On extensions of local quasi-isometric maps and David maps

松田 凌

January 31, 2024

1 Introduction

Riemann 面 S の Teichmüller 空間 Teich(S) とは, S の複素構造の変形全体を集めた空間である. Teich(S) は高次元の複素多様体である. このとき, 何らかの意味で Teich(S) の境界を考えることは, S の複素構造の退化を考えることに相当する.

Bers の同時一意化の結果から, Teich(S) は, S の Fuchsian モデル $\mathbb{H}/\Gamma$ としたとき, Γ に関する双曲的 L^∞ ノルム有界な正則二次微分の成す Banach 空間:

$$B(S) := \{\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \mid \varphi \circ \gamma \cdot (\gamma')^2 = \varphi (\forall \gamma \in \Gamma), \|\varphi\|_{B(S)} = \sup_{z \in \mathbb{H}} |\varphi(z)(\mathrm{Im} z)^2| < \infty\}$$

の有界領域に双正則同型に埋め込むことができる. これは Bers 埋め込みと呼ばれる. この埋め込みを介して, Teich(S) $\subset B(S)$ とみなし, $\|\cdot\|_{B(S)}$ に関する境界を考えるこれを, Bers 境界といい, 重要な研究対象である.

Bers は, S が有限型 (種数 g, 尖点 n , $3g-3+n>0$) の場合, 同相な Riemann 面は擬等角変形で写り合うことを示した. より具体的には, $\hat{\mathbb{C}}$ に作用する Klein 群で, 不連続領域の連結成分が 2 つであるものを擬 Fuchs 群といい, 擬 Fuchs 群はある Fuchs 群の擬等角変形によって得られることを証明した ([Ber]). これは, “複素構造が退化しているならば位相構造も退化する” と理解することができる.

一方, S が無限型の場合, Bers 境界に “複素構造が退化しているが位相構造は退化していない” 現象 (David Fuchs b 群) が存在していると考えられる. これは, 擬等角写像の退化である David 写像であって群同変なものを構成することで, そのような現象が実際に起こることについて証明した. 前半ではそれについてまとめる.

後半では, Teichmüller 空間と三次元双曲多様体の関係性の観点から, David Fuchs b 群が誘導する三次元双曲多様体がどのような “形” をしているかという興味から得られる問題について述べる. まず S の基本群を $\pi_1(S)$ とする. 次にその表現空間 $\mathcal{R}$ と部分集合 $\mathcal{QF}$ を定める:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= \{\rho : \pi_1(S) \to PSL(2;\mathbb{C}) \mid \text{忠実 かつ puncture を回る loop を放物型元に移す}\}/\text{conjugate}PSL(2;\mathbb{C})\\ \mathcal{QF} &:= \{[\rho] \mid \rho(\pi(S)) \text{ が擬 Fuchs 群}\}\end{aligned}$$

このとき, $\rho(\pi(S))$ が擬 Fuchs 群なら, $\hat{\mathbb{C}}$ に作用するので, Riemann 球面を三次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の境界と見做せば, $\rho(\pi(S))$ は $\mathbb{H}^3$ に等長かつ離散に作用するので, 開三次元双曲多様体 $M_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\pi(S))$ を定め, これは $[\rho]$ の同値類の取り方によらず定められる. このとき, Marden の定理から, S が有限型の曲面ならば, M_ρ は境界までこめて $S \times [0,1]$ と同相になる. 加えて, Bers の同時一意化定理から

$$\mathrm{Teich}(S) \times \mathrm{Teich}(S) \cong \mathcal{QF}$$

が双正則同型になる. しかしながら, S が無限型の場合, Teich(S) の境界に, David Fuchs 群が存在していることと, これは擬 Fuchs 群であることから, 上の定理は成立せず, David Fuchs b 群が定める三次元双曲多様体がどのような形をしているかという自然な問いが出る. これは, Riemann 球面上の群同変な擬等角写像が与えられたとき, 群同変な三次元双曲空間上の擬等長写像を誘導するという Douady–Earle の定理を, David 写像に拡張することが求められる. それについて, すぐには無理だったので, “David 写像が拡張されるなら, どのような写像のクラスになるべきか？” という問いを立て, これについて部分的な結果を得たので, それについて述べる.

