結び目の連結和公式の組み合わせ的な証明について

久保田　肇　(京都大学大学院理学研究科 博士 2 年)

概　要

Grid homology とは knot Floer homology を組み合わせ的に再構成した理論である。Knot Floer homology における結び目の連結和公式に対し、grid homology による組み合わせ的な証明を与える試みが講演者によってされていた。本講演では、ホモロジーの同型の存在を示したその結果を改良し、grid chain complex の間に quasi-isomorphism を与える。

1 Knot Floer homology と grid homology

Knot Floer homology とは 3 次元多様体の不変量である Heegaard Floer homology の派生である、結び目の強力な不変量である [6]。結び目 K の knot Floer homology はいくつかバージョンがあるが、ここではハットバージョン $\widehat{HFK}(K)$ を扱う。これは二重次数付き有限次元 $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間である。Knot Floer homology のオイラー標数がアレキサンダー多項式になり、knot Floer homology はアレクサンダー多項式のカテゴリー化である。ホモロジーを求めるにはある曲面の symmetric product 上の holomorphic disk を数えるといったことをするため、一般に knot Floer homology は定義から直線計算するのが難しい。

grid homoogy とは knot Floer homology を組み合わせ的な再構成したものである。grid homology を用いれば、knot Floer homology をその幾何的、解析的な議論を避けて純粋に組み合わせ的に求めることが出来る [5]。結び目 K の grid homology を $\widehat{GH}(K)$ と書く。実際に grid homology を計算するするには、結び目を $n \times n$ マス目で表現した grid diagram（図 1）とその上の n 点の組 (state という) を考え、特定の条件を満たす長方形を数える。

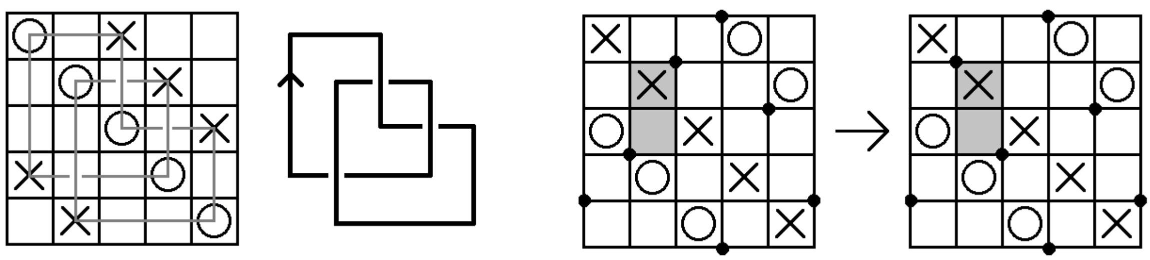

図 1　左：Torefoil を表す grid diagram。右：長方形を数えている様子

This work was supported by JST, the establishment of university fellowships towards the creation of science technology innovation, Grant Number JPMJFS2123.
キーワード：grid homology, knot Floer homology

Grid homology の研究の方向性として以下の 2 つがある。

1. knot Floer homology で知られている結果を、grid homology の枠組み内で示せるか?
2. grid homology を用いて、knot Floer homology の不変量を新しく作れるか?

これらの問いは、grid homology が knot Floer homology のある種の翻訳物であるから、自然な問いである。

本研究では結び目の連結和に関する公式を grid homology で示す。この公式は knot Floer homology ではよく知られているため [4]、上述した 1 つ目の方向性の研究となる。Knot Floer homology における結び目の連結和公式は以下である：

$$\widehat{HFK}(K_1\#K_2) \cong \widehat{HFK}(K_1) \otimes \widehat{HFK}(K_2). \tag{1}$$

結び目の連結和はとても基本的な操作であるものの、この公式が grid homology の枠組み内で示せるかどうかは非自明な問題である。実際、上式の両辺に対応する grid homology の鎖複体考えると、左辺は $(2n)!$ 個、右辺は $n! \times n!$ 個の state で生成されることから少なくとも鎖複体レベルでの同型は存在しない。

2 主定理

定理 1 ([3])**.** 結び目 K_1, K_2 に対し、$K_1, K_2, K_1\#K_2$ を表すある grid diagram $g_1, g_2, g_\#$ が存在し、次の quasi-isomorphism f が存在する。

$$f\colon \widehat{GC}(g_1) \otimes \widehat{GC}(g_2) \to \widehat{GC}(g_\#)$$

ただし、$\widehat{GC}(g)$ は grid diagram g のハットバージョンの grid chain complex である。

等式 (1) について、ホモロジーの同型が存在することが講演者の以前の研究 [2] によって明らかになっていた。本研究はその結果を改良したものである。

3 証明の概要

まず、結び目 $K_1, K_2, K_1\#K_2$ をそれぞれ図 2 のように $g_1, g_2, g_\#$ で表す。このような表し方は常に可能である。その上で f を、”g_1, g_2 のそれぞれの state を $g_\#$ の左上と右下に配置する”ような map として定義する (図 3)。

次に $\widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im}f$ が acyclic であることを示す。これは $\widehat{GC}(g_\#)$ を生成する $(2n)!$ 個の state を分類することで $\widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im}f$ を subcomplex に分割し、それぞれが acyclic であることを確認する。

