Satellite operations and the loop expansion of the Kontsevich invariant of knots

山口 貢輝 (京都大学数理解析研究所)

概 要

結び目の Kontsevich 不変量は, ループ展開と呼ばれる特殊な展開を持つことが知られている. 本稿では, 結び目の Kontsevich 不変量のループ展開（の 2 ループ以上の部分）が, （1 ループ部分を変化させないような）特定のサテライト化に対してどのように振舞うのかという問題に関して, 新たに得られて結果について紹介する.

1 導入

結び目の Kontsevich 不変量は, 量子不変量や Vassiliev 不変量を統一する非常に強力な不変量である. Kontsevich 不変量の値は, ヤコビ図を呼ばれるある種のグラフの無限和で表され, 任意に与えられた結び目に対してその値を決定するのは現時点では非常に困難である. 一方, Kontsevich 不変量はループ展開と呼ばれる特殊な展開を持つことが知られている [1, 3]. ループ展開により, 各ループごとのヤコビ図の無限和の情報が, 有限個の多項式の情報で集約できることが分かる.

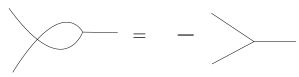
結び目に対して, サテライト化というものが定義される. サテライト化に対して Alexander 多項式（ループ展開の 1 ループ部分）がどのように振舞うかという公式はすでによく知られている. サテライト化に対して, Alexander 多項式が自明に振舞ってしまうようなサテライト化（例えば Whitehead double）に対しては, ループ展開の 2 ループ以上の部分で判別ができるのではないか, というのは自然な疑問であり, Whitehead double の 2 ループ部分に関してはすでに研究されている [2]. 今回は, その結果を含む形でより新たな結果が得られたので, それについて述べる.

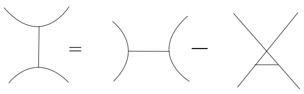
2 ヤコビ図の空間

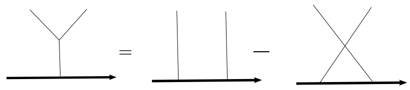
この章では, 結び目の Kontsevich 不変量が値を取るヤコビ図の空間について復習する. より詳細な内容については, 例えば [4, 5] などを参照されたい.

X を向き付けられたコンパクト 1 次元多様体とする. 1, 3 価グラフであって, 各 1 価頂点が X 上の点であり, 各 3 価頂点には巡回順序が与えられているようなものを X 上の**ヤコビ図**という（ヤコビ図を平面上に描く際には, X を太線で書くことにし, また, 巡回順

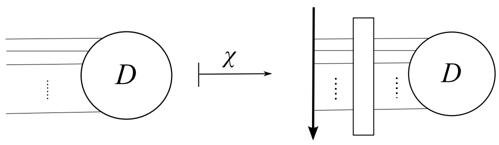
序は反時計回りに与える). ヤコビ図に対し, その**次数**を, 頂点の個数の半分の値として定義する. X 上のヤコビ図全体がはる $\mathbb{Q}$-(もしくは $\mathbb{C}$-) ベクトル空間を, AS, IHX, STU 関係式で割った空間を **X 上のヤコビ図の空間**といい, $\mathcal{A}(X)$ と書く.

AS 関係式 :


IHX 関係式 :

.

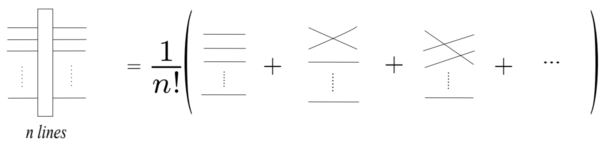
STU 関係式 :


1, 3 価グラフであって, 各 3 価頂点に巡回順序が与えられているようなものを**開ヤコビ図**という. 開ヤコビ図の次数も同様に定義する. また, 1 次ベッチ数が l であるような開ヤコビ図を **l ループ**であるという. 開ヤコビ図全体がはる $\mathbb{Q}$-(もしくは $\mathbb{C}$-) ベクトル空間を, AS, IHX 関係式で割った空間を**開ヤコビ図の空間**といい, $\mathcal{B}$ と書く. 次の PBW 写像 $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}(\downarrow)$ はベクトル空間の同型を与える.



,

ここで, 白い長方形は, 右の n 本の線を左の n 本の線につなげる $n!$ 通り全ての平均を表す.



.