2 Teichmüller Theory

2.1 平面上の擬等角写像論

Definition 1
$\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を向きを保つ中への同相写像とする．このとき, f が次の条件：

1. L^2_{loc} に弱偏導関数をもち,
2. $\exists k \in [0,1)$ s.t. $|f_{\bar{z}}| \le k|f_z|$ *a.e.*

を満たすとき, $K := \frac{1+k}{1-k}$ として, K - 擬等角写像（K-*qc*）という．K を f の最大歪曲度といい, $K(f)$ と書く．

K-擬等角写像：f に対して, $\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ は, 可測 かつ L^∞ ノルム：$\|\mu_f\|_\infty \le k := \frac{K-1}{K+1} < 1$ かつ,

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z$$

なる偏微分方程式を満たす．μ_f を方程式の Beltrami 係数という．これについて, 次が知られている．

Theorem 2.1（Measurable Riemann mapping Theorem,（[Ahl], Chapter 5, B, Theorem 5））
$\mathbb{C}$ 上の可測写像 μ で, $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすものに対して, μ を *Beltrami* 係数にもつ $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像が存在する．特に, $0, 1$（自動的に ∞ も）を固定するという条件で一意的に決まる．

以後では, Riemann 面の間の擬等角写像を用いる．Riemann 面 R_1, R_2 の間の同相写像 $f : R_1 \to R_2$ が擬等角写像であるとは, 局所座標を介す擬等角写像であって, R_1 上全体で一様に歪曲度が抑えられてるときをいう．

2.2 Teichmüller 空間と Bers 埋め込み

R を Riemann 面とし, その理想境界を C と書くことにする．その Fuchs 群モデル $S = \mathbb{H}/$Fuchs 群を用いた Teichmüller 空間の定義を述べる．

R は双曲型 Riemann 面であって, 普遍被覆は $\mathbb{H}$ とし, その Fuchs 群を Γ とする．

$$\mathrm{Bel}(\Gamma) := \left\{ \mu \in L^\infty(\mathbb{H}) \middle| \mu(Az)\frac{\overline{A'z}}{A'z} = \mu(z)\ (\forall A \in \Gamma), \quad \|\mu\|_\infty < 1 \right\}$$

とおく．各 $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, Beltrami 方程式の標準解である $\mathbb{H}$ の自己擬等角写像で $0, 1, \infty$ を固定するものを w_μ と書くこととする．また, $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, 下半平面上 0 で拡張したものに対する Beltrami 方程式の標準解を w^μ と書くことにする．

Definition 2
$C \subset \hat{\mathbb{R}}$ を Γ の極限集合 を含む Γ 不変な閉集合とする．$\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ が C – *equivalent* であるとは, $w_\mu = w_\nu$ *on* C と定める．
また, $\mathrm{Teich}(\Gamma, C) := \mathrm{Bel}(\Gamma)/C$ – *equivalence* と定める．

Beltrami 係数の成す空間から Teichmüller 空間への射影を π_T と書くことにしておく．

Definition 3（Teichmüller 距離）
$\mathrm{Teich}(\Gamma, C)$ 上に,

$$d_T([\mu], [\nu]) := \frac{1}{2} \inf \log K(w_{\tilde{\mu}} \circ w_{\tilde{\nu}})$$

とおく．ここに, inf は $\tilde{\mu} \in [\mu]$, $\tilde{\nu} \in [\nu]$ 全体でとる．

Theorem 2.2 ([Gar], 5.3)
d_T は $\mathrm{Teich}(\Gamma, C)$ 上で完備な距離である.

