

# レンズ空間の simple (1, 1)-knot の手術から得られる $\lambda = -2$ の ホモロジー球面について

田内 光一

2023年12月25日

## 1 Introduction

ホモロジー球面内の結び目に沿った Dehn 手術でレンズ空間を構成することをレンズ空間手術という。レンズ空間手術を実現する結び目には, Torus knot や Cable knot などが知られている。

Berge [2] によって double primitive knot が定義される。

Berge は, 現在までに判明している  $S^3$  のレンズ空間手術を実現する結び目が全て double primitive knot であることから, 以下の予想を与えた。

**Conjecture 1.1** (Berge [2]).  $S^3$  のすべての整数係数レンズ空間手術を与える結び目は, double primitive knot である。

論文 [2] 内ではこの予想と共に,  $S^3$  の double primitive knot は, その手術から得られるレンズ空間内の simple (1, 1)-knot であるという考察により,  $S^3$  を得るレンズ空間内の simple (1, 1)-knot に沿った手術について, 10 の族を構成している。Berge 予想は未解決であるが, Greene [4] によって, この族が  $S^3$  を得るレンズ空間内の simple (1, 1)-knot の手術の全てであることが証明された。

Berge の研究に続き, 丹下は [6] においてレンズ空間の simple (1, 1)-knot の手術で  $\Sigma(2, 3, 5)$  になる手術について, 20 の族を構成している。この結果も Caudell [3] によって, この族が  $2g \leq p$  となる simple (1, 1)-knot の手術で  $\Sigma(2, 3, 5)$  になるもの全てであることが証明された。

また [7] では, 次の結果が得られている。  $G(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, (c_1, c_2))$  は Definition 2.4 で定義される。

**Theorem 1.2.** 以下に示すホモロジー球面は, レンズ空間の simple (1, 1)-knot の手術から得られる。

- $\Sigma(2, 2s + 1, 2(2s + 1) \pm 1)$  ( $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ )
- $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$  ( $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ )
- $G(\{2, 3\}, \{P/Q, m/(m-1)\}, (0, 0))$  ただし,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $P, Q, m$  は  $-5P + 5mQ - Pm = \pm 1$  を満たす。
- $G(\{2, 5\}, \{P/Q, m/(m-1)\}, (0, 0))$  ただし,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $P, Q, m$  は  $-7P + 7mQ - 3Pm = \pm 1$  を満たす。

**Question.** レンズ空間の simple (1, 1)-knot の手術によって得られるホモロジー球面には, 他にどのようなものが現れるだろうか。

Casson 不変量  $\lambda = 0, -1$  でいえば, Berge [2] で  $S^3$  上の族を構成し, 丹下 [6] は  $\Sigma(2, 3, 5)$  におけるレンズ空間手術を構成し, [7] では  $\Sigma(2, 3, 7)$  の族を構成した。そこで本論文のテーマを以下のように設定した。

**Main Question.** レンズ空間の simple  $(1,1)$ -knot の手術で得られるホモロジー球面に Casson 不変量  $\lambda = -2$  という条件を与えると, どのようなホモロジー球面が得られるのだろうか?

## 2 Preliminary

### 2.1 Dual class.

レンズ空間  $L(p, q)$  を unknot の  $p/q$ -surgery ( $p/q \in \mathbb{Q}$ ) とする.  $Y$  を 3次元多様体,  $K \subset Y$  を null-homologous な結び目とする.  $\mathcal{N}(K)$  を  $K$  の管状近傍とし,  $\ell \subset \partial\mathcal{N}(K)$  を  $K$  の longitude,  $m \subset \partial\mathcal{N}(K)$  を  $K$  の meridian とする.  $K$  のデー手術を  $[Y - \mathcal{N}(K)] \cup S^1 \wedge D^2$  と定義し,  $\{pt\} \times \partial D^2 \subset S^1 \times \partial D^2$  の像が  $pm + q\ell$  となる時,  $K \subset Y$  の  $p/q$ -surgery ( $p/q \in \mathbb{Q}$ ) といひ  $Y_{p/q}(K)$  とする. また, この  $p/q$  を slope と呼ぶ.  $Y_p(K)$  がレンズ空間の時, レンズ空間の種数 1 の Heegaard splitting でのソリッドトーラスの core を 1 とする同一視から  $H_1(Y_p(K)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  が得られる.  $H_1(Y_p(K)) \ni [\tilde{K}] = k$  を dual class と呼ぶ.

このとき, 以下が成り立つ.

