

Iwasawa-type formula for \mathbb{Z}_p^d -covers of links in homology 3-spheres

舘野 荘平 (名古屋大学)*

Abstract

本稿では、数論トポロジーと呼ばれる代数的整数論と低次元トポロジーの類似を考察する分野に関する研究成果を報告する。特に、ホモロジー3球面に関するCuoco–Monsky型公式を \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆まで含めた形で証明し、 \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆の構成法を解説する。最後に、講演では割愛した、主結果のAlexander多項式に関する仮定がどういう意味を持つかについて論じる。この研究はお茶の水女子大学の植木潤氏との共同研究であり、本稿は2023年12月に東京女子大学で開かれた研究集会「結び目の数理VI」の報告集の記事である。

p を素数とし固定する。有限生成アーベル群 G に対し、 $e(G)$ を G の振れ部分の位数の p 冪部分を表す物とする。例えば

- $e(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) = 2,$
- $e(\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z}) = 7$
- $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^5\mathbb{Z}) = 5$

である。

1 歴史的背景

昨年度の報告集でも書いたが、数論の歴史的背景が今回の一連の研究において重要なのでここで再度記しておく。 \mathbb{Q} の有限次拡大体を代数体と呼ぶ。各代数体 k に対し、イデアル類群 $Cl(k)$ と呼ばれる位数有限のアーベル群が定まる。 $h(k) := \#Cl(k)$ は重要な代数的不変量であり、類数と呼ばれる。

定理 1.1 (Kummer, 1847). ξ_p を1の p 冪乗根とする。この時、 $p \neq 2$ かつ $p \nmid h(\mathbb{Q}(\xi_p))$ ならば、フェルマーの最終定理は $n = p$ で正しい。

Kummerは上記の定理を証明し、類数の重要性を世に周知した。しかし一般に、類数の計算は難しく、素数などと同様にその規則性を知る事は難しい。例えば、類数1を持つ代数体(特に実二次体)が無数個あるのかを問うGauss予想と呼ばれる予想さえ現在においても未解決である。また、Kummerの結果によりフェルマー予想に関する残された問題が p が円分体の類数を割り切るケースだったため、「 p が代数体の類数をどの程度割り切るのか」ということにも人々の関心は集まっていたはずである。岩澤は1959年に「岩澤類数公式」と呼ばれる以下の定理を証明した。

定理 1.2 (Iwasawa, 1959, [5]). \mathbb{Z}_p を p 進整数環とする。 k_∞/k を代数体の \mathbb{Z}_p -拡大とし、 k_{p^n} を \mathbb{Z}_p の部分群 $p^n\mathbb{Z}_p$ に対応する部分体とする。この時、 k_∞/k のみに依存する不変量 $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\nu \in \mathbb{Z}$ があって、十分大きな全ての $n \geq 0$ に対して

$$e(Cl(k_{p^n})) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
e-mail: inu.kaimashita@gmail.com

2020 Mathematics Subject Classification: 11R23, 57K10.

Keywords: arithmetic topology, Iwasawa theory, Alexander-Fox theory.

となる.

3節で p 進整数環 \mathbb{Z}_p の定義を述べるが, \mathbb{Z}_p -拡大とは k_∞/k のガロア群が加法群 \mathbb{Z}_p となるような拡大の事である. これは整合的な $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -拡大の列を考えるのと同じ事である. 例えば, ξ_{p^n} を原始 p^n 乗根とすれば

$$\mathbb{Q}(\xi_p) \subset \mathbb{Q}(\xi_{p^2}) \subset \mathbb{Q}(\xi_{p^3}) \subset \dots \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}(\xi_{p^n})$$

は \mathbb{Z}_p -拡大である. 位相幾何学では $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ としてこの記号が用いられる事もあるが, 本稿では $\mathbb{Z}_p \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ なので注意が必要である.

定理1.2の μ, λ, ν は岩澤不変量と呼ばれる. 定理1.2は系列的な代数体の類数のある種の規則性を統一的に記述する最初の公式であり, 円分体の類数の p 冪部分に関する定理でもある.

一方, この定理の結び目理論側の類似である以下の定理がHillman, Matei, 森下の3名により S^3 の場合で示され, 門上, 水澤の2名により2008年に有理ホモロジー3球面の場合に拡張され, さらに植木により \mathbb{Z} -被覆由来でない $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -分岐被覆の列の場合に拡張されている.

M を向き付け可能な閉連結3次元多様体とする. 全ての $i \geq 0$ に対して $H_i(M, \mathbb{Q}) \cong H_i(S^3, \mathbb{Q})$ となる時, M を有理ホモロジー3球面と呼び, QHS^3 と書く. 類数が有限であったように, $H_1(M, \mathbb{Q})$ の位数も有限となる事がわかるので, QHS^3 は代数体の類似と見る事ができる.

