

# Knot Floer complex が $(3, q)$ 型トーラス結び目と stably equivalent な双曲結び目

姫野 圭佑 (広島大学先進理工系科学研究科数学プログラム D1)\*

## 概要

二つの (full) knot Floer complex に acyclic complex をそれぞれ加えることで filtered chain homotopy equivalent にできる時、それらの complex は stably equivalent であるという. Hom は、互いに concordant な knot の knot Floer complex は stably equivalent であることを示した. 本稿では、knot Floer complex が  $(3, q)$  型トーラス結び目と stably equivalent で、互いに concordant でない無限個の双曲結び目を構成できたのでそれを紹介する. 特に、それらの結び目の epsilon invariant は下に凸であり、Borodzik-Hedden による「epsilon invariant が下に凸になる結び目はどのようなものか」という問いに新たな答えを与えている. knot Floer complex の計算は、Goda-Matsuda-Morifuji で述べられている  $(1, 1)$ -knot に対する組み合わせ的な手法を用いた.

## 1. 導入と主結果

2000 年初期, Ozsváth と Szabó により knot Floer homology 理論が導入された [10]. homology 理論なので、鎖複体が定義されるわけだがいくつか種類がある. 本稿では full knot Floer complex と呼ばれる  $CFK^\infty$  に着目する. 一般に、狙った  $CFK^\infty$  を実現する結び目を構成することは難しい. また、具体的な双曲結び目を扱った  $CFK^\infty$  の研究は少ない.

結び目  $K \subset S^3$  に対する  $CFK^\infty(K)$  は次の構造を持つ.

- $CFK^\infty(K)$  は  $\mathbb{F}_2[U, U^{-1}]$ -加群の構造を持つ. ここで  $\mathbb{F}_2[U, U^{-1}]$  は、位数 2 の有限体  $\mathbb{F}_2$  を係数、 $U$  を変数とした Laurent 多項式環である.
- 鎖複体として、 $CFK^\infty(K)$  は Maslov grading と呼ばれる homological grading と微分  $\partial$  を持つ.
- $CFK^\infty(K)$  は  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -filtered 鎖複体の構造を持つ. 一つ目の filtration level を Alexander grading, 二つ目の filtration level を algebraic grading と呼ぶ.
- $U$  の  $CFK^\infty(K)$  への作用は  $\partial$  と可換であり、Maslov grading を 2, 二つの filtration levels を 1 ずつ下げる.

また、 $CFK^\infty(K)$  の filtered chain homotopy equivalence class は結び目の不変量になる.

$CFK^\infty(K)$  の様子を平面に描画することができる.  $\mathbb{F}_2$ -ベクトル空間としての生成元  $U^i x$  を座標  $(-i, \text{Alex}(U^i x))$  に配置し、微分は矢印で表す (図 1). この座標が  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -filtration levels を表す.

full knot Floer complex の集合に同値関係を入れる.

\* e-mail: himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

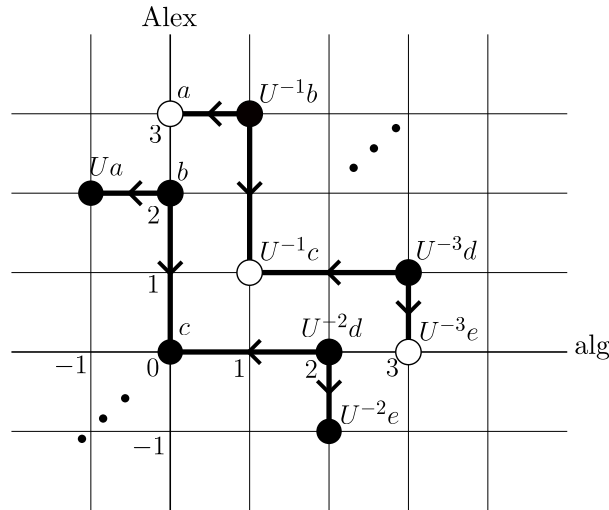


図 1: トーラス結び目  $T(3,4)$  の full knot Floer complex  $\text{CFK}^\infty(T(3,4))$ . 白の頂点は Maslov grading が 0 の生成元を表しており, 互いに homologous である. したがって, それぞれ  $H_0(\text{CFK}^\infty(T(3,4))) \cong \mathbb{F}_2$  の生成元になる.

**定義 1.** 二つの full knot Floer complex  $C_1, C_2$  が *stably equivalent* であるとは, acyclic な鎖複体  $A_1, A_2$  が存在して,  $C_1 \oplus A_1$  と  $C_2 \oplus A_2$  が filtered chain homotopy equivalent になることである.