**Lemma 2.1** ([6]).  $p$  を正の整数とする.  $L(p, q) = Y_p(K)$  とし, その dual class が  $k$  とする. このとき,  $k^2 = q \pmod{p}$  である.

したがって, このとき  $(k, p)$  は互いに素であり, この組をレンズ空間手術のパラメータという.

### 2.2 Simple $(1,1)$ -knot.

次に, simple  $(1,1)$ -knot について定義する.

**Definition 2.2.** レンズ空間  $L(p, q)$  の種数 1 の Heegaard splitting をとり, その 2 つの meridian disk を  $D_i (i = 0, 1)$  とする. このとき,  $D_i$  の中に埋め込まれた arc  $K_i$  について,

$$\partial D_i \cap K_i = \partial K_i$$

を満たすものを考える.  $L(p, q)$  の結び目  $K$  が simple  $(1,1)$ -knot とは, そのような  $K_0$  と  $K_1$  の union として得られる結び目のことをいう. また,  $(1,1)$  とは多様体の Heegaard 種数が 1 で, 結び目が 1-bridge knot であることを表している.

$\partial D_0 = \alpha$ ,  $\partial V_0$  における  $\partial D_1$  の像を  $\beta$  とする. このとき, 最小交点  $\alpha \cap \beta$  は  $p$  個の点からなる (図 2). この点を順に  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  とする.

$V_0$  内の simple  $(1,1)$ -knot の arc  $K_0$  が meridian disk  $D_0$  の点 0 と点  $k$  を結んでいるとする. このような simple  $(1,1)$ -knot は一意に定まり, それを  $\tilde{K}_{p,q,k}$  とする. Definition 2.2 より,  $\tilde{K}_{p,q,k}$  は  $\tilde{K}_{p,q,-k}$  と isotopic である.  $\tilde{K}_{p,k^2,k}$  を  $\tilde{K}_{p,k}$  と表す.

**Theorem 2.3.**  $(p, k)$  を互いに素な 2 つの正の整数とする. このとき,  $L(p, k^2) \supset \tilde{K}_{p,k}$  のある整数手術はホモロジー球面である. また, そのようなホモロジー球面は一意に定まり,  $Y_{p,k}$  とする.

上記の  $\tilde{K}_{p,k}$  のホモロジー球面  $Y_{p,k}$  を生む手術による像を  $K_{p,k}$  とすると, 手術は  $(Y_{p,k})_p(K_{p,k}) = L(p, k^2)$  と書くことができる. ホモロジー球面を得るレンズ空間  $L(p, k^2)$  の simple  $(1,1)$ -knot  $\tilde{K}_{p,k}$  の整数手術を  $\tilde{K}_{p,k}$  に沿ったホモロジー球面手術という.

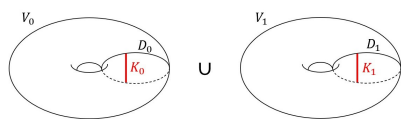


図1 Heegaard splitting における simple (1,1)-knot

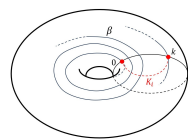


図2  $V_i$  内の  $\tilde{K}_{p,k}$  の位置

レンズ空間手術とホモロジー球面手術の関係は以下のような模式図で表される。

$$(Y_{p,k}, K_{p,k}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{レンズ空間手術}} \\ \xleftarrow{\text{ホモロジー球面手術}} \end{array} (L(p, k^2), \tilde{K}_{p,k})$$

### 2.3 Homology spheres by $\tilde{K}_{p,k}$ surgery.

本節では、いくつかのホモロジー球面について定義する。

**Definition 2.4.** 図3のようなグラフから得られる多様体を  $G(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, (c_1, c_2))$  と表す。例えば、 $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$  は図4のような Kirby diagram によって表現される。

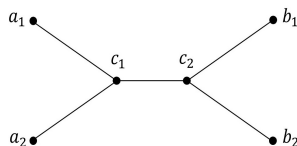


図3  $G(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, (c_1, c_2))$  を与えるグラフ

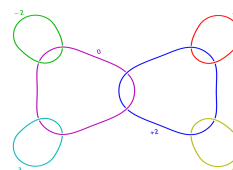


図4  $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$

**Definition 2.5** ([6]). Brieskorn 球面を以下のように定義し、 $\Sigma(a, b, c)$  と表す。また  $\Sigma(a, b, c)$  は、3つのファイバーを持つ  $S^2$  を底空間とする3次元ザイフェルト多様体である。

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^a + z_2^b + z_3^c = 0\} \cap S^5.$$

