グラフの被覆を保つ変形と被覆の性質

山田寛之 （埼玉大学)*1

1 Abstract

超分子の構造として現れる多面体絡み目は, その構造より自然に多面体を被覆する. さらに複雑な構造では, 多面体絡み目ではなく絡み合う空間グラフによる多面体への被覆が現れる. 多面体絡み目は多面体の正則近傍内への埋め込みとして得られるが, 今回の講演では空間グラフによる被覆について理解するために、主に抽象グラフの被覆について考察する. 抽象的なグラフの間の被覆の性質について, 「同じグラフを被覆する抽象グラフはこの公演で導入する変形を有限回施すことによって互いに移り合う」という定理を紹介し, 証明のアイデアを中心に説明する. また, グラフの被覆の性質を使って空間グラフとして見た多面体同士の被覆についても議論したい.

2 グラフの (n, m)-被覆の定義

この章では, 抽象的なグラフの (n, m)-被覆の定義をする.

定義 2.1. 以下, グラフ G_1 からグラフ G への写像 $f : G \to H$ は以下の条件を満たすとする.

(1) f を V_1 に制限すると V_1 を V_2 に写し, E_1 に制限すると E_1 を E_2 に写す.
(2) 任意の G_1 の辺 e の両端の頂点を v, u とすると $f(e)$ の両端の頂点は $f(v), f(u)$ である.

定義 2.2. $G_1 = (V_1, E_1)$ をループを含まない有限グラフ, $G_2 = (V_2, E_2)$ をループを含まない有限グラフとしてある自然数 n に対して以下を満たす $f : G_1 \to G_2$ が存在するとき, n 重被覆するという.

(1) 任意の G_2 の辺 e' に f の逆像で対応する G_1 の辺の個数は n である.

また, このときの f を (G_1, G_2) の n 重被覆写像という.

定義 2.3. G_1 が G_2 を n 重被覆していて f をその被覆写像とするとき, ある自然数 m に対して f が以下の条件を満たすとき, G_1 は $G_2(n, m)$-被覆するという.

(2) G_2 の任意の頂点 v' に f の逆像で対応する G_1 の頂点の個数は m である.

また, このときの f を (G_1, G_2) の (n, m)-被覆写像という.

図 1, 図 2 は G_1 が G_2 を $(2, 2)$-被覆する例である. G_2 の頂点と辺に色を塗り, 被覆写像 f で写る G_1 の辺と頂点を写った先の色で塗ったものである.

*1 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255 埼玉大学大学院理工学研究科 修士 2 年
mail: h.yamada.858@ms.saitama-u.ac.jp

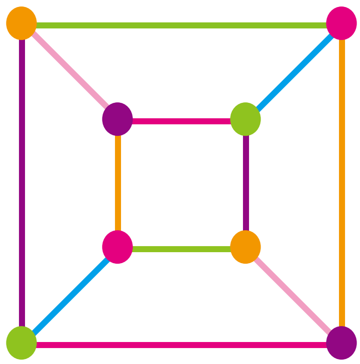

図 1　G_1

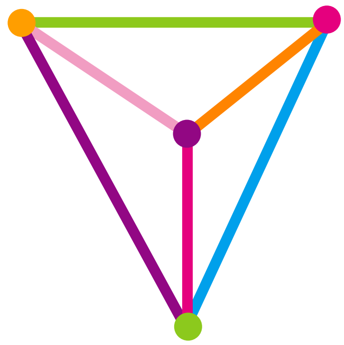

図 2　G_2

3　被覆の性質

この章では，グラフの (n,m)-被覆について説明する．特に．特に，2 辺入れ換えを定義し，あるグラフを (n,m)-被覆するグラフは 2 辺入れ換えによって移りあうという定理と定理の証明に必要な補題を紹介している．

命題 3.1. G_1 が G_2 を (n,m)-被覆していて G_2 が G_3 を (μ,λ)-被覆するとき，G_1 は G_3 を $(n\mu,m\lambda)$-被覆する．

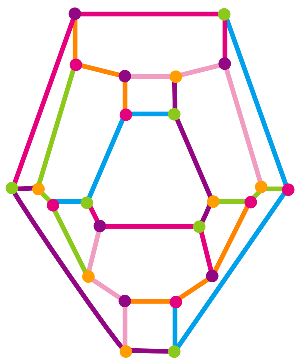

図 3　G_1

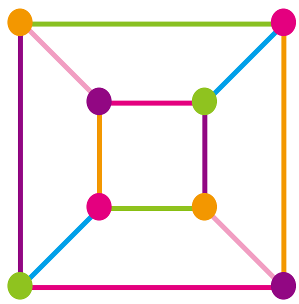

図 4　G_2

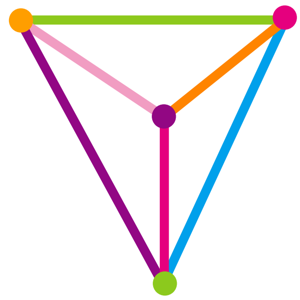

図 5　G_3

命題 3.2. G_1 と G_2 はそれぞれ k_1-正則 k_2-正則で G_1 が G_2 を n 重被覆しているとする．このとき，$\frac{nk_2}{k_1}$ が自然数になるならば，G_1 は G_2 を $(n,\frac{nk_2}{k_1})$-被覆する．