本稿で主に登場する acyclic 鎖複体は box 型鎖複体である (図 2).

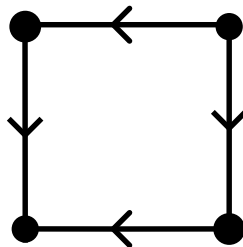


図 2: box 型鎖複体. cycle は左下の点, もしくは左上の点と右下の点の和である. しかしどちらも boundary cycle である. したがって, ホモロジーは消えており, acyclic 鎖複体である.

Hom は,  $K_1$  と  $K_2$  が concordant であるとき,  $\text{CFK}^\infty(K_1)$  と  $\text{CFK}^\infty(K_2)$  は stably equivalent であることを示した [5].

本稿は, 互いに concordant でないが full knot Floer complex が stably equivalent になる双曲結び目を構成したので, それを紹介する.

$n$  を非負整数,  $q \geq 4$  を 3 と互いに素な整数,  $\sigma_1, \sigma_2$  を 3 次ブレイド群の標準的な生成元を表すブレイドとする. 図 3, 4 のように結び目  $K_n^{(3,q)}$  を定める.

**定理 1.** 結び目  $K_n^{(3,q)}$  ( $n \geq 1$ ) は以下を満たす.

- $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$  は  $\text{CFK}^\infty(T(3,q))$  と stably equivalent である.
- 双曲結び目である.

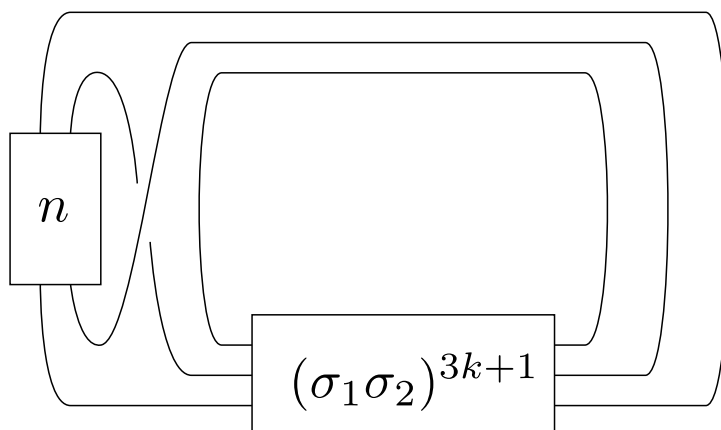


図 3:  $q = 3k + 1$  ( $k \geq 1$ ) の場合.  $n$  は右手系の  $n$  回フルツイストを表す.

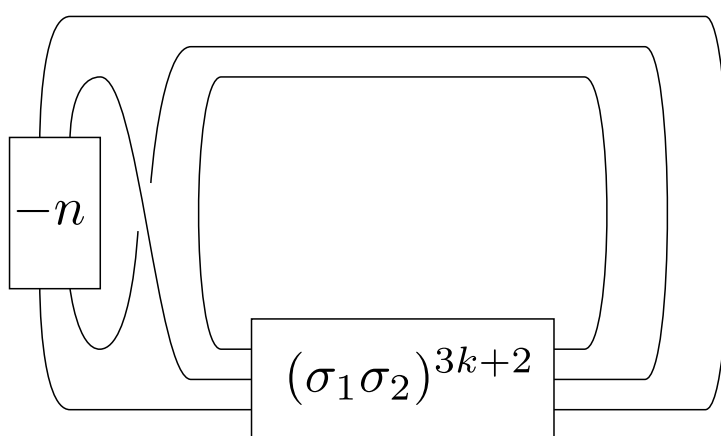


図 4:  $q = 3k + 2$  ( $k \geq 1$ ) の場合.  $-n$  は左手系の  $n$  回フルツイストを表す.

- $L$ -space knot でも Floer thin knot でもない.

**定理 2.** 結び目の族  $\{K_n^{(3,q)}\}_{n=0}^\infty$  は互いに concordant でない結び目を無限個含む.

また, このような結び目を構成した背景に以下のものがある.

Ozváth–Stipsicz–Szabó により,  $S^3$  内の結び目  $K$  に対して  $\Upsilon$  不変量  $\Upsilon_K(t): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  が定義された [8]. この不変量は以下の性質を持つ.

- 連続かつ区分線形,
- コンコードانس不変量,
- 左右対称, つまり  $\Upsilon_K(t) = \Upsilon_K(2 - t)$ ,
- $K^*$  を  $K$  の鏡像とすると,  $\Upsilon_{K^*}(t) = -\Upsilon_K(t)$ ,
- $\Upsilon_{K_1 \# K_2}(t) = \Upsilon_{K_1}(t) + \Upsilon_{K_2}(t)$ .