Brieskorn 球面がホモロジー球面であるとき、整数  $(a, b, c)$  はどの2つも互いに素であり、図5のような Kirby diagram によって表現される。

**Definition 2.6.** 境界が3次元ホモロジー球面であり4次元球面でない、コンパクトで可縮な4次元多様体で1-ハンドルと2-ハンドルを同数持ち、3-ハンドルを持たないハンドル分解を持つものを Mazur 多様体という。また、図6のような Kirby diagram で表現される Mazur 多様体を  $W^-(l, k), W^+(l, k)$  と表す。

## 3 Pillowcase method.

本章では、 $\tilde{K}_{p,k}$  の Kirby diagram を得る方法について紹介する。詳しくは [6] を参照されたい。

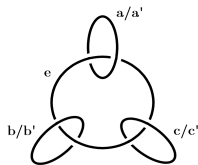


図5 Brieskorn 球面の Kirby diagram

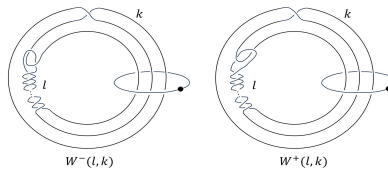


図6  $W^-(l,k), W^+(l,k)$  の Kirby diagram

レンズ空間  $L(p, k^2)$  の  $\tilde{K}_{p,k}$  の diagram を得るために,  $L(p, q)$  の involution  $\tau$  について考える. ここで, すべての Heegaard 種数  $g = 1$  の向き付け可能閉 3次元多様体は, bridge number 2 のリンク  $L$  上で分岐した  $S^3$  の double cover である. よって, involution  $\tau$  により得られる 2-bridge knot 上で  $\tilde{K}_{p,k}/\tau$  の diagram を与え, その double cover をとることで  $\tilde{K}_{p,k}$  の diagram を実現する.

$V_0 \cup V_1$  をレンズ空間  $L(p, q)$  の種数 1 の Heegaard splitting とする.  $m_i, l_i$  ( $i = 0, 1$ ) をそれぞれ  $V_0$  の meridian と longitude,  $m'_i, l'_i$  ( $i = 0, 1$ ) をそれぞれ  $V_1$  の meridian と longitude とする. また,  $\bar{V}_i = V_i/\tau$  とする.

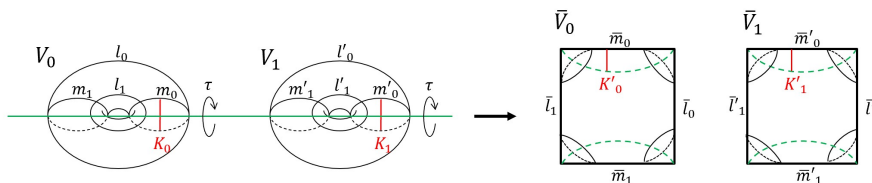


図7 レンズ空間の involution

レンズ空間の involution は図7のように表すことができる. ここで, 緑線は involution の fixed point set を表しており,  $\bar{V}_i$  内では図7の右図のようになる. この involution による fixed point set の像が 2-bridge knot を構成する.  $\bar{V}_i$  は 3-ball であり, これを pillowcase とよぶ.

pillowcase にはレンズ空間  $L(p, q)$  の slope が写され, pillowcase の表面に描く. 図8のように,  $P/Q > 0$  の場合 pillowcase の左上に + を,  $P/Q < 0$  の場合 pillowcase の左上に - を書く. また, 上辺に  $P$ , 左辺に  $Q$  と記載されている場合, それぞれ slope との交点数を表している.

**Example.**  $3_1$  上のレンズ空間手術  $S^3_5(3_1) = L(5, 2^2)$  の場合

例として  $L(5, 2^2)$  に対し実際に pillowcase method を適用する. まず, 連分数展開をすると,

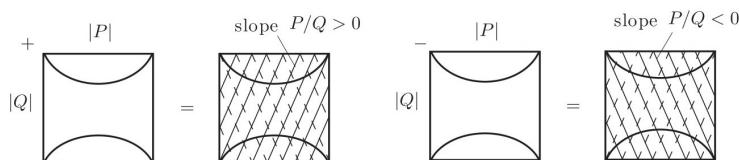


図8 pillowcase の slope の向き ([6] Figure 5. より引用)

$$5/4 = 1 - 1/(-4) = [1, -4]$$

になる.

