

結び目の外部空間のスケイン加群に関連したペアリング について

井町翔太朗 (京都大学数理解析研究所)

1 導入

1980年代半ばに Jones [3] は、Jones 多項式と呼ばれる、絡み目の不変量を定義した。その後、Kauffman [4] は、次の関係式で定義される Kauffman bracket を用いて、Jones 多項式を再構成した: $\text{⊗} = A \text{⊙} + A^{-1} \text{⊕}$, $\text{⊙} = (-A^2 - A^{-2}) \text{⊚}$. (ここで、 A は不定元。) これをうけて、Przytycki [8] と Turaev [9] は 1990 年前後に独立に、有向 3 次元多様体 M 内の枠付き絡み目のイソトピー類全体が張る $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}]$ -加群を、同じ関係式で割ることで、スケイン加群 $\mathcal{S}_A(M)$ を定義した。スケイン加群は活発に研究されてきたが、その計算は一般には難しい。具体的な計算例として、例えば結び目 K の外部空間 E_K のスケイン加群 $\mathcal{S}_A(E_K)$ に限定して言えば、[1, 2, 5, 6] などが挙げられる。(ただし、結び目 $K \subset S^3$ の外部空間 E_K とは、 S^3 から K の管状近傍 N_K を取り除いた空間の閉包である。)

結び目 K に対して、管状近傍 N_K と外部空間 E_K を自然に貼り合わせると 3 次元球面 S^3 になることから、ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K,A} : \mathcal{S}_A(N_K) \otimes \mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathcal{S}_A(S^3)$ が定義される。ここで、3 次元球面 S^3 のスケイン加群 $\mathcal{S}_A(S^3)$ は係数環 $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}] \cdot \emptyset \cong \mathbb{Q}[A^{\pm 1}]$ と等しいことが知られている。また、ソリッドトーラス N_K のスケイン加群 $\mathcal{S}_A(N_K)$ は多項式環 $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]$ と同型であることも知られている。(K に 0-枠をつけたものの i 重化が代表する元が λ^i に対応する。) したがって、ペアリングは、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K,A} : \mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda] \otimes \mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}]$ と書き直される。このペアリングの right kernel は自明である、つまり、ペアリングの誘導写像 $\mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ は単射である、と予想されている [5]。誘導写像の単射性は、 $\mathcal{S}_A(E_K)$ を $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ の部分加群として研究できることを意味するため、right kernel の自明性およびペアリングそれ自体が重要であるが、現状わかっていることは少ない。

わたしは [10] において、不定元 A に 1 のべき根 ζ を”代入”した場合にこのペアリングについて考えた。つ

まり、係数環をローラン多項式環 $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}]$ から円分体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ にとりかえて、ペアリング

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta} : \mathbb{Q}(\zeta)[\lambda] \otimes \mathcal{S}_{\zeta}(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$$

を同様に定義したものについて考えた。より具体的な主結果は、以下のようなものである。ツイスト結び目と呼ばれる結び目 K の族と、1 の原始 $4N$ 乗根 ζ に対して、ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta}$ の、Jones-Wenzl べき等元を用いた基底に関する行列表示を与えた (定理 3.1)。この行列表示は、縦と横のサイズがともに無限大であるが、有限のサイズの行列の外では 0 になっている。この有限性は、Jones-Wenzl べき等元に”カップをつける”と 0 になるという性質と、 $N - 1$ 番目の Jones-Wenzl べき等元を平面の中で閉じると 0 になるという性質を用いて示される。さらに、この行列表示を用いて、right kernel と left kernel の非自明性を示し、また、ある仮定の下で、left kernel の簡潔な表示を得た。

パラメータが不定元 A の場合に、ペアリングの誘導写像 $\mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ により $\mathcal{S}_A(E_K)$ を $\mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ の部分加群として研究したいという動機により、無限個の 1 のべき根 ζ におけるペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta}$ の情報から、 $\mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ の像の情報を引き出せないかという自然な問いが生まれるが、本論文での 1 のべき根における結果から、誘導写像 $\mathcal{S}_A(E_K) \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}][\lambda]^*$ の像が有限生成でないこともわかる。