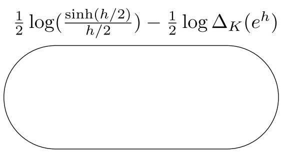
注 2.1. $\mathcal{A}(X)$ や $\mathcal{B}$ について, それらを次数に関して完備化した空間もそれぞれ同じ記号で書くことにする.

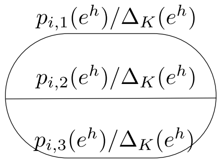
3 結び目の Kontsevich 不変量とそのループ展開

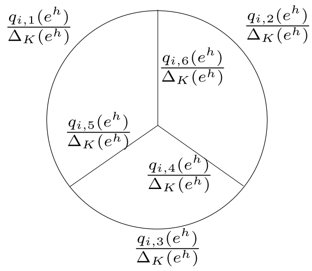
この章では, 結び目の Kontsevich 不変量とそのループ展開について簡単に復習する. 詳しい定義などについては, 例えば [4, 5] などを参照されたい.

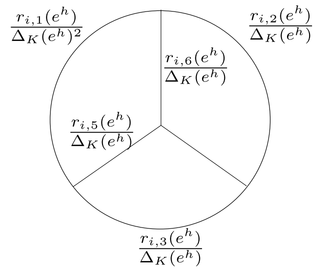
(枠付き有向) 結び目 K に対して, $\mathcal{A}(\downarrow)$ に値を取る **Kontsevich 不変量** $Z(K)$ が定義される. $Z(K)$ 及び $\chi^{-1}Z(K)$ は, それぞれ連結なヤコビ図の無限和の exp で表されることが

知られている. さらに, 0 枠結び目 K に対し, $\log\left(\chi^{-1}Z(K)\right)$ は次のような特殊な展開を持つことが知られている [1, 3];

$\log(\chi^{-1}Z(K)) =$ 

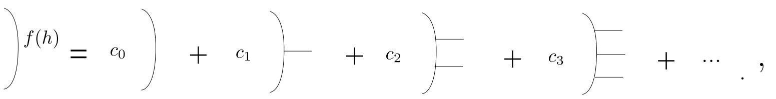
$+\sum_i^{\text{finite}}$ 

$+\sum_i^{\text{finite}}$ 

$+\sum_i^{\text{finite}}$ 

$+$ (同様に展開される (>3) ループ以上の項),

ここで, $\Delta_K(t)$ は K の Alexander 多項式 ($\Delta_K(t)=\Delta_K(t^{-1}), \Delta_K(1)=1$ を満たすもの) であり, $p_{i,j}(e^h)$ や $q_{i,j}(e^h)$ は $e^{\pm h}$ の多項式である. また, 級数 $f(h)=c_0+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+\cdots$ をグラフの辺にラベリングしたものは



を意味する. すなわち, $\log\left(\chi^{-1}Z(K)\right)$ の各ループ部分の無限和は, 各 3 価グラフに "($e^{\pm h}$ の多項式)/$\Delta_K(e^h)$" をラベリングしたものの有限和で表される (3 ループの項に関して, それらを IHX 関係式を使って全て四面体グラフの形に変形できるが, その際に分母に $\Delta_K(e^h)^2$ が現れることがある). 以後, $\log\left(\chi^{-1}Z(K)\right)$ の m ループ部分を $Z^{(m\text{-loop})}(K)$ と表すことにする.

4 主結果をそれに関する計算

この章では, 本稿の主結果とそれに関する計算結果について述べる.

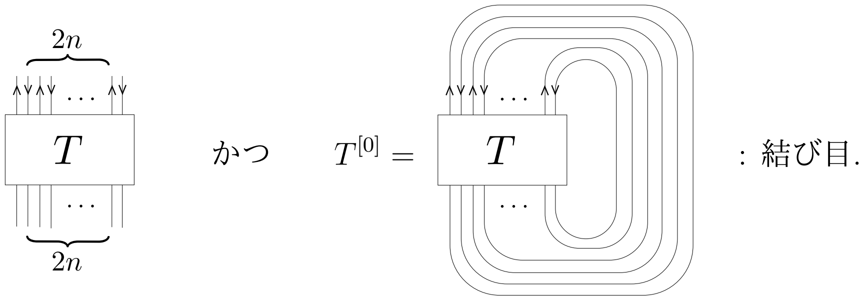
4.1 主結果

$\mathcal{T}_n^{\text{null}}$ を次を満たすようなタングル T 全体の集合とする;

