

交点数が3以下の long virtual knot について

吉田立樹

神戸大学大学院理学研究科 博士課程前期課程 2年

概要

交点数が3以下の long virtual knot を完全に分類した. 本研究では, virtual knot に対する宮澤多項式の定義を参考にして, long virtual knot に対しても宮澤多項式を定義した. そして3交点以下の diagram を構成し, long virtual knot に対する宮澤多項式や writhe 多項式などの不変量を用いることで, 分類を行った.

1 Definition

1.1 long virtual knot

long virtual knot は long virtual knot diagram から定義される.

Definition 1.1. はめこみ $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が,

- (i) $x_0 > 0$ が存在して $|x| > x_0$ を満たす任意の x について $\alpha(x) = (x, 0)$ である
- (ii) 任意の交点には, 図1のどちらかの情報が付いている

を満たすとき $D = \alpha(\mathbb{R})$ を long virtual knot diagram という.

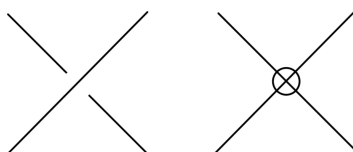


図1: real crossing(左) と virtual crossing(右)

long virtual knot diagram は virtual knot diagram の一部を切り開いたような形である.

図2の I, ..., VII の変形を (generalized) Reidemeister moves という. I, II, III は通常の knot theory において定義されるものと同じで, virtual knot theory においては classical Reidemeister moves と呼ばれる. IV, ..., VII は virtual crossing を含む変形で, virtual Reidemeister moves と呼ばれる.

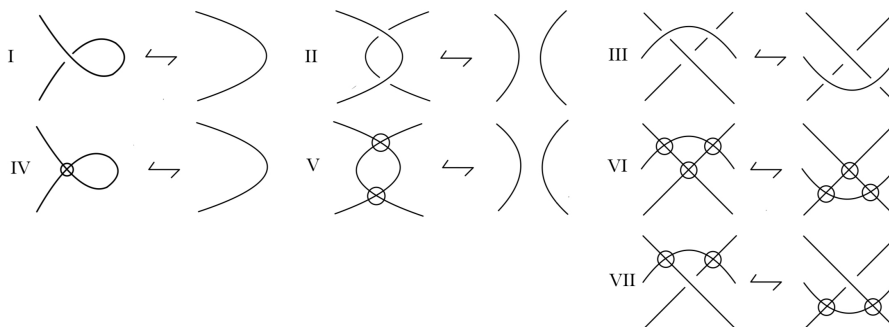


図2: Reidemeister move

Definition 1.2. D, D' を long virtual knot diagram とする. D に有限回の Reidemeister moves と \mathbb{R}^2 上の ambient isotopy(左右の十分先は動かさない) を施して D' が得られるとき, D と D' は 同値 (equivalent) であるといい, $D \sim D'$ とかく. これは同値関係となる.

Definition 1.3. long virtual knot diagram 全体の集合を同値関係 \sim で割ったときの同値類を long virtual knot という.

Definition 1.4. long virtual knot diagram D に対して端点をつなぐ操作を施して得られた diagram を D の closure といい \hat{D} とかく.

定義から long virtual knot diagram の closure は virtual knot diagram であることが分かる. よって次の命題が成り立つ.

Proposition 1.5. $f: \{\text{long virtual knot diagram}\} \xrightarrow{\text{closure}} \{\text{virtual knot diagram}\}$ とすると, f は $f': \{\text{long virtual knot}\} \rightarrow \{\text{virtual knot}\}$ を誘導する. □

上の Proposition から次が定義できる.

Definition 1.6. D を long virtual knot diagram とする. $K = [D]$ に対して $[f(D)]$ を K の closure といい \hat{K} とかく.

1.2 宮澤多項式

ここでは分類に用いた不変量のひとつである宮澤多項式を紹介する. K を long virtual knot, D を K の diagram とする. D のすべての real crossing で平滑化 (図 3) をすることで得られる図式を D の state という. D の real crossing が n 個あるとき D は 2^n 個の state をもつ. D の持つすべての state の集合を $S(D)$ とかく. state $S \in S(D)$ は, virtual crossing のみを持つ 1 本の string σ と, いくつかの loop λ_k からなる. S の loop の集合を $C(S)$ とかく.