以降の構成は次のようである。まず、2 節で主結果を述べるための準備をする。次に 3 節で主結果を述べ、4 節で証明のための準備をしたのち、5 節で証明の概要を述べる。

2 準備

以降、 D^{n+1} で $(n + 1)$ 次元球体を表し、 S^n で n 次元球面を表す。

2.1 スケイン加群・スケイン代数の定義

ζ を 1 のべき根とし、 $\mathbb{Q}(\zeta)$ を円分体とする。有向 3 次元多様体 M のスケイン加群 $\mathcal{S}_{\zeta}(M)$ とは、 M 内の枠付き絡み目のイソトピー類全体で張られる $\mathbb{Q}(\zeta)$ -ベクトル空間を、図 1 の関係式で割ったものである。また、

図 1 スケイン加群の定義関係式 (ただし、各関係式について、両辺に現れる枠付き絡み目は、点線で表される 3 次元球体の外では一致していて、3 次元球体の内部では図のように異なっているようなものである。)

有向曲面 S のスケイン代数 $\hat{\mathcal{S}}_{\zeta}(S)$ とは、 $S \times [0, 1]$ のスケイン加群 $\mathcal{S}_{\zeta}(S \times [0, 1])$ に、 $[0, 1]$ 方向の積み重ねに

より積構造をいれたものである。

2.2 m -ツイスト結び目の外部空間のスケイン加群

有向 3 次元多様体 M 内の l 成分枠付き絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_l$ に対して、 L_1, \dots, L_l の互いに交わらない管状近傍を N_1, \dots, N_l とする。 L_i の代表する $\mathcal{S}_\zeta(N_i)$ の元を λ_i とすると、アニュラスのスケイン代数が多項式環であることより、 $\mathcal{S}_\zeta(N_i)$ は多項式環 $\mathbb{Q}(\zeta)[\lambda_i]$ と自然に同一視される。このとき、埋め込み $N_1 \cup \dots \cup N_l \hookrightarrow M$ は、線形写像

$$\{\cdot, \dots, \cdot\}_{M, (L_1, \dots, L_l)} : \mathbb{Q}(\zeta)[\lambda_1] \otimes \dots \otimes \mathbb{Q}(\zeta)[\lambda_l] = \mathcal{S}_\zeta(N_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_\zeta(N_l) \rightarrow \mathcal{S}_\zeta(M)$$

を定める。

K を m -ツイスト結び目とし、その外部空間の 0-枠結び目 X, Y を図 2 で定める。

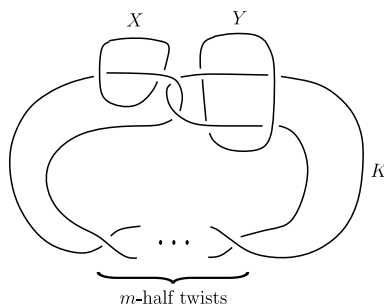


図 2

m -ツイスト結び目 K の外部空間 E_K のスケイン加群 $\mathcal{S}_\zeta(E_K)$ の基底として、

$$\{\lambda_X^i, \lambda_Y^j\}_{E_K, (X, Y)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \dots, m)$$

がとれることが示されている [2]。

3 主結果

結び目 $K \subset S^3$ に対して、 N_K を K の管状近傍とし、 E_K を K の外部空間、つまり、 $S^3 \setminus N_K$ の閉包とする。 N_K と E_K の自然な貼り合わせにより、ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta} : \mathcal{S}_\zeta(N_K) \otimes \mathcal{S}_\zeta(E_K) \rightarrow \mathcal{S}_\zeta(S^3) = \mathbb{Q}(\zeta)$ が定義される。