図 5 に例を挙げておく.

この  $\Upsilon$  不変量に関して, Borodzik–Hedden により, 「 $\Upsilon$  不変量が凸関数になる結び目はどのようなものか?」という問いが与えられている [2]. 以下の結び目の  $\Upsilon$  不変量は凸関数になることが知られている.

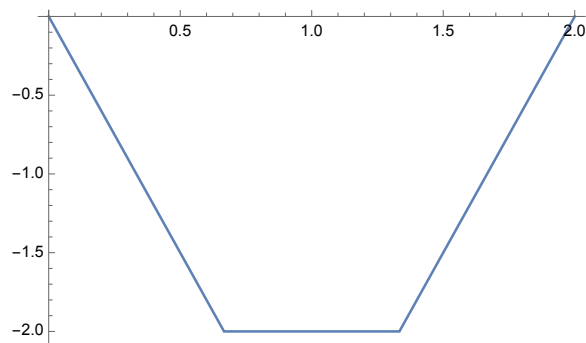


図 5:  $(3, 4)$  型トーラス結び目  $T(3, 4)$  の  $\Upsilon$  不変量. 区分線形であることや左右対称であることが確認できる. さらにこの関数は凸関数であることも分かる.

- $L$ -space knot [2].
- Floer thin knot (適切な鏡像を考えると) [1].
- $\Upsilon$  不変量が凸関数になる結び目の連結和.

$\Upsilon_K(t)$  は  $\text{CFK}^\infty(K)$  から求めることができる [6]. さらに, その計算方法から次が成り立つことが分かる.

**命題 1.**  $\text{CFK}^\infty(K_1)$  と  $\text{CFK}^\infty(K_2)$  が stably equivalent であるとき,  $\Upsilon_{K_1}(t) = \Upsilon_{K_2}(t)$ .

主定理の系として, 次を得る.

**系 1.**  $\Upsilon_{K_n^{3,q}}$  は凸関数である.

**証明.** 定理 1 と命題 1 より,  $\Upsilon_{K_n^{3,q}}(t) = \Upsilon_{T(3,q)}(t)$ .  $T(3, q)$  は  $L$ -space knot であるため,  $\Upsilon_{T(3,q)}(t)$  は凸関数である. これで示された.  $\square$

定理 1 より,  $K_n^{(3,q)}$  ( $n \geq 1$ ) は双曲結び目であり,  $L$ -space knot でも Floer thin knot でもない. したがって, この結び目は Borodzik–Hedden の問いに対する新たな答えを与えている.

## 2. $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$ の計算結果

一般的な  $\text{CFK}^\infty(K)$  の定義は複素解析の知識を必要とするため難しい. しかし, 結び目が  $(1, 1)$ -結び目の場合は, 組み合わせ的に計算できる [4]. 本稿ではページ数の関係により, 計算結果だけ載せておておく (図 6, 7). 矢印は左もしくは下向きであり省略している.

図における階段型の鎖複体 (staircase 鎖複体) が  $T(3, q)$  の full knot Floer homology と同型である. したがって,  $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$  と  $\text{CFK}^\infty(T(3, q))$  は stably equivalent である.

## 3. 双曲性と $L$ -space knot と Floer thin knot

定理 1 の残り部分を証明する. そのためにまず, 結び目  $K_n^{(3,q)}$  の Alexander 多項式を計算する. 結び目  $K$  の Alexander 多項式は hat version の knot Floer homology

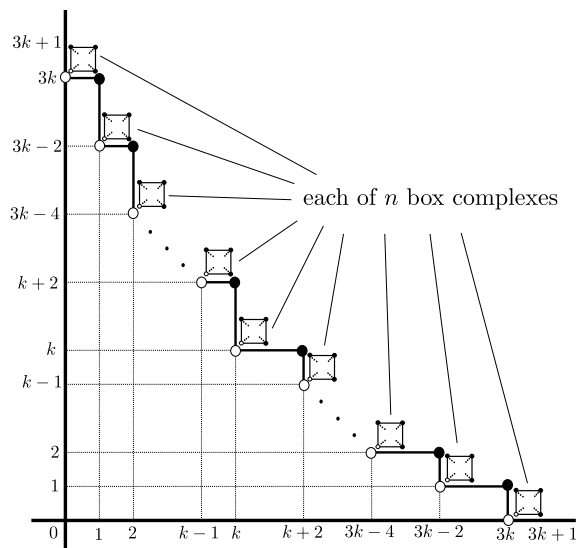


図 6:  $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,3k+1)})$ .

