

(2×1) -tube 含まれる lattice knot の minimum lattice stick number

宗和 凌 (埼玉大学)*1

1 Abstract

tube 内の lattice knot の研究は nanopore 内の DNA のモデル化など様々な応用が知られている。すでに (2×1) -tube に含まれる lattice knot の minimum step number が評価されている。今回の講演では (2×1) -tube に含まれる lattice stick number に関する評価と crossing number を用いた上からの評価を述べる。

1.1 $(m \times n)$ -tube の定義

定義 1.1. \mathbb{Z}^3 内で隣り合う 2 つの格子点を結ぶ単位長の線分を **step** と呼ぶ。 n 個の step を持つ結び目埋め込んだものを **lattice knot** と呼ぶ。 x 軸に平行な step を x -step と呼ぶ。

定義 1.2. $(m \times n)$ -tube は任意の正の整数 m, n に対して \mathbb{R}^3 の部分集合 $\mathbb{R} \times [0, m] \times [0, n]$ である,

定義 1.3. knot (link) K を立方格子内で実現した lattice knot L を構成するのに必要な step の本数を **step number** と呼び, $\text{step}(L)$ と表す。 K の lattice knot L に対し, 最小な本数を **minimum step number** と呼び, $l(K)$ と表す。特に, $(m \times n)$ -tube 内での minimum step number は $l_{m \times n}(K)$ と表す。また, $(m \times n)$ -tube 内で構成された lattice knot L で x 軸方向での L の幅を **width(L)** と表す。さらに, 今後 $\text{width}(K)$ は K の lattice knot L に対し, 最小数をとるとする。

定義 1.4. knot (link) K を立方格子内で実現した lattice knot L を構成するのに必要な直線分の本数を **stick number** と呼び, $\text{stick}(L)$ と表す。 K の lattice knot L に対し, 最小な本数を **minimum lattice stick number** と呼び, $S_L(K)$ と表す。特に, $(m \times n)$ -tube 内での minimum lattice stick number は $S_{L(m \times n)}(K)$ と表す。 x 軸に平行な stick を x -stick と呼ぶ, y -stick, z -stick も同様に定義する。

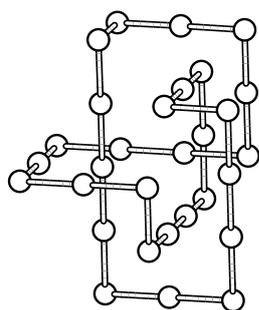
例 1.5. 4_1 knot と 5_1 knot をそれぞれ立方格子内に構成したときの minimum step number $l(K)$ と minimum lattice stick number $S_L(K)$ である。

観察 1.6. L を lattice knot とする。このとき, 以下の等式が成り立つ。

$$\text{stick}(K) = \text{corner}(K)$$

ただし, $\text{corner}(K)$ を 2 本の stick が繋がっている角の個数と定義する。

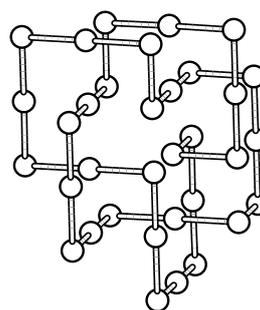
*1 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255 埼玉大学大学院理工学研究科 修士 2 年
mail: r.sowa.062@ms.saitama-u.ac.jp

図 1: $l(4_1) = 30$

(山口, 2008)

$$S_L(4_1) = 14$$

(Huh-Oh, 2005)

図 2: $l(5_1) = 34$

(石原, 2009)

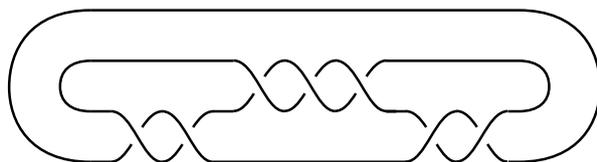
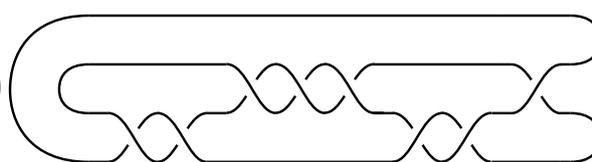
$$S_L(5_1) = 16$$

(Huang-Yang, 2017)

2 Minimum lattice stick number in (2×1) -tube

定理 2.1. (2×1) -tube 内の prime knot (link) は 2-bridge knot (link) である.

定義 2.2. 2-bridge knot (link) において, 一番上の紐に交点がなく図 3, 図 4 のように閉じたものを **Conway の正規表示**といい, $C(a_1, b_1, \dots, a_n)$ や $C(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ のように表す.

図 3: $C(2, -3, -2)$ 図 4: $C(2, -3, -2, 1)$

次に (2×1) -tube 内の knot (link) に関する minimum step number に関する先行研究の結果を紹介する.

定理 2.3. minimum step number in the (2×1) -tube [1, Theorem 3]

\mathcal{K} は 2-bridge knot (link) type とする. このとき, K のある Conway の正規表示 $C(a_1, b_1, \dots, a_n)$ が存在し, K の minimum step number $l_{2 \times 1}(\mathcal{K})$ は以下の式を満たす.

(1) \mathcal{K} が $T_{2,a}$ ($(2, a)$ -トールス結び目 (絡み目)) のとき

$$l_{2 \times 1}(\mathcal{K}) = 12|a| + 4\epsilon(a) - 4$$

となる.

(2) それ以外の時

$$l_{2 \times 1}(\mathcal{K}) = 12 \sum_{i=1}^n |a_i| + 18 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 6 \sum_{i=1}^{n-1} (\text{sgn}(a_i b_i) + \text{sgn}(b_i a_{i+1})) \\ + 4(-\epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon(a_i) - \epsilon(a_n)) - 12n + 16$$

となる。ただし、 $\epsilon(a)$ は a が偶数の時 0, 奇数の時 1 とする。

次に主定理である (2×1) -tube 内での minimum lattice stick number を述べる。

主定理 2.4. \mathcal{K} は 2-bridge knot (link) type とする。このとき、 K のある Conway の正規表示 $C(a_1, b_1, \dots, a_n)$ が存在し、 \mathcal{K} の minimum lattice stick number $S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K})$ は以下の式を満たす。

(1) \mathcal{K} が $T_{2,a}$ ($(2, a)$ -トーラス結び目 (絡み目)) のとき

$$S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K}) = 6|a| + \epsilon(a) + 2$$

となる。

(2) それ以外の時

$$S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K}) = 6 \sum_{i=1}^n |a_i| + 8 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 3 \sum_{i=1}^{n-1} (\text{sgn}(a_i b_i) + \text{sgn}(b_i a_{i+1})) \\ - \epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon(a_i) - \epsilon(a_n) - 6n + 10$$

となる。ただし、 $\epsilon(a)$ は a が偶数の時 0, 奇数の時 1 とする。

3 主定理 2.4 の証明概要

ここで L を (2×1) -tube 内、minimum lattice stick number で実現している lattice knot (link) とする。 D を L の diagram とする。

定義 3.1. 図 5 のように連続する 2 つ以上の pattern k_1, k_2, \dots, k_i を組み合わせて σ が表現できたときその diagram を $D_{k_1 k_2 \dots k_i}$ と定義する。

例 3.2. $D_{46}(\sigma_1^{-1} \sigma_3)$ は図 6 のように pattern 4, pattern 6 順に繋げて、対応する語が $\sigma_1^{-1} \sigma_3$ という意味である。 $D_{64}(\sigma_1 \sigma_3^{-1})$ は図 7 のように pattern 6, pattern 4 の順に繋げて、対応する語が $\sigma_1 \sigma_3^{-1}$ という意味である。

証明の方針は次の通りである。

- ステップ 1 $C(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して minimum lattice stick number を与える $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ を構成する。
- ステップ 2 pattern をいくつか繋げた時の対応する語と形の分類。

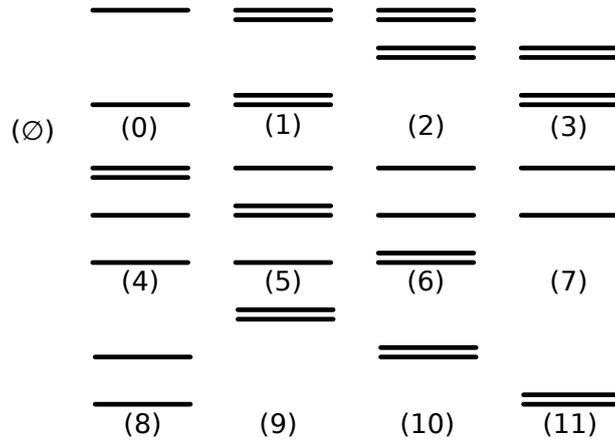


図 5: $(1 \times 2 \times 1)$ -box 内の x -step の射影 13 種類. これを pattern と呼ぶ.

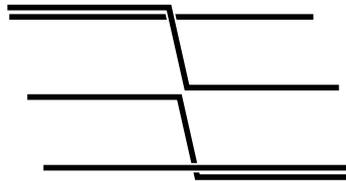


図 6: $D_{46}(\sigma_1^{-1}\sigma_3)$

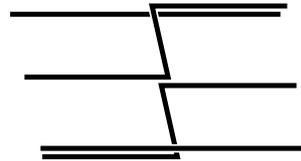


図 7: $D_{64}(\sigma_1\sigma_3^{-1})$

- ステップ 3 D に $D_{46}(\sigma_1^{-1}\sigma_3)$, $D_{64}(\sigma_1\sigma_3^{-1})$, $D_{46}(1)$, $D_{64}(1)$ が含まないことを示す.
- ステップ 4 D に pattern 5 が含まないことを示す.
- ステップ 5 残った pattern を minimum lattice stick number を満たすように繋げていく.
- ステップ 6 minimum lattice stick number で実現される lattice knot (link) L は $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ で実現させることを示す.

3.1 $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ の構成

$C(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し, n が奇数の時は $\sigma_1^{a_1}\sigma_2^{-b_1}\sigma_3^{a_2}\sigma_2^{-b_2}\sigma_1^{a_3}\dots\sigma_2^{-b_{n-1}}\sigma_1^{a_n}$, n が偶数の時は $\sigma_1^{a_1}\sigma_2^{-b_1}\sigma_3^{a_2}\sigma_2^{-b_2}\sigma_1^{a_3}\dots\sigma_2^{-b_{n-1}}\sigma_3^{a_n}$ と表す 2-bridge knot (link) で表現される lattice knot (link) type $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ を構成する.

ここでは例を用いて説明する.

例 3.3. 7_5 に対応する $C(2, 2, 3)$ を $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ で構成したときの例である. $A_1(2, +)$ で σ_1^2 を構成している. $B_{13}(2)$ で σ_2^2 を構成している. $A_3(+, 3)$ で σ_3^3 を構成している. また, フライプにより σ_1 は σ_3 で置き換えることが出来るので $A_1(2, +), B_{13}(2), A_3(+, 3)$ の順で繋げることで $C(2, 2, 3)$ を構成する.

例 3.4. 7_7 に対応する $C(3, -3, 3)$ を $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ で構成したときの例である. $A_1(3, -)$ で σ_1^2 を構成している. $B_{13}(-3)$ で $\sigma_3\sigma_2^2$ を構成している. $A_3(-, 3)$ で σ_3^3 を構成している. また, フライプにより σ_1 は σ_3

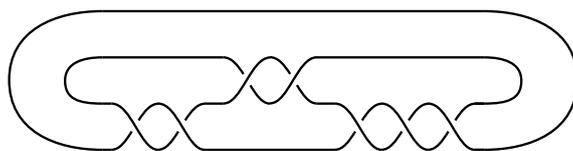
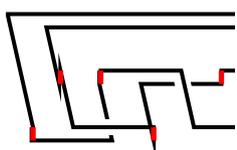
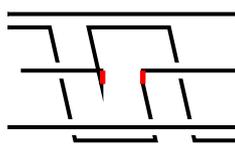