また、(第 2 種の)Chebyshev 多項式 $S_n(\lambda)$ が、 $S_n(\lambda) = \lambda S_{n-1}(\lambda) - S_{n-2}(\lambda)$, $S_1(\lambda) = \lambda$, $S_0(\lambda) = 1$ という漸化式により定義される。正の整数 N に対して、多項式 $S_n^{(N)}(\lambda)$ を、 $n \leq N-1$ のとき $S_n(\lambda)$ と定義し、 $n > N-1$ のとき、 $\lambda^{n-N+1} \times S_{N-1}(\lambda)$ として定義する。

定理 3.1. K を m -ツイスト結び目とする。また、 N を正の整数とし、 ζ を 1 の原始 $4N$ 乗根とする $S_\zeta(N_K)$ の基底として、 $S_k^{(N)}(\lambda_K)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を選ぶ。また、 $S_\zeta(E_K)$ の基底として、 $\{S_i^{(N)}(\lambda_X), S_j^{(N)}(\lambda_Y)\}_{E_K, (X, Y)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \dots, m$) を選ぶ。これらの基底に関する、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta}$ の行列表示を $P = (P_{k, (i, j)})$ とすると

- $i, j, k \leq N - 2$ のとき、

$$\begin{aligned} & P_{k, (i, j)} \\ &= (-1)^{i+j} \zeta^{2\{(-1)^{m+1}+1\}(k^2+2k)} \frac{[(i+1)(k+1)]}{[k+1]} \\ & \quad \times \sum_{\substack{k \leq s_3 \leq 2k, \\ s_1, s_2 \leq s_3 - k \leq s_1 + s_2}} (-1)^{s_1 + (m+1)s_2 + s_3} \zeta^{2(-2(s_1^2 + s_1) + m(s_2^2 + s_2))} \\ & \quad \times \frac{[2s_1 + 1][(j+1)(2s_2 + 1)][k - s_1]![k - s_2]!([s_1]![s_2]!)^2[s_3 + 1]!}{[k + s_1 + 1]![k + s_2 + 1]![2k - s_3]!([s_3 - s_1 - k]![s_3 - s_2 - k]![s_1 + s_2 - s_3 + k]!)^2} \end{aligned}$$

- それ以外のとき、

$$P_{k, (i, j)} = 0$$

となる。

この定理の系として以下が成り立つ。(ただし、 R -線形写像 $f : V \otimes W \rightarrow R$ の left kernel とは、

$$\{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して } f(v, w) = 0\}$$

のことをいい、right kernel とは、

$$\{w \in W \mid \text{任意の } v \in V \text{ に対して } f(v, w) = 0\}$$

のことをいう。)

系 3.2. 定理 3.1 の設定の下で、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K, \zeta}$ の right kernel も left kernel も、0 ではない。特に、left kernel は $(S_{N-1}(\lambda))$ を含む $\mathbb{Q}(\zeta)[\lambda]$ の真部分加群であり、 $1 \leq m \leq 3$ かつ $1 \leq N \leq 7$ の場合には $(S_{N-1}(\lambda))$ に一致する。

注意 3.3. この系は、 $1 \leq m \leq 3$ かつ $1 \leq N \leq 7$ 以外の場合に $(S_{N-1}(\lambda))$ と一致するかどうかまでは言っていない。

4 証明のための準備

4.1 Jones-Wenzl べき等元

Jones-Wenzl べき等元 $\begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ ($0 \leq m \leq N - 1$) が図 3 の漸化式により定義される。(ただし、 $\Delta_k = (-1)^k(\zeta^{2(k+1)} - \zeta^{-2(k+1)})/(\zeta^2 - \zeta^{-2})$ とする。)