定理 1.3 (Hillman–Matei–Morishita, 2006, [4], Kadokami–Mizusawa, 2008, [7], Ueki, 2017, [18]). L を QHS^3 内の絡み目とする. $M_{p^n} \rightarrow M$ を L に沿った整合的な $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -分岐被覆の列とする. 全ての M_{p^n} が QHS^3 であると仮定する. この時, $(M_{p^n} \rightarrow M)_n$ のみに依存する不変量 $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\nu \in \mathbb{Z}$ があって十分大きな全ての $n \geq 0$ に対して

$$e(H_1(M_{p^n})) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

となる.

この定理は岩澤類数公式がほとんどそのままの形で絡み目側に現れ, とても興味深い. 一方, 再び数論側に戻るが, 1981年にCuocoとMonskyは岩澤類数公式の一般化である以下の定理を証明した. d を正整数とする.

定理 1.4 (Cuoco–Monsky, 1981, [2]). k_∞/k を代数体の \mathbb{Z}_p^d -拡大とし, k_{p^n} を \mathbb{Z}_p^d の部分群 $(p^n\mathbb{Z}_p)^d$ に対応する部分体とする. この時, k_∞/k のみに依存する不変量 $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって, $n \rightarrow \infty$ で

$$e(Cl(k_{p^n})) = (\mu p^n + \lambda n + O(1))p^{(d-1)n}$$

となる. ここで O はランダウ記号である.

この定理は \mathbb{Z}_p -拡大から一般の \mathbb{Z}_p^d -拡大に岩澤類数公式を一般化した物であるが, ランダウ O 記号を用いて, Greenbergはこの $O(p^{(d-1)n})$ 部分も有理数係数の多項式 $f(U, V)$ を用いて $f(p^n, n)$ で書けると予想している. このCuoco–Monskyの定理の絡み目版を考える事により, このGreenbergの予想はホモロジー3球面内の絡み目の場合においては正しいというのが今回の我々の主結果である. 整合的な $(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p)^d$ -被覆の列を \mathbb{Z}_p^d -被覆と呼ぶが, 昨年度の報告集では, 絡み目の成分数 c と d が等しくなっておかつ考える \mathbb{Z}_p^d -被覆が \mathbb{Z}^d -被覆由来の時について正しい, という事を記した. 今回は c と d が異なる場合や \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆についても示せたので, その証明と, \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆の具体的な構成法を続く節で述べる.

1.1 主結果

この節では我々の主結果を述べ、証明を与える。まず、数論のために発展したMonskyによる以下の近似理論が主結果の証明の鍵となるので説明する。 W を p 乗根全体の集合とし、 E_d を \mathbb{Z}_p -加群 $\text{Hom}(W^d, W)$ を表す物とする。

定義 1.5. $S \subset W^d$ は、以下の3つの型の条件の有限個の組み合わせで定義される W^d の部分集合の和集合として表される時、半代数的集合と呼ばれる。

- i) $\tau(\zeta) = \xi$,
- ii) $\tau(\zeta) \neq \xi$,
- iii) $\log_p |\langle \tau(\zeta) \rangle| \geq \log_p |\langle \tau'(\zeta) \rangle| + r$.

ここで、 $\tau, \tau' \in E_d, \xi \in W, r \in \mathbb{Z}$ である。

$\Lambda_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ をローラン多項式環、 $\Lambda := \mathbb{Z}[[T_1, \dots, T_d]]$ を形式的冪級数環とする。この時、環準同型写像

$$\Lambda_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})[t_1^{\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}, \dots, t_d^{\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}] \cong \Lambda$$

で $t_i \in \Lambda_{\mathbb{Z}}$ を $1 + T_i \in \Lambda$ に送る物が存在する。この写像により、 $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ の元を Λ の元と自然に見なす事ができ、数論側の理論を絡み目理論側の対象に適応する事ができる。

v で p 進付値を表す物とする。厳密には、 v は p 進数体 \mathbb{Q}_p の固定された代数閉包から \mathbb{Q} への写像で $v(p) = 1$ となるように正規化された物(なおかつ $v(0) = 0$ というあまり一般的でない約束をした物)であるが、代数的整数論に踏み込んだ説明が必要になるためここでは $v(a)$ で「 a が p で何回割り切れるか」という事を表していると理解して頂きたい。 $W(n)$ で p^n 乗根全体の集合を表す物とする。