定義 3.3. $G=(V,E), G_1=(V_1,E_1)$ を正則グラフ，G_1 が G を (n,m)-被覆するとして f をその被覆写像とする．このとき以下の一連の変形を 2 辺入れ換えとよぶ．

(1) v_1, v_2 を G_1 の頂点，v を G の頂点として $f(v_1)=f(v_2)=v$ を満たすとする.v_1, v_2 を端点に持つ G_1 の辺 e_1, e_2 を選ぶ．

(2) それらのもう一方の端点を ${v_1}', {v_2}'$ とする．

(3) G_1 の辺 $e_1=(v_1,{v_1}'), e_2=(v_2,{v_2}')$ を取り除き，辺 $(v_1,{v_2}'), (v_2,{v_1}')$ を加えて新たなグラフ ${G_1}'$ を

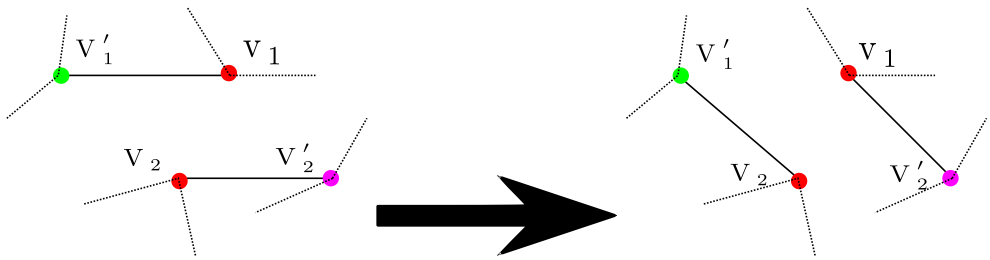

図 6

得る.

定理 3.4. G_0 が G を (n,m)-被覆するとする.
このとき, 以下は同値である.

(1) ${G_0}'$ は G を (n,m) 被覆する.
(2) G_0 に有限回 2 辺入れ換えを施すと ${G_0}'$ が得られる.

証明の概要
(2)⇒(1) について

補題 3.5. G_1 に 2 辺入れ換えを施して得られた ${G_1}'$ は G を (n,m)-被覆する.

(1)⇒(2) について
証明の方針

- グラフ G に対応する行列である隣接行列 $A(G)$ を定義する.
- 2 辺入れ換えに対応する行列である 2 辺入れ換え行列を定義する. 2 辺入れ換えは隣接行列に 2 辺入れ換え行列を足すことで実現できる.
- $A({G_0}') - A(G_0)$ が 2 辺入れ換え行列の有限個の和であらわせることを示す.

証明に必要なことを補題 3.12 まで紹介する.

規約 3.6. $G = (V,E)$, $G_0 = (V_0,E_0)$ はループを含まない有限グラフ, G_0 は G を (n,m)-被覆するとして, その被覆写像を f とする. このとき以下のように G, G_0 の頂点に添え字をつける.

a, b は $1 \leq a \leq |v|$, $1 \leq b \leq m$ を満たすような自然数とするとき, V の頂点 v_a, V_0 の頂点 $v_{0(a,b)}$ は $f(v_{0(a,b)}) = v_a$ を満たす.

図 7 は, 六面体が四面体を $(2,2)$-被覆するときの規約 3.6 を用いた添え字付けの例である.

補題 3.7. G_0 を k_0-正則, $A(G_0) = (a_{i,j})$ を G_0 の隣接行列とすると以下が成立する.

$$\sum_{1\leq i\leq m|V|} a_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq m|V|} a_{i,j} = k_0$$

補題 3.8. 規約 3.6 の添え字付けを考えたとき, $A(G_0) = (a_{0(a,b)(c,d)}))$ を G_0 の隣接行列, v_i, v_j を G の頂点としたとき, $A(G_0)$ は以下を満たす.