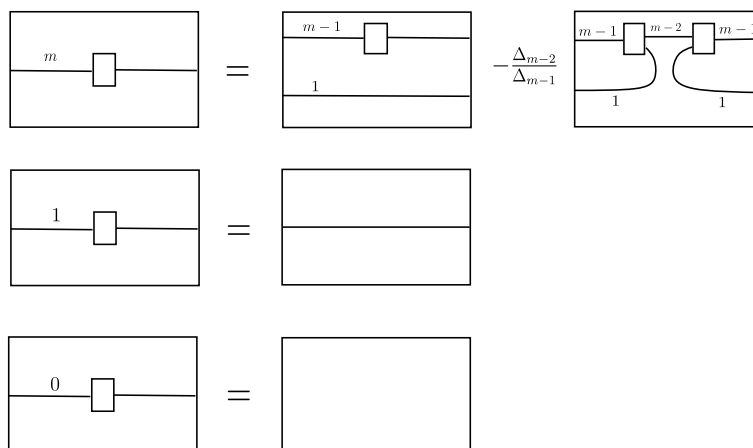


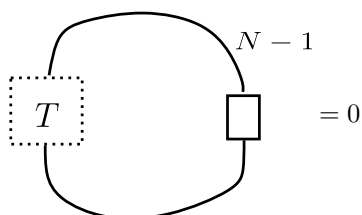
図 3 Jones-Wenzl べき等元の定義漸化式

箱を横に並べる操作を積とすると、Jones-Wenzl べき等元はその積に関するべき等元になっている。

また、アニュラスの中で m 番目の Jones-Wenzl べき等元を閉じたもの $\begin{array}{c} \square \\ \circlearrowleft \\ m \end{array} \in \hat{\mathcal{S}}_\zeta(S^1 \times [0, 1]) = \mathbb{Q}(\zeta)[\lambda]$ は Chebyshev 多項式 $S_m(\lambda)$ に一致することがわかる。

以下のことが証明されている。

命題 4.1. N を正の整数とし、 ζ を 1 の原始 $4N$ 乗根とする。このとき、任意の 1-タングル T に対して、



が成り立つ。

4.2 3 価グラフを用いた計算

以下の図にてでくる 3 価頂点の近傍は、図 3 の右辺の略記であるとする。ただし、3 価頂点に集まる 3 辺の彩色 a, b, c は許容的である、つまり、 $i := (b + c - a)/2$, $j := (c + a - b)/2$, $k := (a + b - c)/2$ は非負整数である、と仮定する。

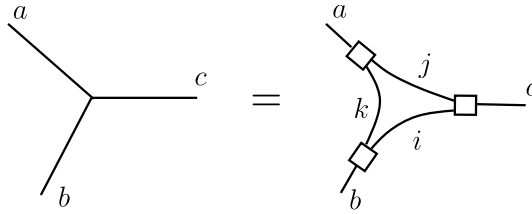


図 4

次のように定数 $\langle a, b, c \rangle$ と $\begin{pmatrix} A & B & E \\ D & C & F \end{pmatrix}$ を定義する。

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ c \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} A & B & E \\ D & C & F \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \quad C \quad F \\ \text{---} \\ E \quad D \quad B \end{array} \quad (2)$$

$[n]$ で $(\zeta^{2n} - \zeta^{-2n})/(\zeta^2 - \zeta^{-2})$ を表し、 $[n]!$ で $[n][n-1]\dots[1]$ を表すことにすると、以下が成り立つ ([7] を参照):

$$\langle a, b, c \rangle = (-1)^{i+j+k} \frac{[i+j+k+1]![i]![j]![k]!}{[i+j]![j+k]![i+k]!} \quad (3)$$

(ただし、 $i := (b + c - a)/2$, $j := (c + a - b)/2$, $k := (a + b - c)/2$ である。)

$$\begin{pmatrix} A & B & E \\ D & C & F \end{pmatrix} = \frac{\prod_{i=1,2,3,4} [b_j - a_i]!}{[A]![B]![C]![D]![E]![F]!} \sum_{\max(a_i) \leq k \leq \min(b_j)} \frac{(-1)^k [k+1]!}{\prod_{i=1,2,3,4} [k - a_i]! \prod_{j=1,2,3} [b_j - k]!} \quad (4)$$

(ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= (A + B + E)/2, & b_1 &= (B + C + E + F)/2 \\ a_2 &= (B + D + F)/2, & b_2 &= (A + B + C + D)/2 \\ a_3 &= (C + D + E)/2, & b_3 &= (A + D + E + F)/2 \\ a_4 &= (A + C + F)/2, \end{aligned}$$