図9において, (1)-(5)はpillowcase methodの様子を, (6),(7)はsimple (1,1)-knot  $\tilde{K}_{5,2}$ のdiagramを表している. (1)-(2),(3)-(4)では, slopeを解く操作の影響を受けないように $\tilde{K}_{5,2}/\tau$ をslopeに沿って移動させている. (2)-(3),(4)-(5)では, 実際にひねりを解く操作をしている. (5)で1/0-slopeになったため, pillowcase methodの操作は終了する. (6)は $\tilde{K}_{5,2}/\tau$ のdiagramを, (7)はdouble coverをとり実際に $\tilde{K}_{5,2}$ のdiagramを描いている.

ここで,  $\tilde{K}_{5,2}$ に係数が-1となっているが, これは(7)のdiagram全体でホモロジー球面となるよう, 係数を決定している. つまり, この係数が $\tilde{K}_{5,2}$ に沿ったホモロジー球面手術における手術係数である. 最後に(7)のdiagramにKirby moveを施し変形することで,  $S^3$ と特定できる. よって,  $L(5, 2^2)$ のホモロジー球面手術から得られるホモロジー球面は $S^3$ であることが示される. また $\tilde{K}_{5,2}$ にmeridian  $\delta$ をおき, それ以外のリンクを $S^3$ に変形させることで,  $\delta$ は $S^3$ 上のtrefoilすなわち $3_1$ になる.

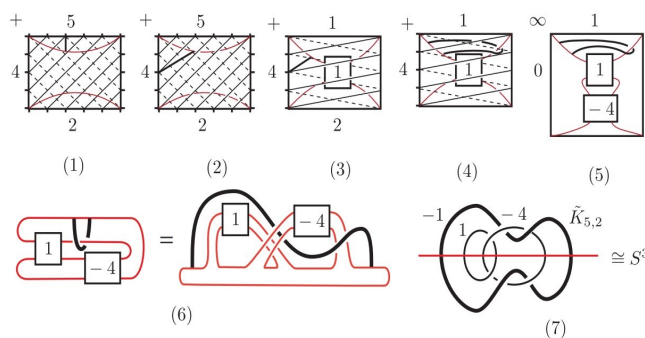


図9  $S^3(3_1) = L(5, 2^2)$ へのpillowcase methodの適用 ([6] Figure 12. より引用)

## 4 Main results and several Conjectures.

本論文の主結果は,  $p < 1200$ におけるホモロジー球面手術から得られる $\lambda = -2$ のホモロジー球面を特定したこと, またそのホモロジー球面を得るレンズ空間の手術のパラメータ $(p, k)$ の無限族を構成したことである.

**Main Theorem 1.**  $p < 1200$ のレンズ空間 $L(p, k^2)$ のホモロジー球面手術から得られる,  $\lambda = -2$ を満たすホモロジー球面 $Y_{p,k}$ は次の8つのみである.

- $\Sigma(2, 3, 11)$ ,  $\Sigma(2, 3, 13)$ ,  $\Sigma(2, 5, 7)$ ,  $\Sigma(3, 4, 5)$
- $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$ ,  $G(\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1))$
- $\partial W^-(0, 6)$ ,  $\partial W^-(0, 7)$

*proof.*

最初に,  $p < 1200$ のパラメータ $(p, k)$ を求める.

- $K_{p,k}$  に対する Alexander 多項式の公式 [5]

$$\Delta_{K_{p,k}}(t) \doteq \frac{F(t)}{t^{k-1} + t^{k-2} + \dots + t + 1}.$$

- Casson 不変量に関する公式

$$\lambda(\Sigma_{\frac{p}{q}}(K)) = \lambda(\Sigma) - \lambda(L(p, q)) + \frac{q}{2p} \Delta''_K(1)$$

ただし,  $\lambda(L(p, q)) = s(q, p)/2$ . ここで,  $s(a, b)$  は Dedekind sum を表す.

に対し,  $q = 1, \Sigma_p(K_{p,k}) = L(p, k^2), \lambda(\Sigma) = -2$  を代入することにより, 以下の関係式が導かれる.

$$s(k^2, p) = \frac{-p^2 - 21p - 2 + 6\Delta''_{K_{p,k}}(1)}{6p}. \tag{1}$$

したがって, この関係式を満たす互いに素な整数の組  $(k, p)$  を求めればよい. 実際に得られたパラメータについては図 13 内に記載している.