命題 1.6 ([8, 定理5.6]). $S \subset W^d$ を半代数的集合とし、 F を Λ の元とする。この時 $f(U, V) \in \mathbb{Q}[U, V]$ で $\deg_V f \leq 1$ かつ総次数が $\deg f \leq d$ となる物が唯一つ存在し、十分大きな全ての n に対して

$$\sum_{\zeta \in S \cap W(n)^d} v(F(\zeta - 1)) = f(p^n, n)$$

となる。

次に、主結果の証明の根幹をなすMayberry–MurasugiとPortiの結果について説明する。

M を向き付け可能な閉連結3次元多様体とする。全ての $i \geq 0$ に対して $H_i(M) \cong H_i(S^3)$ となる時、 M をホモロジー3球面と呼び、 ZHS^3 と書く。 M を ZHS^3 、 $L = \sqcup_i K_i$ を M 内の c 成分絡み目、 $N(L)$ を L の開管状近傍、 X を補空間 $M \setminus N(L)$ と置く。 $\Delta_L(t_1, \dots, t_c) \in \Lambda_{\mathbb{Z}}$ を L のAlexander多項式とする。 G を有限アーベル群とし、 $\pi : \pi_1(X) \rightarrow G$ を群全射準同型写像とする。 M_{π} を L に沿った $\ker \pi$ に対応する M の分岐被覆とする。

$$\widehat{G} := \{ \xi : G \rightarrow \mathbb{C}^* \mid \xi \text{ は群準同型写像} \}$$

で G のPontryagin双対を表すとする。メリディアン $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in H_1(X)$ 。任意の $\xi \in \widehat{G}$ に対して、 $L_{\xi} := \bigcup_{\xi(\pi(\alpha_i)) \neq 1} K_i$ を L の部分絡み目とし、 $\Delta_{L_{\xi}}(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ を L_{ξ} のAlexander多項式とする。自明な表現 $G \rightarrow \mathbb{C}^*$ に対しては $L_1 = \emptyset$ とする。 $\Delta_{L_1} := 1$ と置き、

$$\widehat{G}^{(1)} := \{ \xi \in \widehat{G} \mid \text{ある } 1 \leq i \leq d \text{ に対して } L_{\xi} = K_i \}.$$

と置く. 任意の $\xi \in \widehat{G}^{(1)}$ に対して, $i(\xi)$ が対応する i を表すとする.

$$|H_1(M_\pi)| := \begin{cases} \#H_1(M_\pi) & \#H_1(M_\pi) \text{ が有限の時} \\ 0 & \#H_1(M_\pi) \text{ が無限の時} \end{cases}$$

と置く.

命題 1.7 ([6, 定理10.1], [10, 定理1.1]).

$$|H_1(M_\pi; \mathbb{Z})| = \pm \frac{|G|}{\prod_{\xi' \in \widehat{G}^{(1)}} (1 - \xi'(\pi(\alpha_{i(\xi')})))} \prod_{\xi \in \widehat{G}} \Delta_{L_\xi}(\xi(\pi(\alpha_{i_1})), \dots, \xi(\pi(\alpha_{i_k})))$$

である.

最後に, Torres条件と呼ばれる以下の定理を紹介する. Monskyによる近似理論, Mayberry–MurasugiとPortiの結果, そしてこのTorres条件を組み合わせる事によって主結果の証明が得られる.

命題 1.8 (Torres条件, [16], [1]).

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_{c-1}, 1) = \begin{cases} \frac{t_1^{l_1} - 1}{t_1^{l_1 - 1}} & c = 2 \\ (t_1^{l_1} \cdots t_{c-1}^{l_{c-1}} - 1) \Delta_{L'}(t_1, \dots, t_{c-1}) & c > 2, \end{cases}$$

となる. ここで $L' = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_{c-1}$ であり $l_i := \text{lk}(K_i, K_c)$ である.

定理 1.9. L を $\mathbb{Z}\text{HS}^3$ M 内の c 成分絡み目で $c \geq d$ となる物とする. $X := M \setminus N(L)$ と置く. $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ を \mathbb{Z}_p^d -被覆とし, M_{p^n} を X_{p^n} のFox完備化とする. $\Delta_L(t_1, \dots, t_c)$ が $(W \setminus \{1\})^c$ で消えないと仮定する. この時, 全ての $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ -被覆 M_{p^n} は $\mathbb{Q}\text{HS}^3$ となり, ある $f(U, V) \in \mathbb{Q}[U, V]$ で $\deg_V f \leq 1$ かつ総次数が $\deg f \leq d$ となる物が唯一つあって, 十分大きな全ての n に対して

$$e(H_1(M_{p^n})) = f(p^n, n)$$

となる. U^d と $U^{d-1}V$ の係数は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に含まれる.

つまり, ある $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mu_1, \dots, \mu_{d-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \nu \in \mathbb{Q}$ があって, 十分大きな全ての n に対して,

$$e(H_1(M_{p^n})) = \mu p^{dn} + \lambda n p^{(d-1)n} + \mu_1 p^{(d-1)n} + \lambda_1 n p^{(d-2)n} + \dots + \mu_{d-1} p^n + \lambda_{d-1} n + \nu.$$

となる.