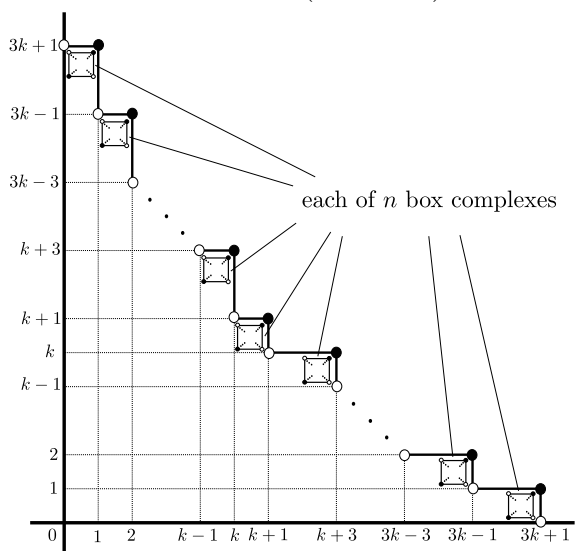


図 7:  $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,3k+2)})$ .

$\widehat{\text{HFK}}(K)$  を用いて次のように計算できる [10].

$$\Delta_K(t) = \sum_{M, A \in \mathbb{Z}} (-1)^M t^A \cdot \text{rank } \widehat{\text{HFK}}_M(K, A),$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} \Delta_{K_n^{(3,3k+1)}}(t) &= \sum_{i=1}^k \left\{ -n(t^{3i+1} + t^{-3i-1}) + (2n+1)(t^{3i} + t^{-3i}) \right. \\ &\quad \left. - (n+1)(t^{3i-1} + t^{-3i+1}) \right\} - nt + (2n+1) - nt^{-1}, \\ \Delta_{K_n^{(3,3k+2)}}(t) &= \sum_{i=1}^k \left\{ (n+1)(t^{3i+1} + t^{-3i-1}) - (2n+1)(t^{3i} + t^{-3i}) \right. \\ &\quad \left. + n(t^{3i-1} + t^{-3i+1}) \right\} + (n+1)t - (2n+1) + (n+1)t^{-1}. \end{aligned}$$

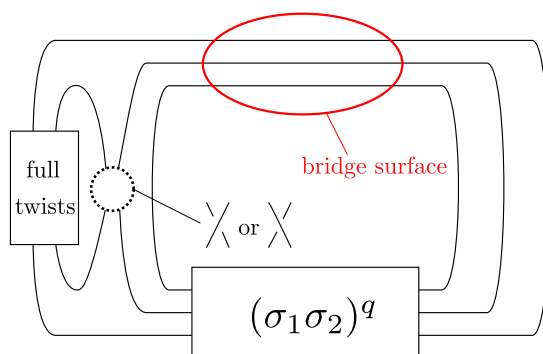
を得る.

**補題 1.**  $n \geq 1$  のとき, 結び目  $K_n^{(3,q)}$  は双曲結び目である.

**証明.**  $\Delta_{K_n^{(3,q)}}(t)$  の係数を見ると,  $n \geq 1$  のとき,  $K_n^{(3,q)}$  はトーラス結び目でないことが分かる. したがって,  $K_n^{(3,q)}$  がサテライト結び目であると仮定して矛盾を導けば良い.

まず,  $K_n^{(3,q)}$  は  $(1,1)$ -結び目であるので, よく知られている事実として,  $K_n^{(3,q)}$  は素な結び目となる.

また, 図 3 より  $K_n^{(3,q)}$  の橋数は高々 3 である (実際は, Alexander 多項式から  $K_n^{(3,q)}$  が non-alternating であるので, その橋数は 3 と分かる).



しかし, [13] より素なサテライト結び目の橋数は少なくとも 4 以上であるので矛盾. 以上で示された.  $\square$

結び目が  $L$ -space knot であるとは, ある正の整数係数 Dehn 手術により  $L$ -space を産むことができるときをいう.

**補題 2.**  $n \geq 1$  のとき, 結び目  $K_n^{(3,q)}$  は  $L$ -space knot でない.

**証明.**  $L$ -space knot の Alexander 多項式の非零係数は  $\pm 1$  である [11]. したがって,  $n \geq 1$  のとき, Alexander 多項式から  $K_n^{(3,q)}$  が  $L$ -space knot でないことが分かる.  $\square$

結び目  $K$  が, ある  $\delta$  が存在して  $M - A \neq \delta$  ならば  $\widehat{\text{HFK}}_M(K, A) = 0$  をみたすとき,  $K$  は Floer thin knot であるという. 全ての alternating knot, より一般に quasi-alternating knot は Floer thin knot である [7, 9].