各組に pillowcase method を適用し, 得られた 2-bridge knot の double cover をとる (Appendix 図 13 に diagram を与える). 最後に double cover の Kirby diagram がどんなホモロジー球面を表しているのかを Kirby move を用いて特定することで, 定理が証明される (図 13 参照). 例として  $(23, 190)$  に対して証明する. 図 10 をご覧いただきたい. (1)-(6) は pillowcase method による diagram の変化を描いている. (7) は 2-bridge knot を示しており, その double cover を (8)-(9) で与えている. (9) がホモロジー球面の Kirby diagram である. 得られた diagram に Kirby move を施すことで図 11 のように変形でき,  $(23, 190)$  のホモロジー球面手術で  $\Sigma(2, 5, 7)$  が得られることが証明される.  $\square$

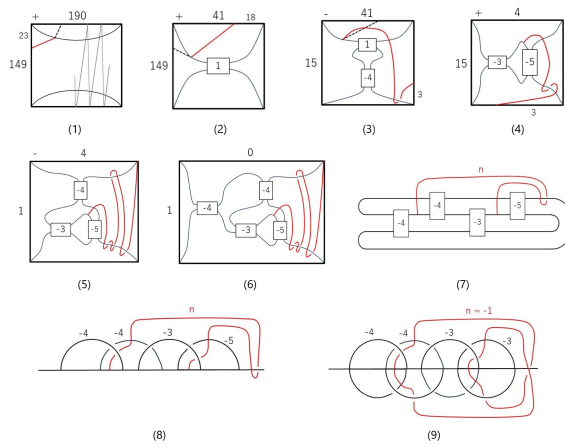


図 10  $(23, 190)$  への pillowcase method の適用.  $\tilde{K}_{p,k}$  は赤線で示している. (線の上下が記載されていない場合, 赤線が上を通るとする).

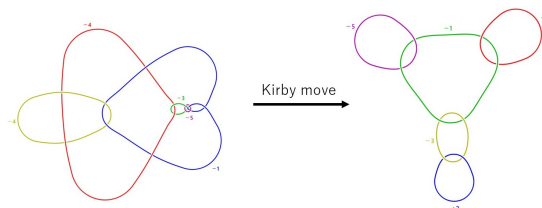


図 11 (23, 190) から得られる diagram への Kirby move の適用. 途中計算については Appendix 図 13 参照.

次に, パラメータ  $(k, p)$  の無限族を以下に示す. 今回証明は省略する.

**Main Theorem 2.** 表 1 - 表 5 に示すレンズ空間手術のパラメータ  $(k(\ell), p(\ell))$  の族は, それぞれ以下のホモロジー球面  $Y_{p,k}$  を得る. ただし  $\ell \neq 0$ . つまり, これらのホモロジー球面の double primitive knot  $K_{p,k}$  の正の整数手術からレンズ空間の無限族  $\{L(p(\ell), k(\ell)^2) | \ell \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\}$  が得られる.

- 表 1 :  $\Sigma(2, 3, 11)$ ,  $\Sigma(2, 3, 13)$
- 表 2 :  $\Sigma(3, 4, 5)$
- 表 3 :  $\Sigma(2, 5, 7)$
- 表 4 :  $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$
- 表 5 :  $G(\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1))$

$\ell = 0$  の場合は, 同様の pillowcase method が適用できないため除いてある.

$\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$  については, 一部 [7] によって無限族が得られていた.

$p(\ell)$	$k(\ell)$	$p(\ell)$	$k(\ell)$
$45\ell^2 + 35\ell + 7$	$5\ell + 2$	$55\ell^2 + 45\ell + 9$	$5\ell + 2$
$66\ell^2 + 21\ell + 2$	$6\ell + 1$	$78\ell^2 + 27\ell + 2$	$6\ell + 1$
$91\ell^2 + 51\ell + 7$	$7\ell + 2$	$105\ell^2 + 61\ell + 9$	$7\ell + 2$
$91\ell^2 + 103\ell + 29$	$7\ell + 4$	$105\ell^2 + 121\ell + 35$	$7\ell + 4$
$220\ell^2 + 79\ell + 7$	$11\ell + 2$	$264\ell^2 + 97\ell + 9$	$11\ell + 2$
$220\ell^2 + 119\ell + 16$	$11\ell + 3$	$264\ell^2 + 145\ell + 20$	$11\ell + 3$
$264\ell^2 + 40\ell + 2$	$12\ell + 1$	$312\ell^2 + 56\ell + 2$	$12\ell + 1$
$264\ell^2 + 84\ell + 7$	$12\ell + 2$	$312\ell^2 + 108\ell + 9$	$12\ell + 2$
$264\ell^2 + 224\ell + 47$	$12\ell + 5$	$312\ell^2 + 256\ell + 53$	$12\ell + 5$
$90\ell^2 + 27\ell + 2$	$45\ell + 7$	$54\ell^2 + 33\ell + 5$	$27\ell + 8$
$90\ell^2 + 63\ell + 11$	$45\ell + 16$	$54\ell^2 + 21\ell + 2$	$27\ell + 5$
$78\ell^2 + 47\ell + 7$	$13\ell + 4$	$66\ell^2 + 61\ell + 14$	$11\ell + 5$
$78\ell^2 + 83\ell + 22$	$13\ell + 7$	$66\ell^2 + 49\ell + 9$	$11\ell + 4$
$55\ell^2 + 49\ell + 11$	$11\ell + 5$	$91\ell^2 + 57\ell + 9$	$13\ell + 4$
$55\ell^2 + 39\ell + 7$	$11\ell + 4$	$91\ell^2 + 99\ell + 27$	$13\ell + 7$
$46\ell^2 + 27\ell + 4$	$23\ell + 7$	$106\ell^2 + 29\ell + 2$	$53\ell + 7$
$46\ell^2 + 19\ell + 2$	$23\ell + 5$	$106\ell^2 + 77\ell + 14$	$53\ell + 19$