定理1.9は, 代数体の \mathbb{Z}_p^d -拡大に対するGreenbergの予想が絡み目側では $\mathbb{Z}\text{HS}^3$ で成り立つという事を表している.

Proof. Δ_L が $(W \setminus \{1\})^c$ で消えないので, $\Delta_{L'}$ もまたTorres条件(補題1.8)により $(W \setminus \{1\})^{c(L')}$ で消えない.

$\tau: \mathbb{Z}^c \rightarrow \mathbb{Z}_p^d$ を全射群準同型 $\mathbb{Z}_p^c \rightarrow \mathbb{Z}_p^d$ を誘導する与えられた \mathbb{Z}_p^d -被覆に対応する群準同型写像とする. $\mathbf{v}_i := \tau(\alpha_i)$ と置く. この時 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c$ は \mathbb{Z}_p^d を生成する. 各 $n \geq 1$ に対して, τ_n が τ と自然な全射群準同型 $\mathbb{Z}_p^d \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ の合成写像を表すとする. $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{id})$ の時,

$$\zeta^{(v_{i1}, \dots, v_{id})} := \zeta_1^{v_{i1}} \cdots \zeta_d^{v_{id}}.$$

と置く. 補題1.7より,

$$\begin{aligned} |H_1(M_{p^n})| &= \pm \frac{|G|}{\prod_{\xi' \in \widehat{G}(1)} (1 - \xi'(\tau_n(\alpha_{i(\xi')})))} \prod_{\xi \in \widehat{G}} \Delta_{L_\xi}(\xi(\tau_n(\alpha_{i_1})), \dots, \xi(\tau_n(\alpha_{i_k}))) \\ &= \pm \frac{p^{dn}}{\prod_{i=1}^c \prod_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_i} \neq 1 \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \neq i)}} (1 - \zeta^{v_i})} \prod_{L' \subset L} \prod_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_j} \neq 1 (j \in \{i_1, \dots, i_{c(L')}\}) \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \notin \{i_1, \dots, i_{c(L')}\})}} \Delta_{L'}(\zeta^{v_1}, \dots, \zeta^{v_c}) \end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} e(H_1(M_{p^n})) &= v \left(\pm \frac{p^{dn}}{\prod_{i=1}^c \prod_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_i} \neq 1 \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \neq i)}} (1 - \zeta^{v_i})} \prod_{L' \subset L} \prod_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_j} \neq 1 (j \in \{i_1, \dots, i_{c(L')}\}) \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \notin \{i_1, \dots, i_{c(L')}\})}} \Delta_{L'}(\zeta^{v_{i_1}}, \dots, \zeta^{v_{i_{c(L')}}}) \right) \\ &= v(p^{dn}) - v \left(\prod_{i=1}^c \prod_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_i} \neq 1 \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \neq i)}} (1 - \zeta^{v_i}) \right) + \sum_{L' \subset L} \sum_{\substack{\zeta \in W(n)^d \\ \zeta^{v_j} \neq 1 (j \in \{i_1, \dots, i_{c(L')}\}) \\ \zeta^{v_j} = 1 (j \notin \{i_1, \dots, i_{c(L')}\})}} v(\Delta_{L'}(\zeta^{v_{i_1}}, \dots, \zeta^{v_{i_{c(L')}}})). \end{aligned}$$

となる. $W^d \ni (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \rightarrow \zeta^{v_i} \in W$ は $\text{Hom}(W^d, W)$ の元なので, 半代数的集合の定義により, 各 $1 \leq i \leq c$ に対して, $\{\zeta \in W^d \mid \zeta^{v_j} \neq 1 (j \in \{i_1, \dots, i_{c(L')}\}), \zeta^{v_j} = 1 (j \notin \{i_1, \dots, i_{c(L')}\})\}$ と $\{\zeta \in W^d \mid \zeta^{v_i} \neq 1, \zeta^{v_j} = 1 (j \neq i)\}$ は半代数的集合である. よって, 補題1.6より, $g(U, V), h(U, V) \in \mathbb{Q}(U, V)$ で $\deg_V g, \deg_V h \leq 1$ かつ $\deg g, \deg h \leq d$ となるような物が唯一存在して

$$e(H_1(M_{p^n})) = dn - h(p^n, n) + g(p^n, n)$$

となる. $f(U, V) := dV - h(U, V) + g(U, V)$ と置けばよい. □

2 \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆の例

定理1.9は先に述べた通り昨年度の報告集に記した結果の拡張であり, 具体例に関してはそちらを参照して頂きたい. この節では \mathbb{Z}^d -被覆由来でない \mathbb{Z}_p^d -被覆の構成法を記す.