である。)

$$\text{Diagram (5)} = (-1)^a \zeta^{a^2+2a} \text{Diagram (5)} \tag{5}$$

$$\text{Diagram (6)} = \sum_c \frac{\Delta_c}{\langle a, b, c \rangle} \text{Diagram (6)} \tag{6}$$

$$\text{Diagram (7)} = \frac{(-1)^{ab} \Delta_{ab+a+b}}{\Delta_a} \text{Diagram (7)} \tag{7}$$

$$\text{Diagram (8)} = \delta(c; a, b) \text{Diagram (8)} \tag{8}$$

(ただし、 $\delta(c; a, b) = (-1)^k \zeta^{ij-k(i+j+k+2)}$, $i = (b+c-a)/2$, $j = (c+a-b)/2$, $k = (a+b-c)/2$ である。)

注意 4.2. 等式 (8) の両辺の鏡映をとると、係数 $\delta(c; a, b)$ の表式の ζ が ζ^{-1} に置換された式になる。 ζ を ζ^{-1} に置換した式を $\overline{\delta(c; a, b)}$ と書くことにする。

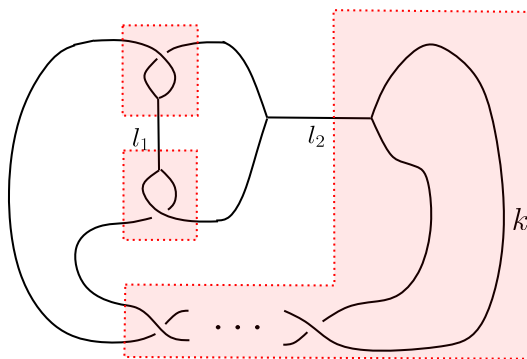
5 定理の証明の概要

Proof. 基底の取り方と、命題 4.1 により、 i, j, k のいずれかが $N - 1$ 以上のときは $P_{k,(i,j)} = 0$ となることが分かる。したがって、あとは、 $i, j, k \leq N - 2$ の場合に計算すればよい。以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 & P_{k,(i,j)} \\
 &= \begin{array}{c} S_i(\lambda) \quad S_j(\lambda) \\ \text{Diagram 1: A link with components } S_i(\lambda), S_j(\lambda), S_k(\lambda) \text{ and } m \text{ half-twists.} \\ \left. \begin{array}{c} S_k(\lambda) \\ \vdots \end{array} \right\} m - 2 \times (-1)^m \\ \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but with boxes on components } i, j, k \text{ and a red dashed box around } S_k(\lambda). \\ \text{Diagram 3: Similar to Diagram 2, with red dashed boxes around components } i \text{ and } j. \\ \text{Diagram 4: Similar to Diagram 3, with red dashed boxes around components } i \text{ and } j \text{ and labels } l_1, l_2. \end{array} \\
 & \stackrel{\text{式(5)}}{=} ((-1)^k \zeta^{k^2+2k})^{m-(-1)^{m-2}} \times \\
 & \stackrel{\text{式(6)}}{=} ((-1)^k \zeta^{k^2+2k})^{m-(-1)^{m-2}} \\
 & \times \sum_{0 \leq l_1, l_2 \leq 2k; l_1, l_2 \text{ は偶数}} \frac{\Delta_{l_1} \Delta_{l_2}}{\langle k, k, l_1 \rangle \langle k, k, l_2 \rangle} \text{Diagram 4}
 \end{aligned}$$