2.3 Teichmüller 空間の複素構造

Definition 4

$$B(\Gamma) := \left\{ \varphi \mathbb{H}^* \text{ 上の } \Gamma \text{ に関する正則二次微分 } \middle| \|\varphi\|_{B(\Gamma)} := \left\|\rho^{-2}\varphi\right\|_\infty < \infty \right\}$$

とおく. ただし, $\mathbb{H}^*$ 上の *Poincaré* 計量を $\rho := \frac{|dz|}{-2y}$ とおいた.

Theorem 2.3 (Bers embedding ([Gar, §5.6, Theorem 4]))
Γ を *Fuchs* 群とする. このとき, $\mathcal{B} : \mathrm{Teich}(\Gamma) \ni [\mu] \mapsto \{w^\mu, z\} \in B(\Gamma)$ は一対一正則写像であって, $\Delta_{B(\Gamma)}(0;2) \subset \mathcal{B}(\mathrm{Teich}(\Gamma)) \subset \mathrm{Cl}(\Delta_{B(\Gamma)}(0;6))$ を満たす. 特に, 像の上への双正則同型である. *(* ここに, $\{f, z\} := \frac{f'''}{f'}(z) - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}(z)\right)^2$. また, w^μ とは, $\mathbb{H}$ 上 で μ, $\mathbb{H}^*$ で 0 とした *Beltrami* 係数に対する $0, 1$ を固定する擬等角写像である. *)*

上の定理から, Teichmüller 空間は Banach 空間の有界領域として実現されたから, この Banach 空間の位相によって境界を構成できる. それを Bers 境界といい, $\partial\mathrm{Teich}(\Gamma)$ とかく.

2.4 Bers 境界

Γ を Fuchs 群とする. Bers 埋め込み 並びに $B(\Gamma)$ について簡単にまとめる.
各 $\varphi \in B(\Gamma)$ に対して, $\mathbb{H}^*$ 上の局所単葉函数で,

$$\{W_\varphi, z\} = \varphi, \quad W_\varphi(z) = (z+i)^{-1} + o(1) \text{ near } z = -i$$

を満たすものがただ一つ存在する. そこで, $B(\Gamma)$ の部分集合で次のようなものを定義する :

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &:= \{\varphi \in B(\Gamma) \mid W_\varphi \text{は単葉}\}, \\ T(\Gamma) &:= \{\varphi \in S(\Gamma) \mid W_\varphi \text{は } \mathbb{H} \text{ に擬等角拡張を持つ}\} \end{aligned}$$

これは, $\mathcal{B}(\mathrm{Teich}(\Gamma)) = T(\Gamma)$ であり, $\mathrm{Cl}(T(\Gamma)) \subset S(\Gamma)$ が知られている.
各 $\varphi \in S(\Gamma)$ に対して,

$$\chi_\varphi : \Gamma \ni \gamma \mapsto W_\varphi \circ \gamma \circ W_\varphi^{-1} \in PSL(2;\mathbb{C})$$

なる準同型写像が定義される. 像 $\chi_\varphi(\Gamma)$ は離散部分群であって, $\hat{\mathbb{C}}$ に作用する.

Definition 5
$\chi_\varphi(\Gamma)$ に対して, 次の条件を考える *:*

1. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が二つの時, 擬 *Fuchs* 群という.
2. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が一つの時, 全退化 b 群という.
3. ある双曲型の元 $\gamma \in \Gamma$ が存在して, $\chi_\varphi(\gamma)$ が放物型の元になる時, *cusp* という.
4. $\chi_\varphi(\Gamma)$ が, 擬 *Fuchs* 群 かつ $\partial\mathrm{Teich}(\Gamma)$ のとき, *David Fuchs* b 群という.