まず \mathbb{Z}^d -被覆由来である \mathbb{Z}_p^d -被覆の正確な定義を述べる.

定義 2.1. \mathbb{Z}_p^d -被覆 $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$, つまり, 群準同型写像の列 $(\tau_n : \pi_1(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d)_n$ で各 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\tau_{n+1}} & (\mathbb{Z}/p^{n+1} \mathbb{Z})^d \\ & \searrow \tau_n & \downarrow \\ & & (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d \end{array}$$

が可換となる物が与えられているとする. ある群準同型写像 $\pi : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ で

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}^d \\ & \searrow \tau_n & \downarrow \\ & & (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d \end{array}$$

が可換となる時, $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ は \mathbb{Z}^d -被覆由来である \mathbb{Z}_p^d -被覆と呼ばれる. ここで, 縦の射は全て自然な群準同型写像である.

次に p 進整数環 \mathbb{Z}_p の定義を述べる.

定義 2.2. 自然な環準同型写像の列

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{\varphi_2} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{\varphi_3} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{\dots} \dots$$

を考える. $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{ \{a_n\}_n \in \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \varphi_n(a_n) = a_{n-1} \}$ は可換環をなし p 進整数環と呼ばれる.

例 2.3. $p = 5$ とする. $a = (2, 7, 57, \dots) \in \mathbb{Z}_5$ という元を考える.

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ 7 &= 2 + 1 \cdot 5 \in \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \\ 57 &= 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 \in \mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z} \\ &\dots \end{aligned}$$

という風になっており, a の要素は逆極限の定義に合うようになっている. $1 = (1, 1, \dots)$ は \mathbb{Z}_5 の単位元であるので,

$$-1 = (-1, -1, \dots) = (4, 24, 124, \dots) = (2^2, 7^2, 57^2, \dots) = (2, 7, 57, \dots)^2 = a^2$$

となる. 従って, $a = \sqrt{-1} \in \mathbb{Z}_5$ である. より正確には, 可換環論の Hensel の補題と呼ばれる定理を用いれば「...」の部分で $a = \sqrt{-1} \in \mathbb{Z}_5$ が成り立つように整合的に続く物が存在する事が保証される. $L := K_1 \sqcup K_2, X := S^3 \setminus N(L), \alpha_1, \alpha_2 : K_1, K_2$ のメリディアンとする. $\tau : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_5$ を $\alpha_1 \mapsto 1, \alpha_2 \mapsto \sqrt{-1}$ となる物として定義する.

$$\tau_n : \pi_1(X) \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}_5 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}$$

X_{5^n} を $\ker \tau_n$ に対応する X の被覆空間とする. この時 $(X_{5^n} \rightarrow X)_n$ は \mathbb{Z}_5 -被覆をなす. この被覆はどの \mathbb{Z} -被覆由来でもない. 実際, もしそうだとすると, 各 n に対して整合的な可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \searrow \tau_n & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z} \end{array}$$

が得られる事になる. これは可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \searrow \tau & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}_5 \end{array}$$

を誘導するが, $\text{im } \tau \cong \mathbb{Z}^2$ である事に矛盾する.

このように, \mathbb{Z} -被覆由来でない \mathbb{Z}_p -被覆という物は存在する.

絡み目理論では, メリディアンを \mathbb{Z} の元にする事により \mathbb{Z} -被覆を構成する事が多いと思う(例えば全て 1 に送るのは全絡み数 \mathbb{Z} -被覆と呼ばれる)が, \mathbb{Z}_p を考える事の

メリットは $\sqrt{-1}$ などの整数の範囲外の元にメリディアンを送る事が可能になる事により上記の例のような複雑な \mathbb{Z}_p -被覆なども統一的に扱えるという所である。

位相幾何学で実際に出てくる \mathbb{Z}_p -被覆に対して網羅的に調べようとした時に数論で生まれ発展した概念である \mathbb{Z}_p も用いる必要があるというのはとても興味深い事だと思う。

\mathbb{Z}_p^d -被覆に関しても同様の事が言えるのが以下の例から分かる。

例 2.4. $L = K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3, X := S^3 \setminus N(L)$ とする. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : K_1, K_2, K_3$ のメリディアンとする. $\tau : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ を $\alpha_1 \mapsto (1, 0), \alpha_2 \mapsto (\sqrt{-1}, 0), \alpha_3 \mapsto (0, 1)$ で定義する.

$$\tau_n : \pi_1(X) \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}_5^2 \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^2$$

X_{5^n} を $\ker \tau_n$ に対応する空間とすれば, 上と全く同様にして $(X_{5^n} \rightarrow X)_n$ は \mathbb{Z}^2 -被覆由来でない \mathbb{Z}_5^2 -被覆をなす事が分かる.

