Profinite rigidity of the multivariable Alexander polynomials of links,

– a précis in Japanese –

Jun Ueki

Abstract

本稿は 2023 年 12 月に東京女子大学および Zoom で開催された研究集会「結び目の数理 VI」の報告集のために作成されたものです. We briefly report some results on the profinite rigidity of the multivariable Alexander polynomials of links in S^3 based on the preprint [MU23] that is a joint work with Biao Ma.

Contents

1. Introduction

素な結び目 K は補空間の基本群 π_K の同型類で決定されることが知られているが, その副有限完備化 $\widehat{\pi}_K = \varprojlim_{\Gamma \lhd \pi_K} \pi_K/\Gamma$ の同型類から K が決定されるかどうか, 言い換えると, π_K の商であるような有限群の同型類の全体から K が決定されるかどうかは, まだ幾つかの具体例に対してしか真であることが確かめられていない. 副有限完備化はアーベル化と可換なので, 2 つの結び目 J, K に対し副有限結び目群の同型 $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K$ があれば, Alexander 多項式の変数である π_J^{ab}, π_K^{ab} の生成元 s, t に対し, ある $v \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ が存在して $s \mapsto t^v$ となり, Alexander 多項式の諸性質と初等的な可換環論, Artin–Mazur の力学系ゼータ関数を用いて示される Fried の定理によって Alexander 多項式の等式 $\Delta_J(t) \doteq \Delta_K(t)$ が得られる. その証明の過程で得られる完備環の補題を用いて, Yi Liu は, 一般に有限体積を持つ双曲 3 次元多様体の体積がその基本群の副有限完備化の同型類から有限個の不定性を除き決定されることを示した (cf. [BF20, BR20, Rei18, Uek18, Uek21, Uek22, Liu23]).

3 次元多様体の性質の副有限剛性については, 近年 Oxford 大の幾何群論チームの若手たちが参入するなどして, 何本もの論文が書かれている. 状況を総括する研究集会が 2023 年 6 月に Madrid の ICMAT にて開催され, 問題集が作成された [BJZR23]. また筆者は Alan Reid 先生から, 結び目のある多変数多項式不変量の副有限剛性について, “Jun, maybe you can do it!” といって, 指差しウィンクを貰ってしまった. 多変数多項式となると技術的な難易度が大きく上がり, また初期設定に迷う部分も増える. そこでまずは準備研究として, 絡み目の多変数 Alexander 多項式の副有限剛性を調べることにした. さらなる個人的な背景として, 絡み目の多変数岩澤理論についての舘野氏との研究 [TU23] の進捗により技術的な準備が整ったこと, また Madrid に同時期に研究滞在していた Biao Ma 氏が著者の論文 [Uek18, Uek21] について熱心に訊ねてくれたことが挙げられる. 2 人には特段の感謝を述べたい. また Madrid に招待して下さった Andrei Jaikin-Zapirain 先生や Ian Agol ラボの面々にも大変感謝している.

2020 Mathematics Subject Classification Primary 57K10, 11R23; Secondary 57M10, 11S99
Keywords: link, Alexander polynomial, cyclic resultant, Casson–Lin type invariant, profinite rigidity
January 31, 2024 5:30pm

2. $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_L$ のとき

2 つの d 成分絡み目 J, L の群 π_J, π_L の間に同型 $\pi_J \cong \pi_J$ があったとき, 同型 $\mathbb{Z}^d \cong \pi_J^{\mathrm{ab}} \cong \pi_L^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^d; \boldsymbol{x} \mapsto V\boldsymbol{x}$ によって, 多変数 Alexander 多項式の変数たちはある $V \in \mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$ によって対応する. 例えば $d = 2$ のとき, 単因子論により, $\Delta_J(t_1, t_2) \doteq \Delta_L(t_1^a, t_2^b)$, ($a, b \in \mathbb{Z}$ は互いに素) となる.

代わりに $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_L$ が与えられたとき, $\widehat{\mathbb{Z}}^d \cong \widehat{\pi}_J^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\pi}_L^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^d; \boldsymbol{x} \mapsto V\boldsymbol{x}$, $V = (v_{ij}) \in \mathrm{GL}_d\widehat{\mathbb{Z}}$ が導かれ, 特に J と L の成分数は一致する. ここで

$$\Delta_J(t_1, \ldots, t_d) \doteq \Delta_L(t_1^{v_{11}} \cdots t_d^{v_{1d}}, \ldots, t_1^{v_{d1}} \cdots t_d^{v_{dd}})$$

となることが予想されるが, 実際にこれは成り立つ:

THEOREM 2.1. $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_L$ ならば Δ_J, Δ_L は変数たちへの $\mathrm{GL}_d\widehat{\mathbb{Z}}$ 作用を除き一致する.