表 1  $\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$  を得る  $(k, p)$  の無限族 [7]

$p(\ell)$	$k(\ell)$	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$60\ell^2 + 9\ell$	$12\ell + 1$	$[3, 2, \ell, -2, 1, -\ell, -4]$
$60\ell^2 + 7\ell$	$15\ell + 1$	$[-3, \ell, 3, 2, -\ell, -3]$
$60\ell^2 + 17\ell + 1$	$15\ell + 2$	$[-4, -\ell, 2, 3, \ell, -3]$
$152\ell^2 + 49\ell + 4$	$19\ell + 3$	$[3, 3, -\ell, -4, -5, \ell]$
$152\ell^2 + 65\ell + 7$	$19\ell + 4$	$[3, 3, -\ell, -5, -4, \ell]$
$240\ell^2 + 16\ell$	$24\ell + 1$	$[2, -2, \ell, 2, -3, 2, -\ell, -3]$
$240\ell^2 + 36\ell + 1$	$24\ell + 2$	$[2, -2, \ell, 3, 2, 3, -\ell, -4]$
$86\ell^2 + 37\ell + 4$	$43\ell + 9$	$[2, -\ell, -3, 3, -4, \ell]$
$86\ell^2 + 49\ell + 7$	$43\ell + 12$	$[2, -\ell, -4, 3, -3, \ell]$

表 2  $\Sigma(3, 4, 5)$  を得る  $(k, p)$  の無限族

$p(\ell)$	$k(\ell)$	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$35\ell^2 + 21\ell + 3$	$7\ell + 2$	$[3, 2, -\ell, -7, \ell]$
$117\ell^2 + 37\ell + 3$	$13\ell + 2$	$[2, -4, -\ell, 3, -4, \ell]$
$117\ell^2 + 89\ell + 17$	$13\ell + 5$	$[2, -4, \ell, -4, 3, -\ell]$
$204\ell^2 + 49\ell + 3$	$17\ell + 2$	$[2, -2, 2, -\ell, -2, 1, -5, \ell]$
$51\ell^2 + 25\ell + 3$	$17\ell + 4$	$[-3, -\ell, 1, -2, -6, \ell]$
$204\ell^2 + 121\ell + 18$	$17\ell + 5$	$[2, -2, 2, -\ell, -6, -3, \ell]$
$51\ell^2 + 43\ell + 9$	$17\ell + 7$	$[-3, -\ell, 1, -5, -3, \ell]$
$280\ell^2 + 24\ell$	$20\ell + 1$	$[2, -3, \ell, 3, 3, -\ell, -5]$
$280\ell^2 + 60\ell + 3$	$20\ell + 2$	$[2, -3, -\ell, 2, -5, -2, \ell, 2]$
$280\ell^2 + 256\ell + 59$	$20\ell + 9$	$[2, -3, -\ell, 2, 2, -2, \ell, -5]$
$92\ell^2 + 33\ell + 3$	$23\ell + 4$	$[-4, -\ell, 3, 2, -4, \ell]$
$92\ell^2 + 79\ell + 17$	$23\ell + 10$	$[-4, \ell, -4, 2, 3, -\ell]$