3 主定理のAlexander多項式の仮定について

定理1.9の主張にはAlexander多項式が消えるかどうかの仮定の条件が含まれるが, この節では講演では割愛した内容ではあるがこの条件がどういう意味を持つのかについて考察して行きたい.

まず第一に, 実は絡み目の \mathbb{Z}_p -被覆内での分解法則と関係がある事が以下の命題により分かる.

命題 3.1 (T.-Ueki, [15]). M を $\mathbb{Z}\text{HS}^3$, $L = \sqcup_i K_i$ を M 内の c 成分絡み目とし, $X = M \setminus N(L)$ と置く. $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ を \mathbb{Z}_p^d -被覆とし, $(M_{p^n} \rightarrow M)_n$ をそのFox完備化により得られる分岐 \mathbb{Z}_p^d -被覆とする. Alexander多項式 $\Delta_L(t_1, \dots, t_c)$ が W^c で消えない時, L は $(M_{p^n} \rightarrow M)_n$ において分解しない.

Proof. 対偶により示す. L が分解しないと仮定する. この時, 絡み目のヒルベルト分岐理論([9, Section 5.1], [18]を参照)より, ある $1 \leq i < j \leq c$ があって $p \mid \text{lk}(K_i, K_j)$ となる. ここで, $i = 1, j = c$ と仮定しても一般性を失わない. よって $p \mid l_1$ である. $m \in \mathbb{Z}$ を $p^m \mid l_1$ かつ $p^{m+1} \nmid l_1$ な物とし, ξ_{p^m} を1の原始 p^m 乗根とする. この時 $\xi_{p^m}^{l_1} = 1$, つまり, $\xi_{p^m}^{l_1} - 1 = 0$ となる. Torres条件(補題1.8)により, これは

$$\Delta_L(\xi_{p^m}, 1, \dots, 1) = 0.$$

となる事を意味する. 従って $\Delta_L(t_1, \dots, t_c)$ は W^c で消える. □

絡み目の分解法則が分かるとどのような事が言えるだろうか. 分岐被覆と不分岐被覆の1次ホモロジー群の大きさの差についてはHartley, Mayberry, Murasugi, 作間らの研究[3], [6], [12]が知られている. Hartley-Murasugiの結果[3, Lemma 2.8]を使って, $\mathbb{Q}\text{HS}^3$ 内の絡み目の分岐 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ -被覆と不分岐 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ -被覆を比較する以下の定理を示す.

定理 3.2 (T.-Ueki, [15]). M を $\mathbb{Q}\text{HS}^3$, $L = \sqcup_i K_i$ を M 内の c 成分絡み目とし, $X = M \setminus N(L)$ と置く. $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ を \mathbb{Z}_p^d -被覆とし, $(M_{p^n} \rightarrow M)_n$ をそのFox完備化により得られる分岐 \mathbb{Z}_p^d -被覆とする. L が $(M_{p^n} \rightarrow M)_n$ において分解しないと仮定する. この時

$$e(H_1(M_{p^n})) = e(H_1(X_{p^n})) + O(n)$$

となる.

補題 3.3 (Hartley–Murasugi, [3, 補題2.8]). M, L, X を上の通りとする. $a_1, \dots, a_c \in \mathbb{Z}$ に対して, 以下は同値である.

(i) $H_1(M)$ の中で $\sum_{i=1}^c a_i K_i = 0$ である.

(ii) 群準同型写像 $\varphi: H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ で各 $1 \leq i \leq c$ に対して $\varphi(\alpha_i) = a_i$ となる物が存在する.

補題 3.4 (T.–Ueki, [15]). M, L, X を上の通りとする. 各 i に対し, V_i を K_i の閉管状近傍とする. この時アーベル群の自然な完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(M) \rightarrow 0$$

が存在する. ここで, A はメリディアンで生成される $H_1(X)$ の部分群である.

Proof. $H_2(M) \cong H_1(M)_{\text{free}} = 0$ かつ $M = X \cup \bigcup_{i=1}^c V_i$ より, Mayer–Vietoris完全列

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^c H_1(\partial V_i) \rightarrow H_1(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^c H_1(V_i) \rightarrow H_1(M) \rightarrow 0.$$

を得る. $H_1(V_i)$ はロンジチュードで生成され, なおかつ $H_1(\partial V_i)$ はメリディアンとロンジチュードの両方で生成されるので, この完全列は求めるべき完全列を誘導する. \square

Proof of 定理3.2. 補題3.4より, 自然な完全列

$$0 \rightarrow A_{p^n} \rightarrow H_1(X_{p^n}) \rightarrow H_1(M_{p^n}) \rightarrow 0$$