Proof. 完備 Alexander イデアルが Alexander 多項式で生成される (cf.[TU23, Proposition 4.5]) ことに注意する. [TU23, Theorem 7.3] の証明で $\mathbb{Z}_p[\![t_1^{\mathbb{Z}_p}, \ldots, t_d^{\mathbb{Z}_p}]\!]$ を $\mathbb{Z}_p[\![t_1^{\widehat{\mathbb{Z}}}, \ldots, t_d^{\widehat{\mathbb{Z}}}]\!]$ に変えればよい. □

良く知られた事実 (folklore) の系であるが, いざ証明しようとすると中々大変だった. もっと良い方法があるかもしれない. 少なくとも $d = 1$ の場合は, もっと平易な, 良く知られた方法がある.

3. 絡み数

$d = 2$ のとき, Torres 条件により, $L = L_1 \cup L_2$ に対し $|\Delta_L(1, 1)| = |\mathrm{lk}(L_1, L_2)|$ となる. これと直前の定理から次が得られる.

COROLLARY 3.1. $J = J_1 \cup J_2$, $L = L_1 \cup L_2$ のとき, $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_L$ ならば $|\mathrm{lk}(J_1, J_2)| = |\mathrm{lk}(L_1, L_2)|$.

Proof. ある $V = (v_{ij}) \in \mathrm{GL}_2\widehat{\mathbb{Z}}$ に対し, $\Delta_L(1, 1) \doteq \Delta_J(t_1^{v_{11}} t_2^{v_{12}}, t_1^{v_{21}} t_2^{v_{22}})|_{t_1 = t_2 = 1} \doteq \Delta_J(1, 1)$. □

REMARK 3.2. この値は Casson–Lin 型不変量としての解釈を持つ [HS10]. つまり, ある主束のセクションを数えることを背景に, ある種の SU(2) 表現の個数と見ることができる. $d > 2$ の場合には $\Delta_J(0, \ldots, 0) = 0$ となるが, 1 の冪根を代入した値の積として Casson–Lin 型不変量が定義され調べられており [BC20], この方向で研究を進めることができる.

4. Fried の命題の多変数版

Fried の命題は次を主張する: $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ と $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し巡回集結式を $r_n := \mathrm{Res}(t^n - 1, f(t)) = \prod_{\zeta^n = 1} f(\zeta)$ と置く. $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ は $f(t) \doteq f(t^{-1})$ を満たし, $f(t)$ は 1 の冪根を根に持たないとする. このとき, r_n の絶対値を並べた数列 $(|r_n|)_n$ から, $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き復元できる [Fri88].

これを多変数多項式に拡張することができる:

THEOREM 4.1. $f(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}[t_1^{\mathbb{Z}}, \ldots, t_d^{\mathbb{Z}}]$ が $f(t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}) \doteq f(t_1, \ldots, t_d)$ を満たし, 1 の冪根ペアを零点に持たないとき, $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}_{>0}^d$ に対し $\boldsymbol{n}$ 次巡回集結式を $r_{\boldsymbol{n}} = \prod_{\zeta_i^{n_i} = 1} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ と定めれば, 絶対値の数列 $(|r_{\boldsymbol{n}}|)_{\boldsymbol{n}}$ から $f(t_1, \ldots, t_d)$ が $\mathbb{Z}[t_1^{\mathbb{Z}}, \ldots, t_d^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き復元される.

Proof. $d = 2$ のときを考える. まず列 $(|r_{m,n}|)_{m,n}$ から $(r_{m,n})_{m,n}$ が決まる. 実際, Fried の議論と同様, Sturm の定理によって, 絶対値 $(|r_{m,1}|)_m$ と $(|r_{1,n}|)_n$ から $r_{m,1} = \varepsilon_1 \delta_1^m |r_{m,1}|$, $r_{1,n} = \varepsilon_2 \delta_2^n |r_{1,n}|$ を満たす $\varepsilon_i, \delta_i \in \{\pm 1\}$ が得られる. 同様のことが固定された n に対する $(|r_{m,n}|)_m$, 固定された m に対する $(|r_{m,n}|)_n$ についても言えて, このことから結局 $r_{m,n} = \varepsilon_1 \delta_1^m \varepsilon_2 \delta_2^n |r_{m,n}|$ となる.