Theorem 2.4 (Bers, [Ber])
Γ が有限生成第一種 *Fuchs* 群とする．このとき，$\chi_\varphi(\Gamma)$ が擬 *Fuchs* 群ならば，$\varphi \in T(\Gamma)$ である．
また，$\varphi \in \partial T(\Gamma)$ ならば，$\chi_\varphi(\Gamma)$ は *cusp* または全退化 b 群である．

3 David map

Definition 6
$\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ が，$|\mu\|_\infty| < 1$ を満たすとする．このとき，$\mathbb{C}$ の自己同相写像 f が次の三条件：

1. ある有限集合 $E \subset \mathbb{C}$ が存在して，$f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus E)$
2. $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ *a.e.* $z \in \mathbb{C}$
3. 無限遠点での *Taylor* 展開が，$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots$

を満たすとき，f を μ に関する *(Beltrami* 方程式の*)* 正規解という．

Theorem 3.1 ([AIM, §20, Theorem 20.4.7])
$\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ が次の条件を満たすとき，μ に関する *Beltrami* 方程式は，$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ にただ一つ正規解 f をもつ；
ある可測関数 K と $p \geq 1$ が存在して，$e^K \in L^p(\mathbb{D})$ かつ $|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1}\chi_{\mathbb{D}}$.

Remark
より弱い条件で，*Beltrami* 方程式は同相解を持つことが知られている *(David* 条件，*[*?*]* が，この際，解は $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ に存在する．

Proposition 1
μ は *Theorem 3.1* の仮定を満たす可測写像とする．また (μ_n) を $\mathrm{Bel}(\mathbb{C})$ 上の列が存在し，$\mathrm{supp}(\mu_n) \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{D})$ かつ $\mu_n(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(z)$ (*a.e.* $z \in \mathbb{D}$) を満たすならば，μ_n に関する正規解 f^{μ_n} は μ に関する正規解に広義一様収束する部分列を含む．

4 Deformation of a family of Cylinders

4.1 McMullen の結果

Theorem 4.1 (McMullen, [McM, Theorem1.2])
S を双曲型 *Riemann* 面とし，S 上の閉測地線の長さの下限 $\mathrm{short}(X)$ は $\mathrm{short}(X) > 0$ を満たすとする．このとき，次が成立する：
$[\mu] \in \mathrm{Teich}(S)$ とし，$\nu \in T_{[\mu]}\mathrm{Teich}(S)$ は $\|\nu\|_\infty = 1$ を満たすとする．また，$\mathrm{supp}(\nu)$ は $f^\mu(S)$ の単射半径が $L < 1/2$ を満たす領域に含まれているとき，次の不等式が成立する：

$$\|d\mathcal{B}(\nu)\|_{B(S)} \leq C\left(L \log \frac{1}{L}\right)^2$$

ここに，$\mathcal{B} : \mathrm{Teich}(S) \to B(S)$ は *Bers* 埋め込み，$C > 0$ は $\mathrm{short}(S)$ にのみ依存する定数である．

Remark

McMullen は, *[McM]* のなかで上の定理は, S が有限型であることを仮定しているようにも見えるが, 証明の中で有限型であることは用いられていない.

4.2 Cylinder のピンチングによる単射半径の計算

任意の正数 $M>0$ に対して, $T_M := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\zeta| < M\}$, $C_M := T_M/\langle x \mapsto x+2\pi\rangle$ と書くこととする.

$M>0$ を固定する. また, $\alpha \in (0,1)$ を一つとる. 以下では, T_M の部分領域 $T_{\alpha M} \subset T_M$ を二倍に引き伸ばし, $T_M \setminus T_{\alpha M}$ では並行移動する擬等角変形を考える. この変形を恒等写像から連続的に変形したとき, α をうまく選べば, Beltrami 係数の support の単射半径がどのように変化するかを計算すると, 以下のようになる:

$$f_t : x+iy \mapsto \begin{cases} x+iy+t\alpha Mi & M/2 \le y \le M \\ x+(1+t)iy & |y| \le M/2 \\ x+iy-t\alpha Mi & -M \le y \le -M/2 \end{cases} \qquad (\forall t \in [0,1]).$$

であり, $\mathrm{supp}(\mathrm{bel}(f_t))$ の単射半径 L_t は, $\alpha = 1/2$ とすると次を満たす:

1. $M > 2\sqrt{2}\pi^2$ ならば, $L_0 < 1/2$. 2. L_t は t に関して, 単調減少. 3. $L_1/L_0 < 4/3\sqrt{3}(<1)$.