を得る. ここで, A_{p^n} は $H_1(X_{p^n})$ の \mathbb{Z} -部分加群で L の逆像の成分のメリディアンで代表される元で生成される物である. $\alpha_1, \dots, \alpha_c \in H_1(X)$ をそれぞれ K_1, \dots, K_c のメリディアンとする. 完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(M) \rightarrow 0,$$

を考える. ここで A は $\alpha_1, \dots, \alpha_c$ で生成される $H_1(X)$ の部分群である. $H_1(M)$ が $\mathbb{Q}HS^3$ なので, 各 $1 \leq i \leq c$ に対し, ある $a_i \geq 0$ があつて $H_1(M)$ の中で $a_i K_i = 0$ となる. よつて, 補題3.3((i) \Leftrightarrow (ii))より, ある群準同型写像 $\varphi_i: H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ があつて

$$\varphi_i(\alpha_j) = \begin{cases} a_i & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

となる. 行が完全な可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{p^n} & \longrightarrow & H_1(X_{p^n}) & \longrightarrow & H_1(M_{p^n}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \psi_{p^n} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & H_1(M) \longrightarrow 0. \end{array}$$

を考える. K を M_{p^n} 内の結び目である K_i の上に乗っている物とし, α を K のメリディアンとする. この時, $(\varphi_i \circ \psi_{p^n}): H_1(X_{p^n}) \rightarrow \mathbb{Z}$ は群準同型写像で

$$(\varphi_i \circ \psi_{p^n})(\alpha) = \varphi_i(e_i \alpha_j) = e_i \varphi_i(\alpha_j) = \begin{cases} e_i a_i & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

となる. ここで e_i は $M_{p^n} \rightarrow M$ での K_i の分岐指数である. 再び, 補題3.3(i) \Leftrightarrow (ii) より, $H_1(M_{p^n})$ の中で $e_i a_i K = 0$ となる. $(\pi_1(X) : \pi_1(X_{p^n})) = p^{dn}$ なので, 絡み目のヒルベルト分岐理論([9, Section 5.1], [18]を参照)より, $a = \max\{a_1, \dots, a_c\}$ と置けば, $H_1(M_{p^n})$ の中で $p^{dn} a K = 0$ とならざるを得ない. また, 仮定より L は $M_{p^n} \rightarrow M$ の中で分解しないので, $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(H_1(X_{p^n})) = O(1)$ となる. 従って,

$$e(H_1(M_{p^n})) = e(H_1(X_{p^n})) + O(n)$$

となる. □

定理3.2と命題3.1により, Alexander多項式が W^c で消えないという条件下では, 分岐 $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ -被覆と不分岐 $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ -被覆の1次ホモロジー群の大きさの差は定理1.9の主張に出てくる岩澤 μ, λ 不変量に影響を及ぼさない程度に十分小さい事が分かる. 以下で述べる不分岐被覆の1次ホモロジー群に関するCuoco–Monsky型の公式と組み合わせると, μ, λ 不変量がAlexander多項式, 特に以下で定義する被約Alexander冪級数を用いて計算できる事が分かる.

$d \geq 2$ とする. X を $\mathbb{Q}HS^3$ 内の c 成分絡み目 $L = \sqcup_i K_i$ の開管状近傍の補空間とし, 各 $i = 1, \dots, c$ に対して $\alpha_i \in \pi_1(X)$ を K_i のメリディアンとする. $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ を群準同型写像 $\tau : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_p^d$ に対応する \mathbb{Z}_p^d -被覆とする. $\tau(\alpha_i) = (v_{i1}, \dots, v_{id}) \in \mathbb{Z}_p^d$ と置いた時, Λ の元

$$\widehat{\Delta}_\tau(T_1, \dots, T_d) = \Delta_L((1 + T_1)^{v_{11}} \cdots (1 + T_d)^{v_{1d}}, \dots, (1 + T_1)^{v_{c1}} \cdots (1 + T_d)^{v_{cd}})$$

を $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ の被約Alexander形式的冪級数と言う.

$F \in \Lambda$ に対して定義される岩澤 $\mu(F)$, $\lambda(F)$ 不変量に関しては今年の報告集[14]で定義したのでそちらを参照して頂きたい. $W := \{\xi - 1 \mid \xi \in W\}$ と置く.

定理 3.5 (T.—Ueki, [15]). M を $\mathbb{Q}HS^3$, L を M 内の絡み目とし, $X = M \setminus N(L)$ と置く. $(X_{p^n} \rightarrow X)_n$ を群準同型写像 $\tau : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_p^d$ に対応する \mathbb{Z}_p^d -被覆とし, 被約Alexander形式的冪級数 $\widehat{\Delta}_\tau(T_1, \dots, T_d)$ が W^d で消えないとする. この時

$$e(H_1(X_{p^n})) = (\mu(\widehat{\Delta}_\tau)p^n + \lambda(\widehat{\Delta}_\tau)n + O(1))p^{(d-1)n}.$$

となる.