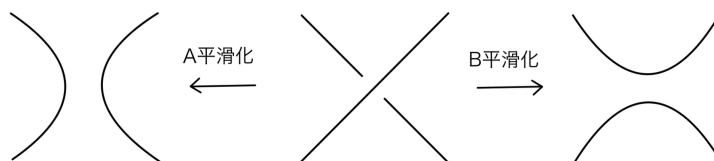


図 3: A 平滑化 (左) と B 平滑化 (右)

また D に向きがついている場合, 向きの合う平滑化と向きの合わない平滑化 (図 4) が考えられる. 向きの合わない平滑化を行う場合, ポールを立てて, ポールの前後で向きが逆転するようにして state を構成する.

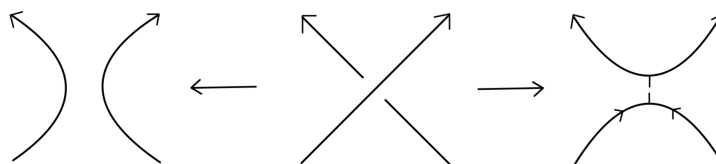


図 4: 向きの合う平滑化 (左) と向きの合わない平滑化 (右)

また, 各 loop $\lambda_k \in C(S)$ に対して, ポールの移動と消去を行うことで $2i$ 本 ($i \geq 0$) のポールが loop に沿って交互に立つ形になる. このとき, i を λ_k の index といい, $ind(\lambda_k)$ とかく. さらに state $S \in S(D)$ に対して, $ind(\lambda_k) = i$ となる loop $\lambda_k \in C(S)$ の個数を $c_i(S)$ とかく. また string σ に対しても, ポール

の移動と消去を行うことで, $2i$ 本 ($i \geq 0$) のポールが σ に沿って交互に立つ形になる. σ に沿って右からポールが立ち始めているとき $ind(\sigma) = i$, 左から立ち始めているとき $ind(\sigma) = -i$ とする.

Definition 1.7. K を long virtual knot, D を K の diagram とする. $a(S), b(S)$ を S の A 平滑化, B 平滑化の回数とすると, $S \in S(D)$ に対して, $\langle D | S \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, x, y]$ を次で定義する.

$$\langle D | S \rangle = A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{c_0(S)} \left(\prod_{i \geq 1} x_i^{c_i(S)} \right) y^{ind(\sigma)}.$$

また, 宮澤多項式の ブラケット多項式 $\langle D \rangle$ と宮澤多項式 $R(D)$ を次で定義する.

$$\langle D \rangle = \sum_{S \in S(D)} \langle D | S \rangle.$$

$$R(D) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle.$$

そして, $R(D)$ は K の不変量であるため, $R(D)$ を $R(K)$ とかき, K の宮澤多項式という.

long virtual knot K の diagram D に対して, すべての real crossing の上下を入れ替えたものを $D^\#$, 鏡に映したものを D^* , 向きを逆にしたものを $-D$ とする (図 5). また, それぞれの diagram があらわす long virtual knot を $K^\#, K^*, -K$ とする.

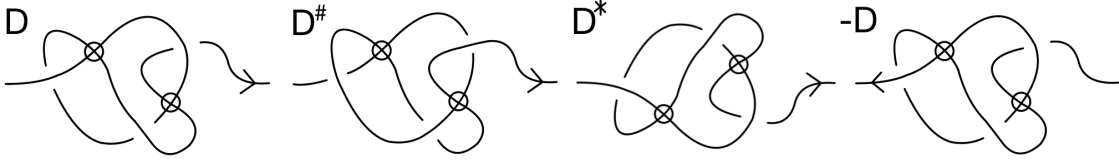


図 5: D と $D^\#, D^*, -D$ の例

Proposition 1.8. long virtual knot K に対して, 次が成り立つ.