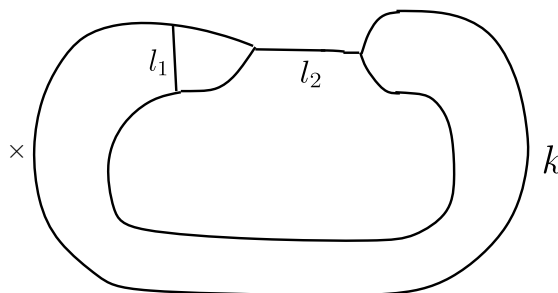
$$\stackrel{\text{式(7)}}{=} ((-1)^k \zeta^{k^2+2k})^{m-(-1)^m} 2 \frac{(-1)^{ik} \Delta_{ik+i+k}}{\Delta_k}$$

$$\times \sum_{0 \leq l_1, l_2 \leq 2k; l_1, l_2 \text{ は偶数}} \frac{(-1)^{jl_2} \Delta_{l_1} \Delta_{jl_2+j+l_2}}{\langle k, k, l_1 \rangle \langle k, k, l_2 \rangle} \times$$



$$\stackrel{\text{式(8)}}{=} ((-1)^k \zeta^{k^2+2k})^{m-(-1)^m} 2 \frac{(-1)^{ik} \Delta_{ik+i+k}}{\Delta_k}$$

$$\times \sum_{0 \leq l_1, l_2 \leq 2k; l_1, l_2 \text{ は偶数}} \frac{(-1)^{jl_2} \Delta_{l_1} \Delta_{jl_2+j+l_2} \overline{\delta(l_1; k, k)^2} \delta(l_2; k, k)^m}{\langle k, k, l_1 \rangle \langle k, k, l_2 \rangle}$$



$$\stackrel{\text{式(2)}}{=} ((-1)^k \zeta^{k^2+2k})^{m-(-1)^m} 2 \frac{(-1)^{ik} \Delta_{ik+i+k}}{\Delta_k}$$

$$\times \sum_{0 \leq l_1, l_2 \leq 2k; l_1, l_2 \text{ は偶数}} \frac{(-1)^{jl_2} \Delta_{l_1} \Delta_{jl_2+j+l_2} \overline{\delta(l_1; k, k)^2} \delta(l_2; k, k)^m}{\langle k, k, l_1 \rangle \langle k, k, l_2 \rangle} \times \begin{Bmatrix} l_2 & k & k \\ l_1 & k & k \end{Bmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \zeta^{2\{(-1)^{m+1}+1\}(k^2+2k)} \frac{[(i+1)(k+1)]}{[k+1]}$$

$$\times \sum_{k \leq s_3 \leq 2k, s_1, s_2 \leq s_3 - k \leq s_1 + s_2} (-1)^{s_1+(m+1)s_2+s_3} \zeta^{2(-2(s_1^2+s_1)+m(s_2^2+s_2))}$$

$$\times \frac{[2s_1+1][(j+1)(2s_2+1)][k-s_1]![k-s_2]!([s_1]![s_2])^2[s_3+1]!}{[k+s_1+1]![k+s_2+1]![2k-s_3]!([s_3-s_1-k]![s_3-s_2-k]![s_1+s_2-s_3+k]!)^2}$$

(ただし, $l_1 = 2s_1, l_2 = 2s_2$)

= (定理の式の右辺)

□

参考文献

- [1] D. Bullock, *The $(2, \infty)$ -skein module of the complement of a $(2, 2p + 1)$ torus knot*, J. Knot Theory Ramifications **4** (1995), no. 4, 619–632.
- [2] D. Bullock and W. Lofaro, *The Kauffman bracket skein module of a twist knot exterior*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 107–118.
- [3] V.F.R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111.
- [4] L.H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), no. 3, 395–407.
- [5] T.T.Q. Lê, *The colored Jones polynomial and the A -polynomial of knots*, Adv. Math. **207** (2006), no. 2, 782–804.
- [6] J. Marché, *The skein module of torus knots*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 4, 413–421.
- [7] G. Masbaum and P. Vogel, *3-valent graphs and the Kauffman bracket*, Pacific J. Math. **164** (1994), no. 2, 361–381.
- [8] J.H. Przytycki, *Skein modules of 3-manifolds*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), no. 1-2, 91–100.
- [9] V.G. Turaev, *The Conway and Kauffman modules of a solid torus*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **167** (1988), 79–89, 190.
- [10] 井町翔太郎, “結び目の外部空間のスkein加群に関連したペアリングについて”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2024年1月.