次に, Fried の命題により, 各 n に対し, 列 $(r_{m,n})_m$ から $r_n(x) := \mathrm{Res}(y^n - 1, f(x, y)) \in \mathbb{Z}[x]$ が定まることに注意する. ここで p を素数とし, $\mathbb{Z}[x]$ の (p) での局所化の代数閉包 C を取る. 次のような Fried の議論の修正によって, 列 $(r_n(x))_n$ から $f(x, y)$ が決定されることが分かる:

いま $C[y]$ において $f(x,y) = a_0\prod_i(y-\alpha_i)$ と書けば,

$$r_n(x) = a_0^n\prod_i(\alpha_i^n - 1) = \prod_{I\subset\{1,2,\ldots,l\}}(-1)^{l-|I|}\mu_I^n,$$

l は $f(x,y)\in C[y]$ の length, $\mu_I := a_0\prod_{i\in I}\alpha_i$, と表せる. ここで $\exp\sum_n\mu_I^n\frac{z^n}{n} = \exp(\log(1-\mu_I z)) = 1-\mu_I z$ であることから,

$$B(z) := \exp\sum_n r_n\frac{z^n}{n} = \prod_I(1-\mu_I z)^{-1^{l-|I|}}$$

を得る. よって列は $(r_n(x))$ は μ_I たち, さらには, この体 C 上の有理関数の divisor

$$\sum_I(-1)^{l-|I|}\mu_I^{-1} = a_0^{-1}\prod_i(\alpha_i^{-1}-1)\in\mathbb{Z}[C^*]$$

を決定する. (... という議論は格好が良いが, 実は単に指数関数が $\mathbb{Z}$ 上 1 次独立であることからも言える.) いま α_i たちは 1 の冪根でないので, Fried の補題 [Fri88, Lemma 1] から, この元は $\alpha_i^{-1}-1$ の形の因子たちを重複度込みで決定し, よって a_0 も決定する. これは $f(x,y)$ の復元を意味する.

$d>2$ の場合も再帰的に論じることができる. □

5. 少し強い仮定のもとで

$f(t), g(t)\in\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ に対し, $\mathbb{Z}_p[\![t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]\!]$ のイデアルの等式 $(f(t)) = (g(t^v))$, $(v\in\widehat{\mathbb{Z}}^\times)$ があったとき, 円分多項式 $\Phi_m(t)$ が $f(t)$ を割ることと $g(t)$ を割ることは同値である [Uek18, Lemma 3.5]. これは係数体を取り替えてもある程度成り立つ. 仮定を強めた状況で次が示される.

THEOREM 5.1. $\widehat{\pi}_J\cong\widehat{\pi}_L$ とする. 導かれる同型 $\widehat{\pi}_J^{\mathrm{ab}}\cong\widehat{\pi}_L^{\mathrm{ab}}$ が, J の各第 i 成分のメリディアンを, L の第 i 成分のメリディアンが位相的に生成する部分群へと送るとき,

$$\Delta_J(t_1,\ldots,t_d)\doteq\Delta_L(t_1,\ldots,t_d).$$

1 変数の場合 [Uek18, Theorem 1.1] は円分多項式因子をキャンセルすればすぐ Fried の定理に帰着されたが, 多変数の場合はもう少し議論が要る:

Proof. $d=2$ のときを考える. 次数対称な $f(x,y)\in\mathbb{Z}[x^{\mathbb{Z}},y^{\mathbb{Z}}]$ について, 集合 $\{f(x^{v_1},y^{v_2})\mid v_1,v_2\in\widehat{\mathbb{Z}}^\times\}$ から $f(x,y)$ が単数倍を除き決まることを示せば良い. まず, $\mathbb{Z}[x^{\mathbb{Z}},y^{\mathbb{Z}}]/(x^m-1,y^n-1)$ でのイデアル $(f(x^{v_1},y^{v_2}))$ の像が決まる. Fried の命題と [Uek18, Lemma 3.5] から, $r_n(x) := \mathrm{Res}(y^n-1,f(x,y))\in\mathbb{Z}[x^{\mathbb{Z}}]$ および $r_m(y) := \mathrm{Res}(x^n-1,f(x,y))\in\mathbb{Z}[y^{\mathbb{Z}}]$ が単数倍を除き決まる. イデアルの列 $((r_n(x)))_n$ から多項式列 $(r_n(x))_n$ を決める際には, 次数対称性から t 倍のズレは制御でき, あとは符号が問題となるが, Sturm の定理を用いる Fried の議論を generic な点での特殊値列に適用すれば, 絶対値列 $(|r_n(x)|)_n$ から $(r_n(x))_n$ が決まる. $f(x,y)$ を $(r_m(y))$ の共通円分多項式因子の全体による $f(x,y)$ の商に取り替えれば, 先程用いた Fried の議論の微修正版から $C[y]$ において $(r_n(x))_n$ から $f(x,y)$ が復元され, よってもとの $f(x,y)$ が復元される. $d>2$ の場合も同様に言える. □