表3  $\Sigma(2, 5, 7)$  を得る  $(k, p)$  の無限族

$p(\ell)$	$k(\ell)$	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$69\ell^2 + 37\ell + 5$	$23\ell + 6$	$[-3, -\ell, 2, 4, -3, \ell]$
$69\ell^2 + 55\ell + 11$	$23\ell + 9$	$[-3, -\ell, 1, -2, 3, -2, \ell]$
$42\ell^2 + 5\ell$	$14\ell + 1$	$[-3, \ell, 2, -3, -\ell, 2]$
$42\ell^2 + 19\ell + 2$	$14\ell + 3$	$[-3, -\ell, 1, -3, -2, \ell, 2]$
$85\ell^2 + 41\ell + 5$	$17\ell + 4$	$[3, 2, -\ell, -2, 2, -3, \ell]$
$85\ell^2 + 61\ell + 11$	$17\ell + 6$	$[3, 2, -\ell, -3, 2, -2, \ell]$

表4  $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$  を得る  $(k, p)$  の無限族

$p(\ell)$	$k(\ell)$	$p/q = [a, b, c, \dots]$
$30\ell^2 + 5\ell$	$10\ell + 1$	$[3, \ell, -5, -\ell, 2]$

表5  $G(\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1))$  を得る  $(k, p)$  の無限族

$\Sigma(2, 3, 11)$	$\Sigma(2, 3, 13)$	$\Sigma(2, 5, 7)$	$\Sigma(3, 4, 5)$
(15, 103)	(15, 122)	(23, 190)	(21, 181)
(17, 134)	(17, 155)	(27, 263)	(23, 142)
(19, 166)	(19, 195)		(27, 76)
(21, 205)	(21, 236)		(29, 127)
(9, 151)	(9, 173)		
(15, 416)	(15, 484)		

$G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$	$\partial W^-(0, 6)$	$\partial W^-(0, 7)$
(23, 112)	(19, 84)	(22, 85)
(23, 155)	(21, 101)	(25, 111)
(33, 322)	(25, 146)	(28, 179)
(37, 290)	(29, 192)	(33, 94)
	(33, 194)	(37, 141)
	(37, 159)	(37, 208)

表6 表1 - 表5 以外のパラメータ  $(k, p)$  ( $p < 1200$ )

無限族が与えられなかった  $\Sigma(2, 3, 11)$ ,  $\Sigma(2, 3, 13)$  を得るパラメータ  $(k, p)$  に対し, 以下の関係式が成り立つ. この結果にどのような意味があるのかは未だ判明していない.

**Theorem 4.1.** 表6 の二重線に囲まれた  $\Sigma(2, 3, 11), \Sigma(2, 3, 13)$  を得るパラメータ 8 つについて, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Sigma(2, 3, 11)_p(K_{p,k}) &= L(p, q) \\ \Sigma(2, 3, 13)_q(K_{q,k}) &= L(q, p). \end{aligned}$$

*proof.*

計算により簡単に導かれる. 例えば,

$$\begin{aligned} (15, 103) : k^2 &= 122 \pmod{103} \\ (15, 122) : k^2 &= 103 \pmod{122} \end{aligned}$$

である. □

Main Theorem 1., 2. から, 以下の予想を与える.

**Conjecture 4.2.** レンズ空間  $L(p, k^2)$  のホモロジー球面手術から得られる,  $\lambda = -2$  を満たすホモロジー球面  $Y_{p,k}$  は, 以下で全てである

- $\Sigma(2, 3, 11)$ ,  $\Sigma(2, 3, 13)$ ,  $\Sigma(2, 5, 7)$ ,  $\Sigma(3, 4, 5)$