・ T は $(2n,2n)$ タングルである,

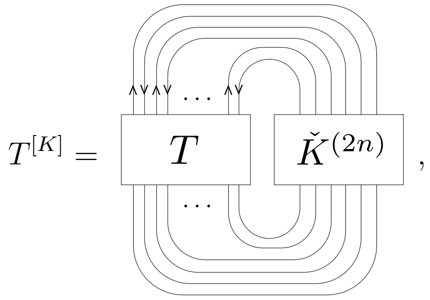
・ それぞれの境界点の近傍で, n 本のひもが上向き, n のひもが下向きである,

・ $T^{[0]}$(T の閉包) は結び目である.



また, $\mathcal{T}^{\mathrm{null}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n^{\mathrm{null}}$ と表すことにする.

0 枠結び目 K に対し, $T^{[K]}$ を次のようなサテライト結び目とする;



ここで, $\check{K}$ は K を一点で切り開いた 1 タングルであり, $\check{K}^{(2n)}$ は $\check{K}$ の $2n$ 重化である. $T^{[K]}$ の Alexander 多項式は$T^{[0]}$ の Alexander 多項式と等しい値となり, それを $\Delta_T(t)$ とおく. すなわち, $T^{[K]}$ と $T^{[0]}$ は Kontsevich 不変量の 1 ループ部分では区別できない.

注 4.1. [2](の Theorem 1) のおいて, $n = 1$ の場合に次のことが示されている;
(i) 写像 $K \mapsto Z^{(m\text{-loop})}(T^{[K]})$ は, (0 枠) 結び目 K の次数 $\leq 2(m-1)$ の有限型不変量である. また, その次数 $2(m-1)$ の部分は Alexander(-Conway) 多項式の係数を用いて表される.
(ii) 2 ループ部分について,

$$Z^{(2\text{-loop})}(T^{[K]}) = Z^{(2\text{-loop})}(T^{[0]}) + a_2 \cdot c_T,$$

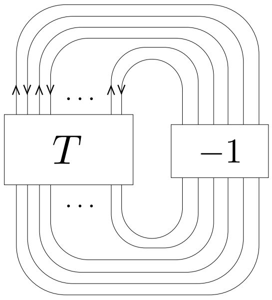
が成り立つ. ここで, a_2 は (Conway 多項式の 2 次の係数で表される)K の非自な 2 次の Vassiliev 不変量であり, c_T は K に依存しない部分である.

さらに, [2] では, Whitehead double に対応するタングルについて, c_T を具体的に決定している.
(Whitehead double の 2 ループ部分については [6] の公式, 3 ループ部分については [7] の公式を使っても計算できる.)

タングル $T \in \mathcal{T}^{\mathrm{null}}$ に対して, 1 変数 (ローラン) 多項式 $\varphi_T(t)$ を以下のように定義する;

$$\varphi_T(t) = \Delta_{T^{[-1]}}(t) - \Delta_T(t).$$

ここで, $T^{[-1]}$ は以下のように定義される結び目である;

$T^{[-1]} =$ 

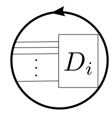
,

図の中の "-1 の箱" は -1-フルツイストを意味している. $\varphi_T(t)$ は, $\varphi_T(t) = \varphi_T(t^{-1})$, $\varphi_T(1) = 0$ を満たすことに注意する.

本稿の主結果を述べる.

定理 4.2. タングル $T \in \mathcal{T}^{null}$, *0* 枠結び目 K に対して, 以下が成り立つ.
*(*i*)* 写像 $K \mapsto Z^{(m\text{-}loop)}(T^{[K]})$ は, K の次数 $\leq 2(m-1)$ の有限型不変量である. また, その次数 $2(m-1)$ の部分は *Alexander(-Conway)* 多項式の係数を用いて表される.
*(*ii*)* $\check{K}$ の *Kontsevich* 不変量が以下のように表されていると仮定する*;*

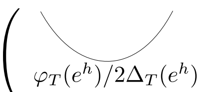
$$Z(\check{K}) = \exp\left(\sum_i \alpha_i \quad \text{+ (その他の項)}\right) \in \mathcal{A}(\downarrow), \tag{1}$$