6. 双曲絡み目の場合

Wilton–Zalesskii, Agol–Wise の結果に基づく Yi Liu の深い結果 [Liu23, Theorem 1.2] によれば, 双曲 3 次元多様体においては $\mathrm{GL}_d\widehat{\mathbb{Z}}$ 作用による不定性が $\mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$ 作用と $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ 倍の不定性に落とせる ($\widehat{\mathbb{Z}}^\times$-regularity). これと先程の結果を組み合わせれば, 次の強い結果が得られる.

THEOREM 6.1. J が双曲的で $\widehat{\pi}_J\cong\widehat{\pi}_L$ のとき, Δ_J と Δ_L は, $\mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$ 作用の不定性を除き一致する.

次の問は我々にとって興味深い.

QUESTION 6.2. 一般に $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_L$ のとき, Δ_J と Δ_L は, $\mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$ 作用の不定性を除き一致するか？

もし $\mathrm{GL}_d\widehat{\mathbb{Z}}$ 作用分の不定性が $\mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$ と $\mathrm{GL}_d\widehat{\mathbb{Z}}$ の対角行列の積にまで落ちるなら, これは真である. $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ 倍の不定性よりも緩い条件なので成り立つ可能性があるが, 証明にはおそらく幾何学を本格的に使う必要がある. もし有用な情報や協力者があれば, ご連絡いただけると大変ありがたい.

Acknowledgments

共同研究者である Biao Ma 氏, 舘野壮平氏, また有用な助言を下さった Yi Liu 氏と三原朋樹氏に感謝する. The author has been partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP23K12969.

REFERENCES

BC20 Leo Benard and Anthony Conway, *A multivariable Casson-Lin type invariant*, Ann. Inst. Fourier **70** (2020), no. 3, 1029–1084 (English).

BF20 Michel Boileau and Stefan Friedl, *The profinite completion of 3-manifold groups, fiberedness and the Thurston norm*, What's next?—the mathematical legacy of William P. Thurston, Ann. of Math. Stud., vol. 205, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2020, pp. 21–44. MR 4205634

BJZR23 Martin Bridson, Andrei Jaikin-Zapirain, and Alan W. Reid, *A list of problems suggested by participants of Workshop on Profinite Rigidity*, `https://www.icmat.es/RT/2023/GGTLDGT/week_3_problem_list.pdf`, 2023.

BR20 Martin R. Bridson and Alan W. Reid, *Profinite rigidity, fibering, and the figure-eight knot*, What's next?—the mathematical legacy of William P. Thurston, Ann. of Math. Stud., vol. 205, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2020, pp. 45–64. MR 4205635

Fri88 David Fried, *Cyclic resultants of reciprocal polynomials*, Holomorphic dynamics (Mexico, 1986), Lecture Notes in Math., vol. 1345, Springer, Berlin, 1988, pp. 124–128. MR 980956

HS10 Eric Harper and Nikolai Saveliev, *A Casson-Lin type invariant for links*, Pac. J. Math. **248** (2010), no. 1, 139–154 (English).

Liu23 Yi Liu, *Finite-volume hyperbolic 3-manifolds are almost determined by their finite quotient groups*, Invent. Math. **231** (2023), no. 2, 741–804. MR 4542705

MU23 Biao Ma and Jun Ueki, *Profinite rigidity of the multivariable Alexander polynomials*, in preparation, 2023.

Rei18 Alan W. Reid, *Profinite rigidity*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 1193–1216. MR 3966805

TU23 Sohei Tateno and Jun Ueki, *The Iwasawa invariants of ${\mathbb{Z}_p}^d$-covers of links*, preprint. arXiv:2401.03258, 2023.

Uek18 Jun Ueki, *The profinite completions of knot groups determine the Alexander polynomials*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 5, 3013–3030. MR 3848406

Uek21 ———, *Profinite rigidity for twisted Alexander polynomials*, J. Reine Angew. Math. **771** (2021), 171–192. MR 4234095

Uek22 ———, *Erratum to Profinite rigidity for twisted Alexander polynomials (J. reine angew. Math. 771 (2021), 171–192)*, J. Reine Angew. Math. **783** (2022), 275–278. MR 4373248

Jun Ueki uekijun46@gmail.com
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan