

$\mathbb{F}_p[X]$ に付随する 3 次元多様体の不変量

川上 竜乃進 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)

概要

Mihalache–鈴木–寺嶋は、対合的、ユニモジュラー、余ユニモジュラーな Hopf 代数から \mathfrak{o} -グラフを通じて 3 次元多様体の不変量を構成した [8]. 本稿ではこれを MST 不変量と呼ぶ. 有限体 \mathbb{F}_p 上の多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ をイデアル $\langle x^p \rangle$ で割って得られる代数 $\mathbb{F}_p[X]$ は, これらの条件を満たす Hopf 代数となる. 本稿では, まず Heegaard 種数 1 の多様体に対する MST 不変量の性質を論じ, その結果を用いて $\mathbb{F}_p[X]$ に付随する MST 不変量の計算と考察を行う.

1 MST 不変量

この章では Benedetti–Petronio [1] による閉正規 \mathfrak{o} -グラフの理論, および Hopf 代数とその周辺に関する基礎事項を復習した後, Mihalache–鈴木–寺嶋 [8] により構成された向きづけられた閉 3 次元多様体の不変量の定義を紹介する.

以下, 特に断らない限り 3 次元多様体は境界のない向きづけられたものとする.

1.1 3 次元多様体を表す閉正規 \mathfrak{o} -グラフ

以下, \mathbb{R}^3 の向きを右手系に固定しておく.

定義 1.1. 以下の性質をもつ連結 4 価グラフの \mathbb{R}^2 へのはめ込みを **正規 \mathfrak{o} -グラフ** という.

- (i) 頂点が 1 つ以上存在し, 各頂点には上下表記がある.
- (ii) 各辺は向きづけられており, 頂点を横断する辺同士の向きは同調している.

正規 \mathfrak{o} -グラフのうち, いくつかの公理 ([1] Chapter 1 を参照) を満たすものを **閉正規 \mathfrak{o} -グラフ** という. 閉正規 \mathfrak{o} -グラフは後述の方法で, 向きづけられた閉 3 次元多様体を表す. 例えば, レンズ空間 $L(s, 1)$ は s 個の頂点をもつ閉正規 \mathfrak{o} -グラフで表される (図 1).

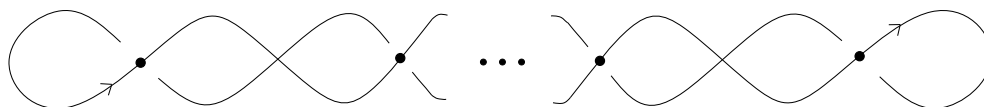


図 1: $L(s, 1)$ を表す閉正規 \mathfrak{o} -グラフ

閉正規 \mathfrak{o} -グラフから向きづけられた閉 3 次元多様体を得る方法を説明する. まず, 閉正規 \mathfrak{o} -グラフの各頂点を \mathbb{R}^3 に埋め込まれた多面体に図 2 のようにして置き換える.

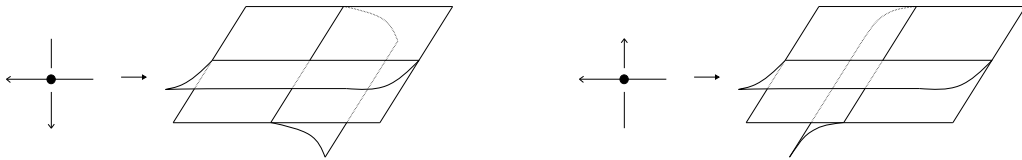


図 2: 閉正規 \circ -グラフの頂点と多面体の対応

さらに, それらの多面体を閉正規 \circ -グラフの辺の接続に従い接着する. 得られた多面体を図 3 のように太らせることで, S^2 境界をもつ向きづけ可能な 3 次元多様体を得られ, その向きを \mathbb{R}^3 から誘導されるものとする.

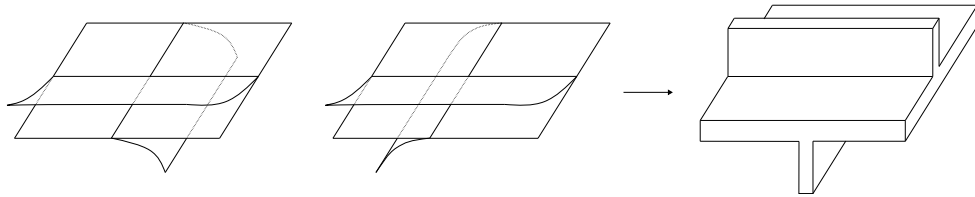


図 3: 3 次元多様体の生成

この多様体に 3 次元球体を貼り合わせるにより, 向きづけられた閉 3 次元多様体を得られる. 任意の 3 次元多様体はある閉正規 \circ -グラフから得られ, 2 つの閉正規 \circ -グラフが同相な 3 次元多様体を表す必要十分条件も知られている.