よって, $M > 2\sqrt{2}\pi^2$ ならば, Thm 4.1 から次の計算をうる :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}([\mathrm{bel}(f_0)]) - \mathcal{B}([\mathrm{bel}(f_1)])\|_{B(C_M)} &\le \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}\mathcal{B}([\mathrm{bel}(f_t)]) \right\|_{B(C_M)} dt \\ &\le \int_0^1 \|d\mathcal{B}\|_{B(C_M)} \left| \frac{d}{dt}\mathrm{bel}(f_t) \right| dt \le C\left(L_0 \log \frac{1}{L_0}\right)^2 \int_0^1 \frac{t}{t+2}\, dt \end{aligned}$$

である. このような変形を **proper stretch** という.

4.3 シリンダーの族の変形

S を Riemann 面であって, $\mathrm{short}(S) > 0$ かつ高さ $M > 2\sqrt{2}\pi^2$ のシリンダーの可算個の和集合からなる開部分集合 U を含むとする. U を構成する各シリンダーを Cyl_n としておく.

S の擬等角変形の列 $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を以下のようにして帰納的に定義する. ただし, $\mathrm{Cyl}_{(n,j)}$ とは, U_j を構成するシリンダーである : U_{n-1} から U_n への変形は, $\mathrm{Cyl}_{(m,n-1)}$ ($m \ge n$) の中心から U_{n-1} から U_n への変形は, $\mathrm{Cyl}_{(m,n-1)}$ ($m \ge n$) に proper stretch をし, 外側は 0 の Beltrami 係数を定義しておく.

上の変形は, Cyl_m^{n-1} の 中心の閉測地線の長さを L_{n-1} とし, U から U_{n-1} の擬等角変形の Beltrami 係数を τ_{n-1}, Bers 埋め込み $\mathcal{B} : \mathrm{Teich}(S) \hookrightarrow B(S)$ とおくと,

$$\|\mathcal{B}([\tau_n]) - \mathcal{B}([\tau_{n-1}])\|_{B(S)} \le C\left(L_{n-1}\log\frac{1}{L_{n-1}}\right)^2$$

をうる. ここに C は S にのみ依存する定数である. 特に, $L_n \le 4/3\sqrt{3}L_{n-1}$ であったから,

$$\sum_n \|\mathcal{B}([\tau_n]) - \mathcal{B}([\tau_{n-1}])\|_{B(S)} \le C\sum_n \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^{2n} \left(L_0 \log\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^n L_0\right)^2 < \infty$$

となる. 従って, $[\tau_n]$ は収束点列である.

5 David Fuchs b 群の構成法

簡単のため, 具体的な曲面に限って議論する. Σ_2 を種数 2 の閉リーマン面とし, l を Σ_2 上の非自明かつ非分離な単純閉測地線とする. また, Σ_2 の Fuchsian モデルを $\mathbb{D}/\Gamma$ とし, 基本領域を T_0 とする. 加えて, l (の Homotopy 類) に対応する双曲的な元を $\alpha \in \Gamma$, l と交点数が 1 となる単純閉曲線に対応する双曲的な元を $\beta \in \Gamma$ とする.