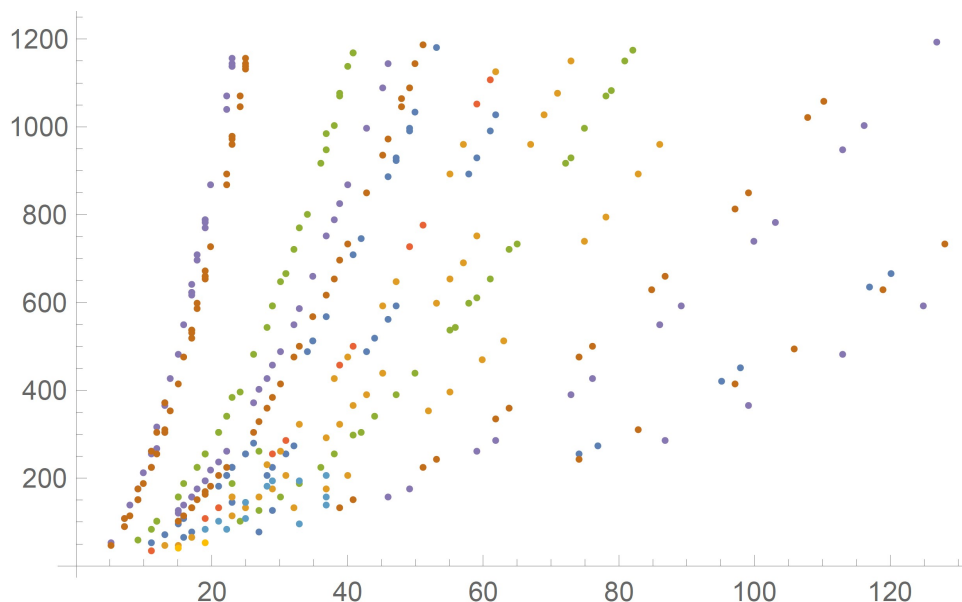


図 12  $p < 1200$  のパラメータをプロットした図. 各色は次のホモロジー球面を表している. 紫:  $\Sigma(2, 3, 13)$ , 橙:  $\Sigma(2, 3, 11)$ , 緑:  $\Sigma(2, 5, 7)$ , 青:  $\Sigma(3, 4, 5)$ , 薄橙:  $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$ , 赤:  $G(\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1))$ , 水:  $\partial W^-(0, 6)$ , 黄:  $\partial W^-(0, 7)$ . ホモロジー球面毎のプロットは Appendix 参照.

- $G(\{-2, -3\}, \{3, 2\}, (0, 2))$ ,  $G(\{2, 3\}, \{-2, -7\}, (-2, -1))$
- $\partial W^-(0, 6)$ ,  $\partial W^-(0, 7)$

図 12 をご覧いただきたい. この図は  $p < 1200$  のパラメータ  $(k, p)$  をプロットしたものである. 色ごとにホモロジー球面が分類されている. 各ホモロジー球面を得るパラメータ  $(k, p)$  がいくつかの放物線上に乗っているように見えるが, これは今回得られた無限族を表している. またこの図から, 無限族が得られなかったパラメータは原点付近にのみ密集していることが読み取れる. これは Conjecture 4.2 の状況証拠になりうる.

次に,  $\partial W^-(0, 6)$ ,  $\partial W^-(0, 7)$  の無限族が得られなかったことから, 以下の予想を与える.

**Conjecture 4.3.**  $\partial W^-(0, 6), \partial W^-(0, 7)$  を得るホモロジー球面手術は有限個である. また, そのような結び目は有限個である.

また, 証明は省略するが任意の整数  $t$  に対して  $\partial W^-(0, t)$  は  $\lambda = -2$  かつ Heegaard 種数  $g \leq 2$  であるため, Main Theorem 1. の説明中の式 (1) を満たす  $\partial W^-(0, 6), \partial W^-(0, 7)$  以外の  $\partial W^-(0, t)$  を得るパラメータ  $(k, p)$  が存在する可能性は十分にある.

**Question 4.4.**  $\partial W^-(0, t)$  ( $t \in \mathbb{Z}, t \leq 1, 8 \leq t$ ) を得るホモロジー球面手術は存在するか.

## 5 Appendix

本章では付録として、ホモロジー球面毎のパラメータのプロット図、ホモロジー球面毎のパラメータ  $(k, p)$  に対する pillowcase method と Kirby diagram, 証明の際に行った Kirby move の KLO による計算結果を以下の One drive のページに掲載している. [1] から KLO-Software をダウンロードの上, 適宜参照いただきたい.



図 13 OneDrive(File name : lambda=-2 K.Tauchi)

## 参考文献

- [1] KLO-Software.net. <https://community.middlebury.edu/~mathanimations/klo/>.
- [2] J. Berge. Some knots with surgeries yielding lens spaces. *arXiv preprint arXiv:1802.09722*, 2018.
- [3] J. Caudell. On lens space surgeries from the poincaré homology sphere, 2023.
- [4] J. E. Greene. The lens space realization problem. *Annals of Mathematics*, pages 449–511, 2013.
- [5] K. Ichihara, T. Saito, and M. Teragaito. Alexander polynomials of doubly primitive knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(2):605–615, 2007.
- [6] M. Tange. Lens spaces given from l-space homology 3-spheres. *Experimental Mathematics*, 18(3):285–301, 2009.
- [7] M. Tange. Homology spheres yielding lens spaces. *Proceedings of Gokova Geometry-Topology*, pages 73–121, 2018.