定理 1.2 (Benedetti–Petronio [1]). Γ_1, Γ_2 を閉正規 \circ -グラフとし, $M(\Gamma_1), M(\Gamma_2)$ を Γ_1, Γ_2 から得られる 3 次元多様体とする. このとき, $M(\Gamma_1)$ と $M(\Gamma_2)$ が向きを保って同相となる必要十分条件は Γ_1, Γ_2 が, **0-2 移動** (図 4), **CP 移動** (図 5), **MP 移動** (図 6), を有限回繰り返すことで移りあうことである. ただし, 図 6 で向きの書かれていない部分は移動の前と後で矛盾なく対応させることとする.

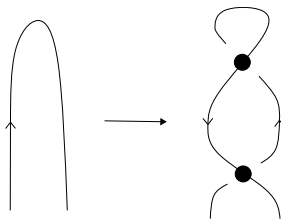


図 4: 0-2 移動

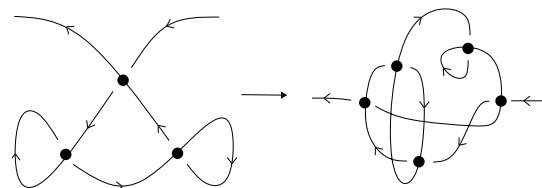


図 5: CP 移動

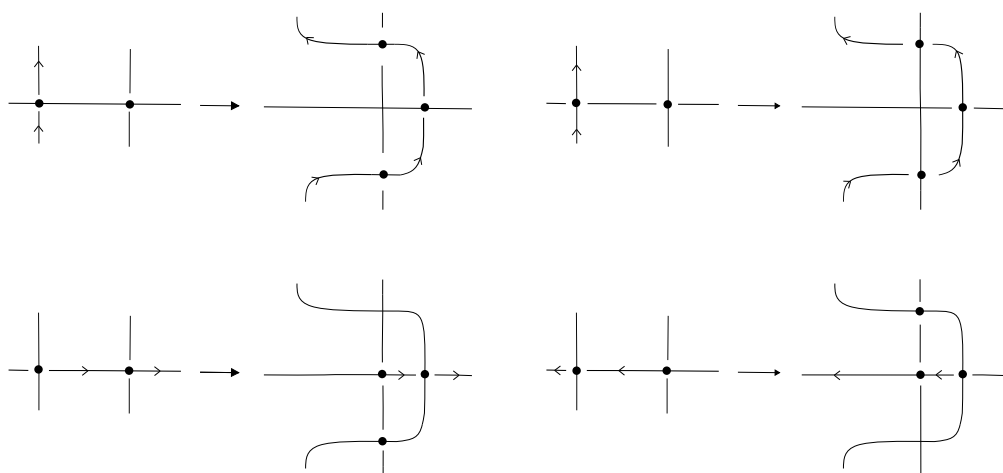


図 6: MP 移動

定理 1.2 より, 閉正規 \circ -グラフから構成された量で, 各移動の下で不変なものは 3 次元多様体の不変量となる.

1.2 Hopf 代数とテンソルネットワーク

ここでは, [6, 7, 8, 9] を参考にして, Hopf 代数とその周辺知識についてまとめ, テンソルネットワークと呼ばれる図式による Hopf 代数の計算手法を紹介する.

特に断らない限り, ベクトル空間は体 K 上の有限次元ベクトル空間のことを表す. また, ベクトル空間 V の双対空間を V^* , ベクトル空間 V, W のテンソル積空間を $V \otimes W$ と書く.

ベクトル空間 B と積 $m: B \otimes B \rightarrow B$, 余積 $\Delta: B \rightarrow B \otimes B$, 単位射 $u: K \rightarrow B$, 余単位射 $\epsilon: B \rightarrow K$ の組 $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ を双代数という. ただし, 各写像は単位律や結合律などの公理を満たす線形写像である.