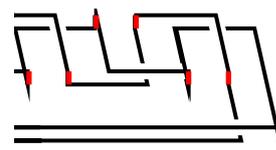
図 8: 7_5 に対応する $C(2, 2, 3)$



(a) $A_1(2, +)$.
 $corner(A_1(2, +)) = 17$



(b) $B_{13}(2)$.
 $corner(B_{13}(2)) = 10$



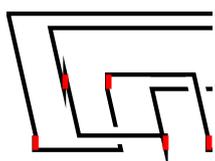
(c) $A_3(+, 3)$.
 $corner(A_3(+, 3)) = 22$

図 9: $stick(L(2, 2, 3)) = 49$

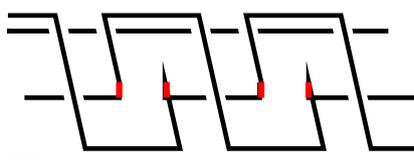


図 10: 7_7 に対応する $C(3, -3, 3)$

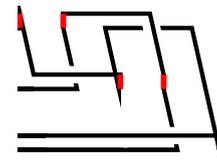
で置き換えることができるので $A_1(3, -)$, $B_{13}(-3)$, $A_3(-, 3)$ の順で繋げることで $C(3, -3, 3)$ を構成する.



(a) $A_1(3, -)$.
 $corner(A_1(3, -)) = 16$



(b) $B_{13}(-3)$.
 $corner(B_{13}(-3)) = 18$



(c) $A_3(-, 3)$.
 $corner(A_3(-, 3)) = 16$

図 11: $stick(L(3, -3, 3)) = 50$

次に $L(a_1, b_1, \dots, a_n)$ の lattice stick number を求める.

定理 3.5. $L(a_1, b_1, \dots, a_n)$ の width と lattice stick number は以下の通りである.

(1) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} width(L) &= 2|a| + \epsilon(a) - 1 \\ stick(L) &= 6|a| + \epsilon(a) + 2 \end{aligned}$$

となる. ただし, $\epsilon(a)$ は a が偶数の時 0, 奇数の時 1 とする.

(2) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \text{width}(L) &= 2 \sum_{i=1}^n |a_i| + 3 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + \sum_{i=1}^{n-1} (\text{sgn}(a_i b_i) + \text{sgn}(b_i a_{i+1})) \\ &\quad - \epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon(a_i) - \epsilon(a_n) - 2n + 3 \\ \text{stick}(L) &= 6 \sum_{i=1}^n |a_i| + 8 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 3 \sum_{i=1}^{n-1} (\text{sgn}(a_i b_i) + \text{sgn}(b_i a_{i+1})) \\ &\quad - \epsilon(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon(a_i) - \epsilon(a_n) \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \delta(\text{sgn}(b_{i-1}), a_i, \text{sgn}(b_i)) - 6n + 10 \end{aligned}$$

となる. ただし, $\epsilon(a)$ は a が偶数の時 0, 奇数の時 1. $(s_1, a, s_2) = \pm(1, -1, 1)$ のとき $\delta(s_1, a, s_2) = 1$ それ以外の時は 0 とする.

3.2 D に含まれない $D_{k_1 k_2 \dots k_i}$ の分類

定義 3.6. 図 12 のように結び目内の局所的な移動を **BFACF move** と呼ぶ.

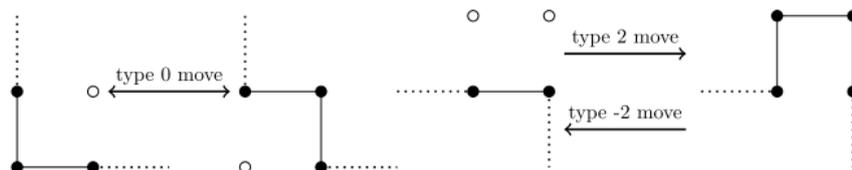


図 12: 左が 0 move の変形. 右が 2 move と -2 move の変形

以下例 3.7 から例 3.10 まではステップ 3 とステップ 4 で minimum lattice stick number の D に含まれないことを示すときに使う考え方を述べる.