以前の結果 [2] では、$\widehat{GC}(g_\#)$ をさらに簡約した $\widetilde{GC}(g_\#)$ なる有限次元の chain complex を観察し、それが acyclic であることを示した。今回は無限次元の chain complex である $\widehat{GC}(g_\#)$ を直接観察するが、局所的に有限次元の以前の $\widetilde{GC}(g_\#)$ の場合と同じ状況が成り立つため、今回の結果が従う。

$\widehat{GC}(g_\#)/\mathrm{Im}f$ が acyclic より、f が quasi-isomorphism であることが従う。

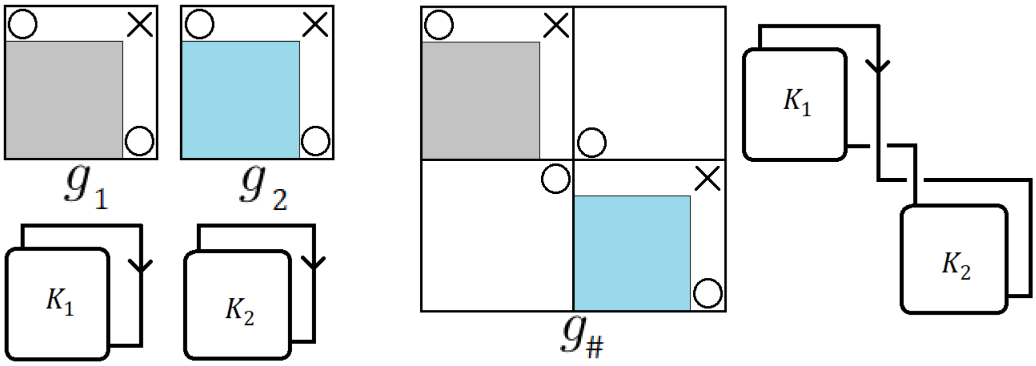

図 2　左：K_1, K_2 を表す grid diagram。右：$K_1\#K_2$ を表す grid diagram

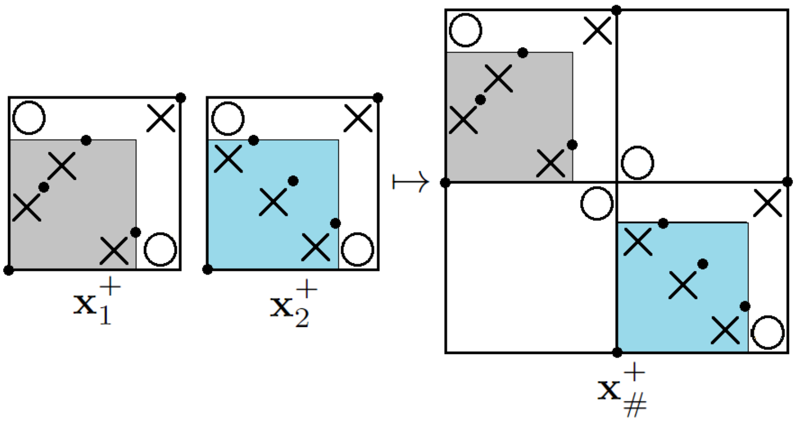

図 3　f が state を移す様子。

4 応用

Grid homology を用いて Legendrian knot $\mathcal{K}$ の不変量 $\lambda^{\pm}(\mathcal{K})$ が定義されている ([7]、Legendrian knot については [1] を参照)。この不変量はまず grid homology で定義され、のちに knot Floer homology で再定義、拡張された。すなわちこの不変量は上述した研究の方向性 2. の具体例である。

この不変量が Legendrian knot の連結和に関して加法的に振る舞うことは、knot Floer homology 上で証明されている [8]。一方、今回の結果を用いることで、このことを grid homology 上で示すことが出来る。

Grid diagram g からカノニカルに定まるある 2 つの state $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-$ が表すホモロジーの元 $[\mathbf{x}^+], [\mathbf{x}^-] \in \widehat{GH}(g)$ が Legendrian knot の不変量になることが知られている [7]。これらをそれぞれ $\lambda^{\pm}(\mathcal{K})$ と書く。主定理における f は state をある意味自然に対応させることから、state から定まるこれら不変量が連結和に関して加法的に振る舞うことがすぐに従う。よって以下を得る。

定理 2 ([3])**.** $H(f)$ は $\lambda^{\pm}(\mathcal{K}_1) \otimes \lambda^{\pm}(\mathcal{K}_2)$ を $\lambda^{\pm}(\mathcal{K}_1\#\mathcal{K}_2)$ に移す。

参考文献

[1] John B. Etnyre, *Legendrian and transversal knots*, Handbook of knot theory, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, pp. 105–185. MR 2179261

[2] Hajime Kubota, *Grid homology for spatial graphs and a künneth formula of connected sum*, arXiv. (2023).

[3] ______, *Quasi-isomorphism of grid chain complexes for a connected sum of knots*, arXiv. (2023).

[4] Ciprian Manolescu, *An introduction to knot Floer homology*, Physics and mathematics of link homology, Contemp. Math., vol. 680, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 99–135. MR 3591644

[5] Ciprian Manolescu, Peter Ozsváth, Zoltán Szabó, and Dylan Thurston, *On combinatorial link Floer homology*, Geom. Topol. **11** (2007), 2339–2412. MR 2372850

[6] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004), no. 1, 58–116. MR 2065507

[7] Peter Ozsváth, Zoltán Szabó, and Dylan Thurston, *Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 2, 941–980. MR 2403802

[8] Vera Vértesi, *Transversely nonsimple knots*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 3, 1481–1498. MR 2443251