次に, l に沿って Σ_2 を切り開き, その切り取りに沿って張り合わせて得られる種数が無限の開 Riemann 面を S とする. S の Fuchsian モデル : $\mathbb{D}/\tilde{\Gamma}$ は, $\Gamma/\tilde{\Gamma} \cong \langle\beta\rangle$ を満たす. ここに, $\langle\beta\rangle$ は β が生成する巡回群である. このとき, $T_n := \beta^n(T_0)$ とおくと, $T = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_n$ は $\tilde{\Gamma}$ の基本領域になる. また, l の S への持ち上げによって得られる単純閉曲線を l_n $(n \in \mathbb{Z})$ としておく.

構成方法を述べる: l_0 の管状近傍を一つ固定し, それを β で写して得られる l_n の管状近傍からなる cylinder の族 $(\mathrm{Cyl}(l_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える. また, T への持ち上げを C_n と書くことにする. この Cylinder の族から適切に選び出すことで, それらの Cylinder を, "§4.3 シリンダーの族の変形" で構成した変形を加えたときに, それが Theorem 3.1 の仮定を満たすようにできる. それぞれの cylinder はピンチングは有界であるが, ピンチング率はいくらでも大きいものが存在するから, Teich(S) の点ではないことがわかる. 一方で, 前述の結果から, Teich(S) の内部の点で収束する点列を構成することで, Teich(S) の Bers 境界の点であることを示す.

5.1 構成法

以下では, 有限値に収束する正項級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ を一つ固定しておく.

Lemma 1
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\left|\bigcup_{|m|>N} \tilde{\Gamma} T_m\right| < \varepsilon$

Proof:
$\mathbb{D} = \tilde{\Gamma} T = \tilde{\Gamma}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} T_m\right)$ より, わかる. □

$n \in \mathbb{N}$ とする. ある Cylinder を中心の塀測地線の高さが全体の (1/2) の管状近傍を 2 倍に引き伸ばす擬等角変形を考える. これを, n 回合成したものを, ν_n とする. このとき, この擬等角変形の最大歪曲度を $K_n := \frac{1+\|\nu_n\|_\infty}{1-\|\nu_n\|_\infty}$ とする. 補題 1 より, ある $M(n)$ が存在して,

$$\sigma\left(\tilde{\Gamma} C_{M(n)}\right) \cdot e^{K_n} < p_n$$

を満たすようにできる. そこで, 次のような Beltrami 微分を定義する.

$$\mu(z) := \begin{cases} \nu_n(z) & z \in \mathrm{Cyl}(M(n)) \\ 0 & z \in S \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}(\mathrm{Cyl}(M(n))) \end{cases} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n \chi_{\mathrm{Cyl}(M(n))}$$

(ここに, $\chi_{\mathrm{Cyl}(M(n))}$ は, $\mathrm{Cyl}(M(n))$ の特性函数である.) これは, S 上の Beltrami 微分であって, $\mathbb{D}$ への持ち上げを $\tilde{\mu}$ とすると, 構成から $\mathbb{D}$ 上 L^1 歪曲条件を満たすことがわかる. 実際,

$$\int_{\mathbb{D}} e^{K_{\tilde{\mu}}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\tilde{\Gamma} C_{M(n)}\right) \cdot e^{K_n} < \sum p_n < \infty$$

である. 従って, $\tilde{\mu}$ を $\mathbb{D}$ の外側に 0 で拡張したものに関する Beltrami 方程式は, 同相解 $f^{\tilde{\mu}}$ をもつ. 特に, $\tilde{\mu}$ は $\tilde{\Gamma}$ に関する持ち上げであったから, $f^{\tilde{\mu}}$ は S 上の同相写像を誘導する. この像を S_μ と書くこととする.

5.2 S_μ が Teich(S) の内点ではないこと

内点でないことは次の定理から直ちにわかる :

Theorem 5.1 (Wolpert, [Wol, Lemma3.1])
S_1, S_2 を *Riemann* 面とし, ある擬等角写像 $f : S_1 \to S_2$ が存在するとする. c_1 を S_1 上の非自明な閉測地線とし, c_2 を $f(c_1)$ と *homotopic* な閉測地線とすると,

$$\frac{1}{K(f)} \leq \frac{\mathrm{length}(c_1)}{\mathrm{length}(c_2)} \leq K(f)$$

が成り立つ.