例 3.7. 図 13 より $D_{146}(\sigma_1 \sigma_1^{-1} \sigma_3)$ は -2 move により $D_{16}(\sigma_3)$ に変形することが出来る. さらに $D_{16}(\sigma_3)$ は少ない corner 数で構成できるので $D_{146}(\sigma_1 \sigma_1^{-1} \sigma_3)$ は D に含まれないことが示せる.

例 3.8. 図 14 より $D_{4556}(\sigma_3 \sigma_2)$ は 0 move により $D_{446}(\sigma_3 \sigma_2)$ に変形することが出来る. さらに $D_{446}(\sigma_3 \sigma_2)$ は少ない corner 数で構成できるので $D_{4556}(\sigma_3 \sigma_2)$ は D に含まれないことが示せる.

例 3.9. P を $D_{615516}(\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3)$ を含む lattice knot L の diagram 部分をとし, P_1 を P の左側の diagram とし P_2 を P の右側の diagram とする. また, $r(x, y, z) = (x, 2 - y, 1 - z)$, P' を $D_{6644}(\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1})$ とする. このとき, 図 15 のように lattice knot L' の diagram を P_1 と P' と $r(P_2)$ を置き換えたものとする, L' と

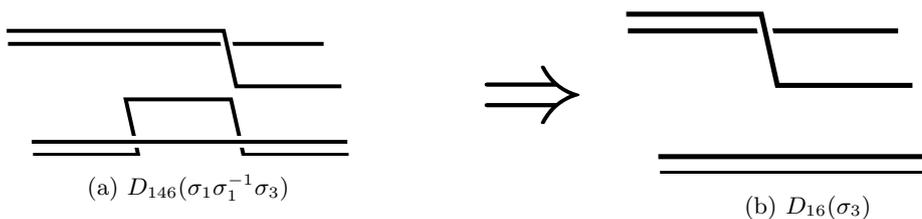


図 13: $corner(D_{16}(\sigma_3)) = corner(D_{146}(\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_3)) - 4$

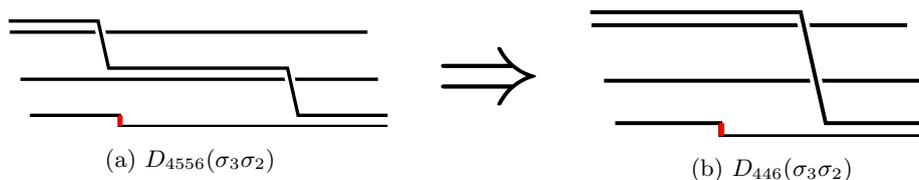


図 14: $corner(D_{446}(\sigma_3\sigma_2)) = corner(D_{4556}(\sigma_3\sigma_2)) - 2$

L は同じ knot type である. さらに $D_{6644}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})$ は少ない corner 数で構成できるので $D_{615516}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3)$ は D に含まれないことが示せる.

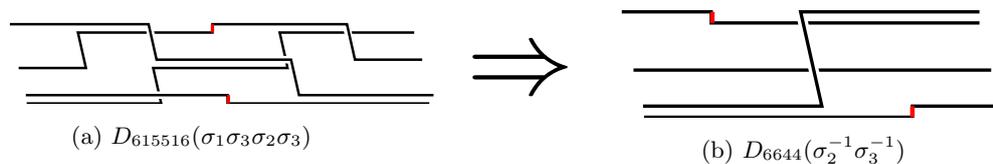


図 15: $corner(D_{6644}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})) = corner(D_{615516}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3)) - 10$

例 3.10. 図 16 のようにフライプで σ_3 を σ_1 に置き換える事が出来る. さらに, $D_{1644}(\sigma_1\sigma_2)$ はより少ない corner 数で構成できるので $D_{145544}(\sigma_3\sigma_2)$ は D に含まれないことが示せる.