**補題 3.**  $K_n^{(3,q)}$  は Floer thin knot でない.

**証明.** Floer thin knot の  $\text{CFK}^\infty$  は矢印の長さが 1 の staircase 鎖複体と box 鎖複体のみから構成される [12].  $\text{CFK}^\infty(K_n^{(3,q)})$  は長さが 2 の矢印を持つ (図 6, 7). 以上より  $K_n^{(3,q)}$  は Floer thin knot でない.  $\square$

これで定理 1 が示された.

## 4. Concordance

定理 2 を示す. そのために determinant を計算しておく.

**補題 4.** 結び目  $K_n^{(3,q)}$  の determinant は以下の通りになる.

$$\det(K_n^{(3,3k+1)}) = \begin{cases} 4n+3 & k: \text{ odd} \\ 4n+1 & k: \text{ even,} \end{cases}$$

$$\det(K_n^{(3,3k+2)}) = \begin{cases} 4n+1 & k: \text{ odd} \\ 4n+3 & k: \text{ even.} \end{cases}$$

**証明.** Alexander 多項式から直接計算すれば良い. □

**補題 5.** 以下のいずれかを満たすとき,  $K_n^{(3,q)}$  と  $K_m^{(3,q)}$  は互いに concordant でない.

- $q = 3k + 1$  かつ  $k$  が奇数のとき,  $(4n + 3)(4m + 3)$  が平方数でない.
- $q = 3k + 1$  かつ  $k$  が偶数のとき,  $(4n + 1)(4m + 1)$  が平方数でない.
- $q = 3k + 2$  かつ  $k$  が奇数のとき,  $(4n + 1)(4m + 1)$  が平方数でない.
- $q = 3k + 2$  かつ  $k$  が偶数のとき,  $(4n + 3)(4m + 3)$  が平方数でない.

**証明.**  $K_n^{(3,q)}$  と  $K_m^{(3,q)}$  が concordant であるとき,  $K_n^{(3,q)} \# -K_m^{(3,q)}$  は slice knot である. Fox–Milnor condition [3] より, その determinant は平方数になる.  $\det(K_n^{(3,q)} \# -K_m^{(3,q)}) = \det(K_n^{(3,q)})\det(K_m^{(3,q)})$  であるので, determinant の計算結果より主張が従う. □

**定理 2 の証明.** Dirichlet の算術級数定理により,  $4n + 1, 4n + 3$  の形をした素数は無限に存在する. したがって, 補題 5 の条件を満たす  $n, m$  も無限に存在する. □

実際は  $n \neq m$  のとき,  $K_n^{(3,q)}$  と  $K_m^{(3,q)}$  は互いに concordant でないと考えているが, 一般に証明はできなかった. コンピューターを用いて, Alexander 多項式や Levine–Tristram signature などの観点から具体的に実験で確かめることはできる.

## 参考文献

- [1] A. Alfieri, *Upsilon-type concordance invariants*, *Algebr. Geom. Topol.* **19** (2019), no.7, 3315–3334.
- [2] M. Borodzik and M. Hedden, *The  $\Upsilon$  function of L-space knots is a Legendre transform*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **164** (2018), no.3, 401–411.
- [3] R. H. Fox, J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, *Osaka Math. J.* **3** (1966), 257–267.
- [4] H. Goda, H. Matsuda and T. Morifuji, *Knot Floer homology of  $(1, 1)$ -knots*, *Geom. Dedicata* **112** (2005), 197–214.
- [5] J. Hom, *A survey on Heegaard Floer homology and concordance*, *J. Knot Theory Ramifications* **26** (2017), no.2, 1740015, 24 pp.
- [6] C. Livingston, *Notes on the knot concordance invariant upsilon*, *Algebr. Geom. Topol.* **17** (2017), no.1, 111–130.

- [7] C. Manolescu and P. Ozsváth, *On the Khovanov and knot Floer homologies of quasi-alternating links*, In S. Akbulut, T. Önder, and R. J. Stern. (eds.), Proceedings of Gökova Geometry–Topology Conference 2007. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, (2008) 60–81.
- [8] P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, Adv. Math. **315** (2017), 366–426.
- [9] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Heegaard Floer homology and alternating knots*, Geom. Topol. **7** (2003), 225–254.
- [10] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004), no.1, 58–116.
- [11] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology **44** (2005), no.6, 1281–1300.
- [12] I. Petkova, *Cables of thin knots and bordered Heegaard Floer homology*, Quantum Topol. **4** (2013), no.4, 377–409.
- [13] H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954), 245–288.