定義 1.3. $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ を双代数とする. 反準同型写像 $S: H \rightarrow H$ が可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & H \otimes H & \\
 \Delta \nearrow & & & & \searrow m \\
 H & \xrightarrow{\epsilon} & K & \xrightarrow{u} & H \\
 \Delta \searrow & & & & \nearrow m \\
 & H \otimes H & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & H \otimes H &
 \end{array}$$

を満たすとき, 組 $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ を Hopf 代数と呼び, S を H の対合射と呼ぶ. ここで, 線形写像 $f: H \rightarrow H$ が反準同型写像であるとは, 任意の $a, b \in H$ に対し $f(ab) = f(b)f(a)$ を満たし, $u(1_K) =: 1_H = f(1_H)$ を満たすことをいう.

以降, 特に断らない限り Hopf 代数 H といえば Hopf 代数 $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ を表すこ

ととする. Hopf 代数のテンソル積空間には Hopf 代数の構造が入り, $m, u, \Delta, \epsilon, S$ の引き戻しを考えると双対空間にも Hopf 代数の構造が入る.

定義 1.4. Hopf 代数 H が $S^2 = \text{id}$ を満たすとき, H は**対合的**であるという.

次に Hopf 代数上の積分と余積分について紹介する.

定義 1.5. H を Hopf 代数とする. このとき, $\mu_L \neq 0 \in H^*$ が**左積分**であるとは

$$f \cdot \mu_L = f(1_H)\mu_L \quad (\forall f \in H^*)$$

を満たすことをいう. また, $\mu_R \neq 0 \in H^*$ が**右積分**であるとは

$$\mu_R \cdot f = f(1_H)\mu_R \quad (\forall f \in H^*)$$

を満たすことをいう. ここで, $f \cdot \mu$ と $\mu \cdot f$ は H^* 上の積 (Δ による引き戻しで定義される) により得られる H^* の元である. H^* 上の左積分, 右積分をそれぞれ e_L, e_R と書き, H の**左余積分**, **右余積分**という.

定義 1.6. Hopf 代数 H 上の左余積分が右余積分であるとき, H は**ユニモジュラー**であるといい, 左余積分も右余積分も単に余積分という. また, H 上の左積分が右積分であるとき, H は**余ユニモジュラー**であるといい, 左積分も右積分も単に積分という.

積分と余積分はスカラー倍を法として一意に存在することが知られている. このことから, ある左 (余) 積分が右 (余) 積分でもあれば, 左 (余) 積分全体は右 (余) 積分全体に一致する.

Hopf 代数の計算は**テンソルネットワーク**という図式を用いて記述すると簡潔になる場合が多い. V をベクトル空間とし, $T \in V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ をとる. 図 7 のように, $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $\{1, \dots, n\} = \{o_1, \dots, o_n\}$ により辺がラベリングされた T を頂点とする有向グラフのことを, T を表す**テンソルネットワーク**という.

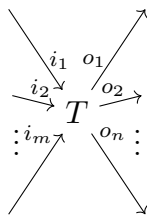


図 7: テンソルネットワーク

以降, 特に断らない限り辺のラベルのつけ方を, V^* に対応する m 本の矢印については反時計回り, V に対応する n 本の矢印については時計回りに固定することで, その表記を省略する. また, テンソルネットワークを $V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ の元そのものだと思ふことにする. テンソルネットワーク T, S が与えられたとき, それらを接続して得られる有向グラフ

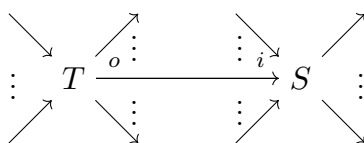


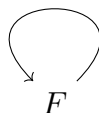
図 8: テンソルネットワークの接続

を $T \otimes S$ の (o, i) -縮約により得られるテンソルネットワークとみなす. 同様にして, テンソルネットワーク T からそれ自身の辺同士を接続して得られる図式も, その辺が対応するテンソルの縮約により得られるものとする.

$V^* \otimes V$ は次の同型写像により, V から V への線形写像全体 $\mathcal{L}(V, V)$ と自然に同一視できる.

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes V & \longrightarrow & \mathcal{L}(V, V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f \otimes v & \longmapsto & (x \mapsto f(x)v \ (\forall x \in V)) \end{array}$$

同様に, $V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ は $\mathcal{L}(V^{\otimes m}, V^{\otimes n})$ と自然に同一視できる. このことから, 線形写像の計算はテンソルネットワークによって記述できる. $F \in \mathcal{L}(V, V)$ が $f \otimes v \in V^* \otimes V$ と同一視されるとき, F のトレースとは $\text{tr}(F) = f(v) \in K$ のことであり, これをテンソルネットワークで表せば



となる. Hopf 代数の公理は次のように表せる.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow S \\ \Delta \longrightarrow m \searrow \end{array} \\ \longrightarrow \Delta \longrightarrow m \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \epsilon \quad 1_H \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow m \longrightarrow \\ \searrow S \nearrow \end{array}$$

1.3 MST 不変量の定義

以降, H を対合的, ユニモジュラー, 余ユニモジュラーな Hopf 代数とする. 以下では [8] で構成された 3 次元多様体の K 上の不変量を紹介する.

