of a torus knot, *J. Knot Theory Ramifications*, **18** (2009), 363-379.

[2] T. Abe, R. Hanaki and R. Higa, The unknotting number and band-unknotting number of a knot, *Osaka J. Math.*, **49** (2012), 523-550.

[3] Y. Diao, The additivity of crossing numbers, *J. Knot Theory Ramifications*, **13** (2004), 857-866.

[4] R.H. Fox, On the total curvature of some tame knots, *Ann. of Math.(2)*, **52** (1950), 258-260.

[5] T. Ito, A quantitative Birman-Menasco finiteness theorem and its application to crossing number, *J. Topol.*, **15** (2022), 1794-1806.

[6] S. Matveev, Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere (Russian), *Mat. Zametki*, **42** (1987), 268-278, 345. English translation: *Math. Notes*, **42** (1987), 651-656.

[7] H. Murakami and Y. Nakanishi, On a certain move generating link-homology, *Math. Ann.*, **284** (1989), 75-89.

[8] K. Murasugi, An estimate of the bridge index of links, *Kobe J. Math.*, **5** (1988), 75-86.

[9] Y. Ohyama, On the minimal crossing number and the braid index of links, *Canad. J. Math.*, **45** (1993), 117-131.

[10] B. Owens, Unknotting information from Heegaard Floer homology, *Adv. Math.*, **217** (2008), 2353-2376.

[11] D. Rolfsen, Knots and links, Mathematics Lecture Series, No. 7, Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.

[12] A. Stoimenow, Minimal genus and fibering of canonical surfaces via disk decomposition, *LMS J. Comput. Math.*, **17** (2014), 77-108.

[13] A. Stoimenow, Knots of genus one or on the number of alternating knots of given genus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001), 2141-2156.

[14] K. Taniyama, Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded, *J. Knot Theory Ramifications*, **18** (2009), 1049-1063.