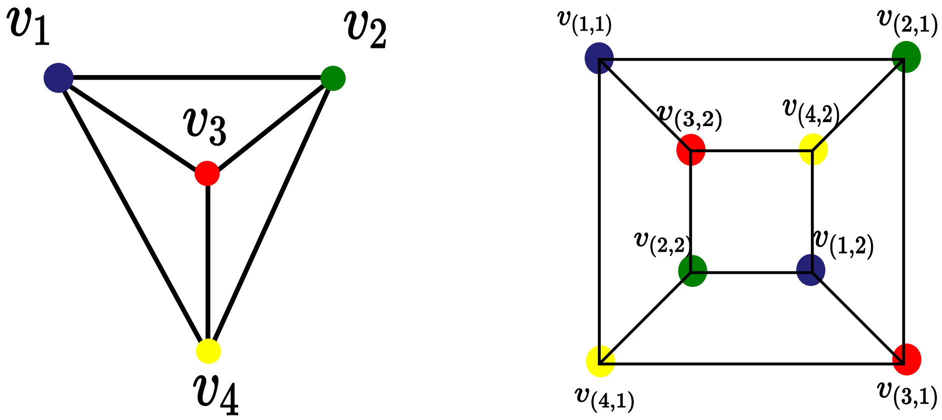

図 7　被覆写像で送る前と送った先の頂点の色が同じ

(1) G に v_i, v_j を端点に持つ辺が存在するとき, $\sum_{1\le k\le m}\sum_{1\le l\le m} a_{0(i,k)(j,l)} = n$

(2) G に v_i, v_j を端点に持つ辺が存在しないとき, 任意の $1 \le k, l \le m$ を満たす自然数 k, l に対して $a_{0(i,j)(k,l)} = 0$

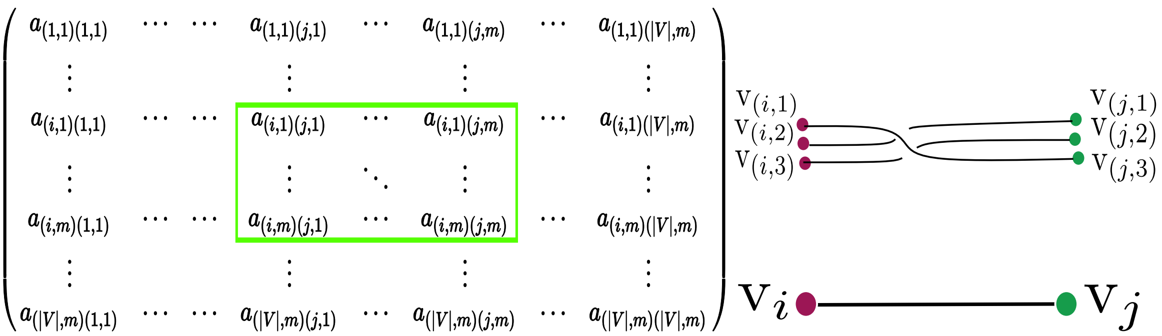

図 8　v_i, v_j を $(3,3)$-被覆されているグラフの頂点としたとき, 行列の緑で囲まれた小行列の成分の和は間に辺があれば 3 になり, なければ 0 になる

定義 3.9. 規約 3.6 の添え字付けを考えて, $A(G_0) = (a_{0(a,b)(c,d)})$ を G_0 の隣接行列とする. $A(G_0)$ の 1 以上の成分 $a_{0(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)}, a_{0(\alpha,\gamma)(\nu,\xi)}$ が存在するとする. このとき以下の性質を満たす行列 B を 2 辺入れ換え行列とよぶ.

- $B = (b_{(a,b)(c,d)})$ は $m|v|$ 次正方行列.
- $b_{(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)} = b_{(\lambda,\mu)(\alpha,\beta)} = b_{(\alpha,\gamma)(\nu,\xi)} = b_{(\nu,\xi)(\alpha,\gamma)} = -1$
- $b_{(\alpha,\gamma)(\lambda,\mu)} = b_{(\lambda,\mu)(\alpha,\gamma)} = b_{(\alpha,\beta)(\nu,\xi)} = b_{(\nu,\xi)(\alpha,\beta)} = 1$
- 上記以外の成分は 0

補題 3.10. 規約 3.6 の添え字付けを考えて, $A(G_0) = (a_{(a,b)(c,d)})$ を G_0 の隣接行列, $a_{(\alpha,\beta)(\lambda,\mu)}, a_{(\alpha,\gamma)(\lambda,\nu)} \ge 1$ とする. 定義 2.10 のように 2 辺入れ換え行列 B_0 を決める. このとき, G_0 の辺 $(v_{(\alpha,\beta)}, v_{(\lambda,\mu)}), (v_{(\alpha,\gamma)}, v_{(\lambda,\mu)})$ を取り除き, 新たな辺 $(v_{(\alpha,\beta)}, v_{(\gamma,\xi)})(v_{(\alpha,\gamma)}, v_{(\lambda,\mu)})$ を加えるような 2 辺入れ換えによって得られたグラフを G_1 とする. このとき $A(G_0) + B_0 = A(G_1)$ が成立する.