定義 1.7. Γ を閉正規 α -グラフとする. 各頂点を以下のようにして置き換えて得られるテンソルネットワークを $Z(\Gamma, H)$ と書く.



図 9: 頂点とテンソルネットワークの対応

閉正規 \circ -グラフの公理から $Z(\Gamma, H)$ は K の元となる.

以下の定理 1.8 により, $Z(\Gamma, H)$ は 3 次元多様体の不変量である. この不変量を **MST 不変量** と呼ぶ.

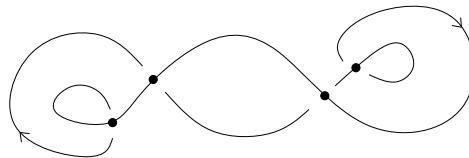
定理 1.8 (Mihalache–鈴木–寺嶋 [8]). Γ_1, Γ_2 を閉正規 \circ -グラフとし, それらが表す 3 次元多様体を $M(\Gamma_1), M(\Gamma_2)$ とおく. このとき, $M(\Gamma_1)$ と $M(\Gamma_2)$ が向きを保って同相ならば $Z(\Gamma_1, H) = Z(\Gamma_2, H)$ が成り立つ.

以上では, テンソルネットワークによる不変量の構成を紹介した. 一方, Hopf 代数の **Heisenberg 2 重化** と呼ばれる代数を用いても MST 不変量が構成できる. 特に, MP 移動に関する不変性は Hopf 代数の Heisenberg 2 重化がもつ性質から示される.

2 Heegaard 種数 1 の多様体の MST 不変量

本章では, Heegaard 種数 1 の多様体 M に対する不変量 $Z(M, H)$ の性質を論じる.

以下の閉正規 \circ -グラフは $S^2 \times S^1$ を表す [3].



$S^2 \times S^1$ を表す閉正規 \circ -グラフ

次の命題 2.1 のとおり, $Z(S^2 \times S^1, H)$ は $\mu(e) = 1$ となるような積分 μ と余積分 e を用いて簡単な形で書ける.

命題 2.1. $Z(S^2 \times S^1, H) = \epsilon(e)\mu(1_H)$ が成り立つ.

s, t を互いに素な整数で $1 \leq t \leq s$ を満たすものとする. レンズ空間 $L(s, t)$ の閉正規 \circ -グラフは次のようにして得られる [2]. まず, 語 W^+, W^-, W を

$$W^+ = v_s^+ v_{s-1}^+ \cdots v_1^+, \quad W^- = v_t^- v_{2t}^- \cdots v_{st}^-, \quad W = W^+ W^-$$

と定義する. ただし, 各添え字は s を法として同一視する. 次に, 閉正規 \circ -グラフの頂点



を s 個並べ, それらに $1, 2, \dots, s$ と番号づける. W を右から巡回的に読み, 添え字を頂点の番号, $+$ を上の辺, $-$ を下の辺に対応させ, 順に各頂点をつなぐ. このようにして得られた閉正規 \circ -グラフは $L(s, t)$ を表す. 例えば, 図 10 の閉正規 \circ -グラフは $L(3, 2)$ を表す.

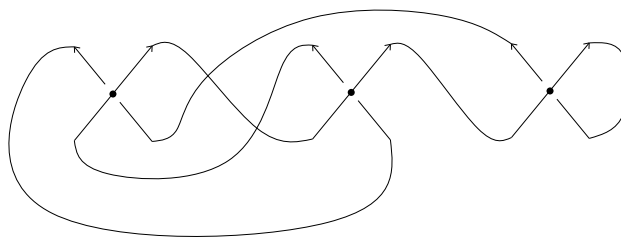


図 10: $L(3, 2)$ を表す閉正規 α -グラフ

命題 2.2. H が可換または余可換であるとき, 任意のレンズ空間 $L(s, t)$ に対し

$$Z(L(s, t), H) = \text{tr}(m^s \circ \Delta^s)$$

が成り立つ. ここで $m^s: H^{\otimes s+1} \rightarrow H, \Delta^s: H \rightarrow H^{\otimes s+1}$ とは

$$\begin{aligned} m^s &= m \circ (m \otimes \text{id}) \circ \cdots \circ (m \otimes \text{id}^{\otimes s-1}) \\ \Delta^s &= (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes s-1}) \circ (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes s-2}) \circ \cdots \circ \Delta \end{aligned}$$

のことである.