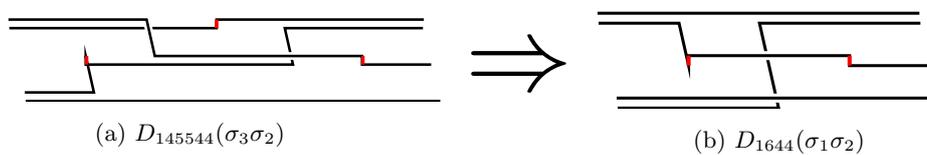


図 16: $corner(D_{1644}(\sigma_1\sigma_2)) = corner(D_{145544}(\sigma_3\sigma_2)) - 4$

ステップ 1 からステップ 5 より次の定理を示すことが出来る.

定理 3.11. minimum lattice stick number で実現される lattice knot (link) L は $L(a_1, b_1, a_2, \dots, a_n)$ で実現出来る.

knot \mathcal{K}	$S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K})$	対応する文字列	knot \mathcal{K}	$S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K})$	対応する文字列
3 ₁	21	(3)	9 ₁	57	(9)
4 ₁	28	(1,1,-3)	9 ₂	58	(7,1,1)
5 ₁	33	(5)	9 ₃	59	(5,1,-4)
5 ₂	34	(3,1,1)	9 ₄	59	(5,-1,-4)
6 ₁	40	(1,1,-5)	9 ₅	58	(5,1,3)
6 ₂	41	(2,1,3)	9 ₆	61	(5,2,2)
6 ₃	43	(2,2,-3)	9 ₉	61	(3,2,4)
7 ₁	45	(7)	9 ₁₁	63	(2,3,-5)
7 ₂	46	(5,1,1)	10 ₁	64	(1,1,-9)
7 ₃	47	(5,-1,-2)	10 ₂	65	(2,1,7)
7 ₄	46	(3,1,3)	10 ₃	64	(5,1,-5)
7 ₅	49	(2,2,3)	10 ₄	65	(6,1,3)
7 ₆	49	(2,1,2,1,1)	10 ₅	67	(2,2,-7)
7 ₇	50	(3,-3,3)	10 ₈	65	(4,1,5)
8 ₁	52	(1,1,-7)	10 ₁₇	67	(4,2,-5)
8 ₂	53	(2,1,5)			
8 ₃	52	(3,1,-5)			
8 ₄	53	(4,1,3)			
8 ₇	55	(2,2,-5)			
8 ₈	56	(2,1,3,1,1)			
8 ₉	55	(3,2,-4)			
8 ₁₁	56	(3,-3,-3)			
8 ₁₂	56	(2,1,1,1,3)			

4 lattice stick number と crossing number について

定理 4.1. K を 2 橋結び目 (絡み目), c を K の交点数とする. このとき, c を用いて以下の不等式が成り立つ.

$$6c + 2 \leq S_{L(2 \times 1)}(K) \leq 6c + 3 \quad (K : T_{2,a})$$

$$6c + 4 \leq S_{L(2 \times 1)}(K) \leq \frac{15c}{2} - 1 \quad (\text{それ以外})$$

表は現在判明しているそれぞれの knot type \mathcal{K} に対しての $S_{L(2 \times 1)}(\mathcal{K})$ である.

参考文献

- [1] Kai Ishihara, Maxime Pouokam, Atsumi Suzuki, Robert Scharein, Mariel Vazquez, Javier Arsuaga and Koya Shimokawa. , Bounds for minimum step number of knots confined to tubes in the simple cubic lattice. J. Phys. A: math. Theor. 50 (2017) 215601

- [2] Youngsik Huh, Seungsang Oh, Lattice stick number of small knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* Vol. 14, No. 7 (2005) 859–867

- [3] Yuanfei Huang, Weiling Yang, Lattice stick number of knots, *J. Phys. A: Math Theor.* 50 (2017) 505204.