命題 3.11. G_1 と G_2 はそれぞれ k_1-正則 k_2-正則で G_1 が G_2 を n 重被覆しているとする．このとき, $\frac{nk_2}{k_1}$ が自然数になるならば, G_1 は G_2 を $(n, \frac{nk_2}{k_1})$-被覆する．

命題 3.11 より, 考えたい超分子の被覆する多面体の候補は以下の表のとおりである．

表 1　超分子が被覆する多面体の候補

多面体	(n,m) 被覆の候補	被覆するのか
正四面体	$(30,30)$	○
立方体	(15,15)	?
正八面体	(15,20)	?
正十二面体	(6,6)	?
切頂四面体	(10,10)	?
切頂六面体	(5,5)	?
切頂八面体	(5,5)	?
切頂十二面体	(2,2)	○
切頂二十面体	(2,2)	×
二十・十二面体	(3,4)	?
斜方切頂二十・十二面体	(1,1)	×

4　空間グラフの被覆の定義

定義 4.1. $g(G_1)$, $h(G_2)$ を連結で各頂点の次数が 2 以上の空間グラフとする．また $g(G_1) \subset N(h(G_2))$ とする．このとき自然数 n に対して以下の全ての条件を満たす胞体写像 $f\colon g(G_1) \to h(G_2)$ が存在するとき $g(G_1)$ が $h(G_2)$ を空間 n 重被覆するという. また, このときの f を空間被覆 写像とよぶ.

(1) f は $g(G_1)$ の i-胞体を $h(G_2)$ の i-胞体 l へ写す.
(2) $r\colon N(h(G_2)) \times [0,1] \to N(h(G_2))$ を $N(h(G_2))$ の $h(G_2)$ への変異レトラクションとすると, 任意の $g(G_1)$ の辺 e_1 に対して $f|_{e_1} = r(e_1, 1)$ が成立する.
(3) 任意の $h(G_2)$ の辺 e' の任意の点 x に対して $|f^{-1}(x)| = n$

定義 4.2. $g(G_1)$ は $h(G_2)$ を空間 n 重被覆していて, $f\colon g(G_1) \to g(G_2)$ をその空間被覆写像とする．f が以下の条件を満たすとき $g(G_1)$ が $g(G_2)$ を空間 (n,m)-被覆するという.

(4) $h(G_2)$ の任意の頂点 v に対してある自然数 m が存在して $|f^{-1}(x)| = m$

図 9 は六面体が四面体を空間 $(2,2)$-被覆する例である.

定義 4.3. [1] 平面的グラフ G の空間埋め込み g が G の $\mathbb{S}^2$ への埋め込み h とアンビエント・アイソトピックであるとき g は自明であるという.

定義 4.4. 空間グラフ G_1 が空間グラフ G_2 を空間被覆するとする．このときの G_1 のうち $\mathbb{S}^2$ に埋め込めるようなものが存在するとき G_1 は G_2 を自明な空間被覆をするという.

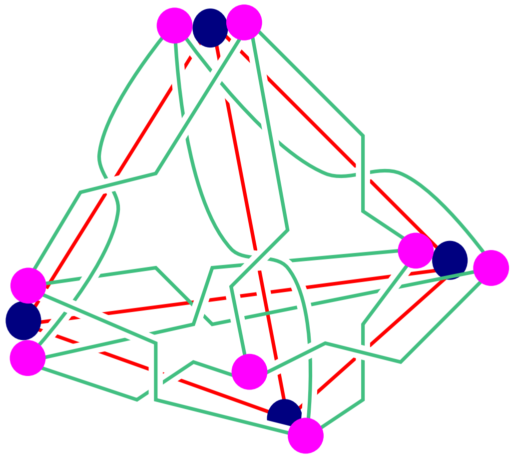

図 9　空間 (2, 2)-被覆の例

命題 4.5. 正多面体同士の空間 (n, m)-被覆する組み合わせは以下のみである.

(1) 六面体が四面体を $(2, 2)$-被覆する
(2) 十二面体が四面体を $(5, 5)$-被覆する
(3) 二十面体が四面体を $(5, 3)$-被覆する

定理 4.6. 正多面体同士の空間被覆は全て自明な空間被覆である.

具体的に構成することによって, 証明が得られる.

参考文献

[1] 新國亮 (2022), 「空間グラフのトポロジー Conway-Gordon の定理をめぐって」, サイエンス社