命題 2.2 より, H が可換または余可換であれば $Z(L(s, t), H)$ の値は t に依らないことが分かる.

3 $\mathbb{F}_p[X]$ に付随する MST 不変量の性質

本章では, Hopf 代数 $\mathbb{F}_p[X]$ の定義を紹介し, いくつかの多様体に対して不変量 $Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ の計算を行う. また, その結果を基にして $Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ の性質を考察する.

以降, p は素数とし $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく. \mathbb{F}_p は通常の和と積について標数 p の体となる.

命題 3.1. \mathbb{F}_p 上の多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ は, 通常の積, 単位元と次の線形写像により無限次元 Hopf 代数となる. ただし, 多項式環を基底が $\{1, x, x^2, \dots\}$ であるベクトル空間とみなす.

$$\begin{aligned} \Delta: \mathbb{F}_p[x] &\longrightarrow \mathbb{F}_p[x] \otimes \mathbb{F}_p[x] \\ \cup &\qquad \qquad \cup \\ x &\longmapsto 1 \otimes x + x \otimes 1 \\ \epsilon: \mathbb{F}_p[x] &\longrightarrow \mathbb{F}_p \\ \cup &\qquad \qquad \cup \\ x &\longmapsto 0 \\ S: \mathbb{F}_p[x] &\longrightarrow \mathbb{F}_p[x] \\ \cup &\qquad \qquad \cup \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

$\mathbb{F}_p[x]$ はベクトル空間のテンソル代数と呼ばれるもののうち, ベクトル空間の次元が 1 のものである. テンソル代数は対合的であるが, その次元は無限であるため MST 不変量に用いることができない. そこで, 適切なイデアルを考えることで $\mathbb{F}_p[x]$ の次元を有限に落とす.

命題 3.2. $x^p \in \mathbb{F}_p[x]$ により生成されるイデアルを $\langle x^p \rangle$ とおく. このとき, $\mathbb{F}_p[X] := \mathbb{F}_p[x]/\langle x^p \rangle$ は定義 3.1 における線形写像から誘導される写像により p 次元 Hopf 代数となる.

$\mathbb{F}_p[X]$ は可換かつ余可換であるため, ユニモジューラーかつ余ユニモジューラーであり, $Z(M, \mathbb{F}_p[X])$ は不変量である.

2 章の結果を用いて次の命題 3.3, 3.4 が示される.

命題 3.3. $Z(S^2 \times S^1, \mathbb{F}_p[X]) = 0$ が成り立つ.

命題 3.4. 任意のレンズ空間 $L(s, t)$ に対し

$$Z(L(s, t), \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (s \mid p) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立つ.

以下では, 三葉結び目で分岐する S^3 の n 重巡回分岐被覆空間である, 4 元数多様体 Q ($n = 3$) と Poincaré ホモロジー球面 P ($n = 5$) に対する不変量の計算結果を示す. Q と P を表す閉正規 \circ -グラフについては [10] を参照した. なお, 計算にはコンピュータを用い, Python とそのライブラリである tensornetwork を利用した.

次の閉正規 \circ -グラフは Q を表す.

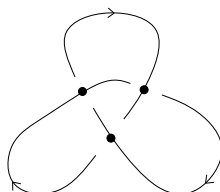


図 11: Q を表す閉正規 \circ -グラフ

これをテンソルネットワークに変換し, $p = 41$ まで計算した結果

$$Z(Q, \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (p = 2) \\ 1 & (3 \leq p \leq 41) \end{cases}$$

となった.

次の閉正規 \circ -グラフは P を表す.

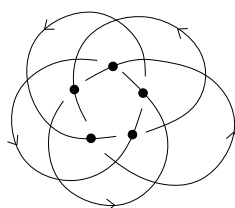


図 12: P を表す閉正規 \circ -グラフ

これをテンソルネットワークに変換し, $p = 41$ まで計算した結果

$$Z(P, \mathbb{F}_p[X]) = 1 \quad (p \leq 41)$$

となった.