ここで*,* $\alpha_i \in \mathbb{Q}$*,* D_i は $2(m-1)$ 個の *3* 価頂点を持つ連結な開ヤコビ図であり*, "(*その他の項*)"* は *3* 価頂点を $2m-1$ 個以上持つ開ヤコビ図の無限和である. このとき*,*

$$Z^{(k\text{-}loop)}(T^{[K]}) = Z^{(k\text{-}loop)}(T^{[0]}) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$Z^{(m\text{-}loop)}(T^{[K]}) = Z^{(m\text{-}loop)}(T^{[0]}) + \left\langle \exp\left(\quad \right), \sum_i \alpha_i D_i \right\rangle,$$



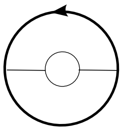
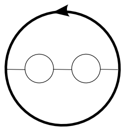
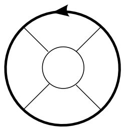
が成り立つ. ここで, $\langle \quad , \quad \rangle$ は以下のように定義される*;*

$$\langle C_1, C_2 \rangle = (C_1 \text{ の } \mathit{1} \text{ 価頂点と } C_2 \text{ の } \mathit{1} \text{ 価頂点を結合する全ての場合の和}).$$

.

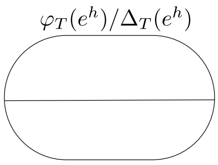
上の定理から, 0 枠結び目 K の Kontsevich 不変量が (1) のように表されるとき, $T^{[K]}$ と $T^{[0]}$ は Kontsevich 不変量の $m-1$ 以下のループ部分では区別できず, m ループ部分で初めて区別できる可能性がある, ということが分かる. 特に, $m = 2, 3$ のときは次が言える ;

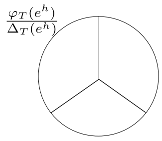
系 4.3. *$\check{K}$ の Kontsevich 不変量を以下のように表す;*

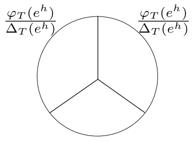
$$Z(\check{K}) = \exp\Big(a_2$$  $$+ a_3$$  $$+ a_4$$ 

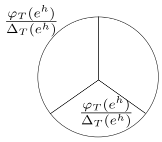
$$+ (3\text{価頂点を } 5 \text{ つ以上もつ項})\Big).$$

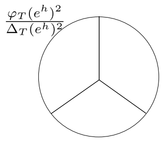
このとき,

$$Z^{(2\text{-}loop)}(T^{[K]}) = Z^{(2\text{-}loop)}(T^{[0]}) + a_2$$ 

$$Z^{(3\text{-}loop)}(T^{[K]}) = Z^{3\text{-}loop}(T^{[0]}) + 2a_3$$ 

$$+ 2a_4$$ 

$$+ 3a_4$$ 

$$+ 2a_2^2$$ 

$$+ a_2 \cdot \tilde{\alpha},$$

が成り立つ. ここで, $\tilde{\alpha}$ は K に依存しない部分である. 特に, $\varphi_T(t) \neq 0$ かつ a_2, a_3, a_4 のうち少なくとも一つが 0 でないとき, $Z(T^{[K]}) \neq Z(T^{[0]})$ が言える.

上の定理及び系の証明は, Aarhus integral(の rational version) を用いた直接的な計算により示すことができるが, ここでは詳細は省略する. また, 定理の結果を用いることで, $\mathcal{T}^{\mathrm{null}}$ の属するある種のタングルで繰り返しサテライト化することで得られる結び目のループ展開を考察できるが, サテライト化を一回施すたびに最初の非自明な項のループ数が一つずつ大きくなっていく様子が観察できる. さらに, 主定理の証明とほぼ同じ計算方法を用いて, クラスパー手術によって得られるある種のサテライト結び目に関する公式も導出することができる.

参考文献

[1] S. Garoufalidis, A. Kricker, *A rational noncommutative invariant of boundary links*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2004) 115–204.

[2] S. Garoufalidis, *Whitehead doubling persisits*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004) 935–942.

[3] A. Kricker, *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky's rationality conjecture*, arXiv:math. GT/0005284.

[4] T. Ohtsuki, 結び目の不変量, 共立出版 2015.

[5] T. Ohtsuki, *Quantum invariants*, Series on Knots and Everything 29, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ (2002).

[6] T. Ohtsuki, *On the 2-loop polynomial of knots*, Geom. Topol. **11** (2007) 1357–1457.

[7] K. Yamaguchi, *The 3-loop polynomial of knots obtained by plumbingthe doubles of two knots,*, Internat. J. Math. doi:10.1142/S0129167X23500866