もし, S_μ が内点であれば, S からの擬等角写像が存在するが, 対応する閉測地線の長さの比を一様に抑えることができない. 従って, $\mathrm{Teich}(S)$ の点ではない.

Remark
このことは, さまざまな理解の方法がある. 例えば, $\tilde{\Gamma}^\mu := f^{\tilde{\mu}}\tilde{\Gamma}(f^{\tilde{\mu}})^{-1}$ は, $f^{\tilde{\mu}}(\mathbb{D})$ に不連続に作用している. このとき, 内点ではないとは, $f^{\tilde{\mu}}(\partial\mathbb{D})$ が擬円ではないことを意味している.

5.3 S_μ が Bers 境界に存在していること

内部から収束する点列を構成すれば良い. 収束点列を次のように構成する. S の開部分集合 $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cyl}(M(n))$ を考える. この U 上で, "§4.3 シリンダーの族の変形" で与えた変形を考える. 変形を考える Cylinder の高さが, $> 2\sqrt{2}\pi^2$ を満たすくらい十分大きな N を考えれば, $n > N$ ならば

$$\|\mathcal{B}([\tau_n]) - \mathcal{B}([\tau_{n-1}])\|_{B(S)} \leq C\left(L_{n-1}\log\frac{1}{L_{n-1}}\right)^2$$

を満たす. 従って, $[\tau_n] \in \mathrm{Teich}(S)$ は収束点列であることが同様にわかる. そこで, 各 $[\tau_n] = \varphi_n \in B(\Gamma)$ とし, 極限を $\varphi_\infty \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Teich}(S))$ とおく. φ_n は φ_∞ にノルム収束しているから, 広義一様収束している. つまり, τ_n を $\mathbb{D}$ の外側で 0 に拡張したものに関する正規解である W_{φ_n} は W_{φ_∞} に広義一様収束している.

また,

$$\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\mu} \quad (\text{a.e.} z \in \mathbb{D})$$

を満たすから, τ_n に関する正規解は, $f^{\tilde{\mu}}$ に広義一様収束している. つまり, 広義一様収束の一意性から, $f^{\tilde{\mu}}$ は, W_{φ_∞} に一致する. 以上より, $f^{\tilde{\mu}}$ は, Bers 境界に存在している. 結論をまとめる :

Theorem 5.2 (M.)
ある無限型 Riemann 面 S の Bers 境界には, David Fuchs b 群が存在する.

6 三次元双曲空間への拡張を目指して

6.1 擬等角写像の Douady-Earle 拡張

擬等角写像 $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が与えられたとき $\hat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ とみなすことで, これを, $\mathbb{H}^3$ の同相写像に拡張することができる. まずそれについて紹介する.

Definition 7 ((一様) 擬等長写像)
$f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ が, 次の条件: ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して,

- 任意の $x, y \in \mathbb{H}^3$ に対して,

$$\frac{1}{c_1}d_h(x,y) - c_2 \leq d_h(f(x), f(y)) \leq c_1 d_h(x,y) + c_2$$

- 任意の $z \in \mathbb{H}^3$ に対して, ある $x \in \mathbb{H}^3$ が存在して, $d(f(x), z) \leq c_2$ が存在する.

を満たすとき, (c_1, c_2)-**擬等長写像** という.

Theorem 6.1 (Douady-Earle, Tukia [**?**])
擬等長写像 $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ は, $\partial\mathbb{H}^3$ に擬等角写像拡張をもつ. また, 擬等角写像 $g : \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3$ は, $\mathbb{H}^3$ に擬等長写像を持つ.
特に, 擬等角写像の拡張として $PSL(2;\mathbb{C})$ の離散部分群同変性を保つ擬等長写像に拡張 (Douady-Earle 拡張) できる.