以上で不変量を計算した多様体の 1 次ホモロジー群は

$$H_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}, \quad H_1(L(s, t)) = \mathbb{Z}_s, \quad H_1(Q) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_1(P) = 0$$

である. ここまでの結果を踏まえて次の予想を立てた.

予想 1. 任意の 3 次元多様体 M について

$$Z(M, \mathbb{F}_p[X]) = \begin{cases} 0 & (\#H_1(M) = \infty \text{ または } p \mid \#H_1(M)) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が成り立つ.

有限群 G が生成する群環 $\mathbb{C}[G]$ には対合的, ユニモジュラー, 余ユニモジュラーな Hopf 代数の構造が入る. $Z(M, \mathbb{C}[G])$ について次の結果が知られている.

命題 3.5 (Mihalache–鈴木–寺嶋 [8]). 任意の 3 次元多様体 M に対し

$$Z(M, \mathbb{C}[G]) = \#\text{Hom}(\pi_1(M), G)$$

が成り立つ.

命題 3.5 から加法群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ について $Z(M, \mathbb{C}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) = \#\text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ が成り立つ. また, 有限生成アーベル群の基本定理から $H_1(M) = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ と書ける. よって, $n \neq 0$ であれば $p \mid Z(M, \mathbb{C}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$ であり, $n = 0$ のときは $p \mid n_i$ であるような n_i が存在することと $p \mid Z(M, \mathbb{C}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$ であることが同値である. このことから予想 1 は次のように言い換えられる.

予想 2. 任意の 3 次元多様体 M について

$$Z(M, \mathbb{F}_p[X]) = Z(M, \mathbb{C}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) \pmod{p}$$

が成り立つ.

予想 2 の証明の方針としては, まず命題 3.5 と類似した方法で証明するということが考えられる. 命題 3.5 の証明の概要を次に述べる. まず, 閉正規 α -グラフ Γ の辺集合 $E(\Gamma)$ に対し, 各点についてある関係を入れることで $\pi_1(M)$ の表示 $\langle E(\Gamma) \mid R \rangle$ が得られる [4, 5]. また, 図 9 の変換は辺から G への彩色として理解できる. さらに, この彩色は関係 R を保つ. MST 不変量は最終的にトレースをとることで定まるが, これが彩色の数え上げに対応している. 以上のような議論で命題 3.5 は証明される. 特に, 局所的に見て図 9

の変換が、辺から G への R を保つ彩色とみなせることが証明のポイントになっている。しかし $\mathbb{F}_p[X]$ の場合、その余積構造が $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ と全く違うため局所的には R を保たない。このため $\mathbb{C}[G]$ の場合の証明が応用できず、別のアプローチが必要だと思われる。

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった、東京女子大学の大山淑之先生と新國亮先生に感謝いたします。[8] の著者の一人である Serban Matei Mihalache 氏には、広島大学トポロジー・幾何セミナーにおける氏のご講演の際に質問させて頂き、多数のアドバイスを頂きました。また、本研究集会でも氏には多くのコメントを頂きました。お礼申し上げます。最後に、本研究集会の発表にあたり厚くご指導をいただきました、慶應義塾大学の古宇田悠哉先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Benedetti and C. Petronio, *Branched standard spines of 3-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1653, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR1470454
- [2] M. Endoh and I. Ishii, *A new complexity for 3-manifolds*, Japan. J. Math. (N.S.) **31** (2005), no. 1, 131–156. MR2153728
- [3] I. Ishii, M. Ishikawa, Y. Koda, and H. Naoe, *Positive flow-spines and contact 3-manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **202** (2023), no. 5, 2091–2126. MR4634260
- [4] Y. Koda, *Spines, Heegaard splittings and the Reidemeister-Turaev torsion*, Tokyo J. Math. **30** (2007), no. 2, 417–439. MR2376519
- [5] ———, *O-graphic study of closed 3-manifolds*, Hakone seminar (2010).
- [6] G. Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Internat. J. Math. **2** (1991), no. 1, 41–66. MR1082836
- [7] ———, *Noninvolutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Duke Math. J. **84** (1996), no. 1, 83–129. MR1394749
- [8] S. M. Mihalache, S. Suzuki, and Y. Terashima, *The Heisenberg double of involutory Hopf algebras and invariants of closed 3-manifolds*, To appear in Algebr. Geom. Topol.
- [9] D. E. Radford, *Hopf algebras*, Series on Knots and Everything, vol. 49, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012. MR2894855
- [10] 山下正勝, Branched covering space と DS-diagram, Hakone seminar (2000).