以下の定理の(1)は今年の講演や報告集で述べた結果である. 定理3.5と定理3.2と命題3.1を組み合わせる事により(2)が得られる.

定理 3.6 (T.—Ueki, [15]). 定理1.9と同様の状況とする.

- (1) $c = d$ ならば, $\mu = \mu(\Delta_L)$ かつ $\lambda = \lambda(\Delta_L)$ となる.
- (2) Alexander多項式 $\Delta_L(t_1, \dots, t_c)$ が W^c で消えないのであれば, 被約Alexander形式的冪級数 $\widehat{\Delta}_\tau(T_1, \dots, T_d)$ もまた W^d で消えず, $\mu = \mu(\widehat{\Delta}_\tau)$ かつ $\lambda = \lambda(\widehat{\Delta}_\tau)$ となる.

上で「位相幾何学の情報を網羅的に知るためには \mathbb{Z} の枠を越えて \mathbb{Z}_p も考える必要があるのが興味深い」と述べたが, ここでも, \mathbb{Z}_p -被覆での1次ホモロジー群の成長度に関する情報を網羅的に知るために定義した被約Alexander形式的冪級数という概念がローラン多項式環 $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ の枠を越え Λ の元になっている事が興味深い. 今回の結び目の数理VIの植木潤氏の講演内容もそうであったが, \mathbb{Z} から \mathbb{Z}_p を構成するような操作として知られる「群の副有限完備化」が今後位相幾何学が向かう一つの方向性のように思う.

Λ は概念の導入時に述べたように完備群環と同型であるが, 完備群環についてはこれまで数論側で多くの研究が進められてきたので, 今回この報告集でMonskyの結果を用いて我々が主定理を示したように, 今後も分野の垣根を越えた応用が期待される.

謝辞

このような講演の機会を与えて下さった世話人の先生方、並びに、本稿を作成するにあたってコメントをして下さった植木潤さんに感謝申し上げます。

References

- [1] David Cimasoni, *Studying the multivariable Alexander polynomial by means of Seifert surfaces*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004), Special Issue, 107–115.
- [2] Albert A. Cuoco and Paul Monsky, *Class numbers in \mathbb{Z}_p^d -extensions*, Math. Ann. 255 (1981), no. 2, 235–258.
- [3] Richard Hartley and Kunio Murasugi, *Homology invariants*, Canadian J. Math. 30(1978), no.3, 655–670.
- [4] Jonathan Hillman, Daniel Matei, and Masanori Morishita, *Pro- p link groups and p -homology groups*, Primes and knots, 121–136, Contemp. Math., 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [5] Kenkichi Iwasawa, *On Γ -extensions of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), 183–226.
- [6] John P. Mayberry and Kunio Murasugi, *Torsion-groups of abelian coverings of links*, Trans. Amer. Math. Soc. 271(1982), no.1, 143–173.
- [7] Teruhisa Kadokami and Yasushi Mizusawa, *Iwasawa type formula for covers of a link in a rational homology sphere*, J. Knot Theory Ramifications, 17 (2008), no. 10, 1199–1221.
- [8] Paul Monsky, *On p -adic power series*, Math. Ann., 255 (1981), no. 2, 217–227.
- [9] Masanori Morishita, *Knots and primes*, An introduction to arithmetic topology. Universitext. Springer, London, 2012.
- [10] Joan Porti, *Mayberry-Murasugi’s formula for links in homology 3-spheres*, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), no. 11, 3423–3431.
- [11] Dale Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.
- [12] Makoto Sakuma, *Abelian coverings of links*, Master Thesis, Kobe University 1980, (in Japanese).
- [13] Sohei Tateno, *The Iwasawa invariants of \mathbb{Z}_p^d -covers of links*, Ph.D. thesis, Graduate School of Mathematics, Nagoya University, 2023.
- [14] Sohei Tateno, *The Iwasawa invariants of \mathbb{Z}_p^d -covers of links*, 2022年度結び目の数理V報告集.
- [15] Sohei Tateno and Jun Ueki, *The Iwasawa invariants of \mathbb{Z}_p^d -covers of links*, preprint. arXiv:2401.03258
- [16] Guillermo Torres, *On the Alexander polynomial*, Ann. Math. 57 (1953), 57–89.
- [17] Jun Ueki, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. 213 (2014), 21–39.
- [18] Jun Ueki, *On the Iwasawa invariants for links and Kida’s formula*, Internat. J. Math. 28 (2017), no. 6, 1750035, 30.