そこで, David map を $\mathbb{H}^3$ に拡張したいとき, その拡張先の写像のクラスは何が適切なのか？また, 拡張できない David map が存在するのかという問題を考える．今, 擬等角写像, David map, 擬等長写像の三つの関係性は次のようになっている:

$$\begin{tikzcd} \text{擬等角写像} \arrow[r, dashed, "\text{退化}"] \arrow[d, "\text{D.E. 拡張}"] & \text{David map} \arrow[d, "\text{D.E. 拡張？}"] \\ \text{擬等長写像} \arrow[r, dashed, "\text{退化?}"] & ??? \end{tikzcd}$$

この “???” の部分を考察するのが以下の目標になる.

6.2 局所一様擬等長写像

Definition 8 (局所一様擬等長写像)
$f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ が, 次の条件: ある連続写像 $c_1, c_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在して,

- 任意の $x, y \in \Delta(0; r)$ に対して,

$$\frac{1}{c_1(r)} d_h(x, y) - c_2(r) \leq d_h(f(x), f(y)) \leq c_1(r) d_h(x, y) + c_2(r)$$

- 任意の $z \in \Delta(0; r)$ に対して, ある $x \in \mathbb{H}^3$ が存在して, $d(f(x), z) \leq c_2(r)$ が存在する.

を満たすとき, (c_1, c_2)-**局所一様擬等長写像** という.

Remark
つまり, $\mathbb{H}^3$ (の球面モデル) の中心 0 から, 距離 r 離れたところでは, $(c_1(r), c_2(r))$-擬等長写像になっているものを考えている.

これについて, 次を示した.

Proposition 2 (M.)
$c_1, c_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が次の条件:

$$c_1(r) = o(\sqrt[6]{r}), \quad c_2(r) = o(\sqrt[6]{r})$$

を満たすならば, (c_1, c_2)-局所一様擬等長写像 は, $\partial\mathbb{H}^3$ に同相拡張をもつ.

証明について, 簡単に述べる．まず, $\mathbb{H}^3$ の擬等長写像が無限遠境界 $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像を誘導することを見てみる．このことは, “グロモフ双曲性” によって証明される ([BP])．これは, グロモフ積と呼ばれる関数がある不等式を持つことが本質である．グロモフ積は, 双曲空間の境界のある種の剛性を表している.

そこで, 無限遠境界では, 擬等長写像の振る舞いがワイルドになる $<$ 無限遠境界での双曲空間の剛性という関係性が成り立てば良い．そのワイルドさと無限遠境界での双曲空間の剛性とが同じ不等式を満たし続ければ良い.

References

[AIM] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin, Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane, Princeton University Press, 2009.

[Ahl] Lars V. Ahlfors, C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard, Lectures on Quasiconformal Mappings Second Edition（American Mathematical Society, 2006）

[Ber] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups, I, Ann. of Math. **91** (1970), 570–600.

[BP] R. Benedetti and C. Petronio, Lectures on Hyperbolic Geometry, Universitext, Springer (1992)

[Dav] G. David, Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\| = 1$, Acta Math. **173**(1994) 37–60.

[1] DET A. Douady and C. J. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms os the circle. Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[Gar] Frederick. P. Gardiner, Teichmüller Theory and quadratic differentials John Wiley and Sons, 1987

[Hub] J. H. Hubbard, Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics. Vol. 1. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006.

[IT] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, An introduction to Teichmüller spaces, Springer − Verlag, Tokyo, 1992.

[McM] C. McMullen, Cusps are dense, Ann of Math. (2) **133** (1991), no. 1, 217–247.

[Wol] S. A. Wolpert, The length spectra as moduli for compact Riemann Surfaces, Ann. of Math. (2), **109** (1979), 323–351.