- (i) $R(K^\#)(A, x, y) = R(K)(A^{-1}, x, y)$.
- (ii) $R(K^*)(A, x, y) = R(K)(A^{-1}, x, y^{-1})$.
- (iii) $R(-K)(A, x, y) = R(K)(A, x, y)$. □

Proposition 1.8 から次 corollary が得られる.

Corollary 1.9. long virtual knot K に対して, 次が成り立つ.

- (i) $R(K)(A, x, y) \neq R(K)(A^{-1}, x, y)$ ならば, $K \neq K^\#, -K^\#$ である.
- (ii) $R(K)(A, x, y) \neq R(K)(A^{-1}, x, y^{-1})$ ならば, $K \neq K^*, -K^*$ である.
- (iii) $R(K)(A, x, y) \neq R(K)(A, x, y^{-1})$ ならば, $K \neq K^{\#\#}, -K^{\#\#}$ である. □

2 対称性を考慮しない分類

本章では対称性を考慮しない分類を行う.

2.1 \bar{K} の定義

本章では long virtual knot の分類を考える上で, $\#, *, -$ で移り合うものは同じ knot として扱うものとする. そこで次の記号を定義する. long virtual knot K に対して \bar{K} をそれぞれ次で定める.

$$\bar{K} = \{K, K^\#, K^*, K^{\#\#}, -K, -K^\#, -K^*, -K^{\#\#}\}.$$

一般に $f(A, \mathbf{x}, y) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, \mathbf{x}, y]$ に対し,

$$[f(A, \mathbf{x}, y)] = \{f(A, \mathbf{x}, y), f(A^{-1}, \mathbf{x}, y), f(A, \mathbf{x}, y^{-1}), f(A^{-1}, \mathbf{x}, y^{-1})\}$$

と定める. また, \overline{K} の宮澤多項式を,

$$R(\overline{K}) = [R(K)]$$

と定義すると, $R(\overline{K})$ は \overline{K} の不変量である.

次に, $g(t), h(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対し,

$$[[g(t), h(t)]] = \{\pm g(t), \pm g(t^{-1}), \pm h(t), \pm h(t^{-1})\}$$

と定める. ただし, $h(t) = \pm g(t), \pm g(t^{-1})$ のとき, $[[g(t)]]$ とかく. $W_K^0(t), W_K^1(t)$ を K の writhe 多項式とし, \overline{K} の writhe 多項式を,

$$W(\overline{K}) = [[W_K^0(t), W_K^1(t)]]$$

と定義すると, $W(\overline{K})$ は \overline{K} の不変量である.

また, $col_p(K)$ を K の p 彩色数とし, \overline{K} の p 彩色数を,

$$col_p(\overline{K}) = \{col_p(K), col_p(K^\#)\}$$

と定義する. $col_p(\overline{K})$ は \overline{K} の不変量である.

2.2 交点数が3以下の long virtual knot の分類

まず Gauss diagram を用いて 3 交点以下の diagram をリストアップした. その際, #, *, - で同じになる diagram や, Reidemeister move で移り合う diagram は除いた. 構成した diagram に対して, writhe 多項式, 3 彩色数, closure, 宮澤多項式, intersection polynomial を用いて分類を行った.

Theorem 2.1. 交点数が 3 以下の long virtual knot は

$$\overline{K_0(1)}, \overline{K_2(1)}, \overline{K_2(2)}, \overline{K_2(3)}, \overline{K_3(1)}, \dots, \overline{K_3(33)}$$

のいずれかひとつだけと等しい. ただし, $K_0(1), K_2(1), K_2(2), K_2(3), K_3(1), \dots, K_3(33)$ は図 6 の diagram で表される long virtual knot とする. □

Remark 2.2. 対称性を考慮しない場合, 交点数が 3 以下の long virtual knot は 37 個存在することがわかった.

Example 2.3. ここでは closure と宮澤多項式を用いた分類結果を紹介する. 表 1 が, 交点数が 3 以下の long virtual knot の closure と宮澤多項式である. \widehat{K} の番号は [2] に従う. ただし対称性は考慮していない.

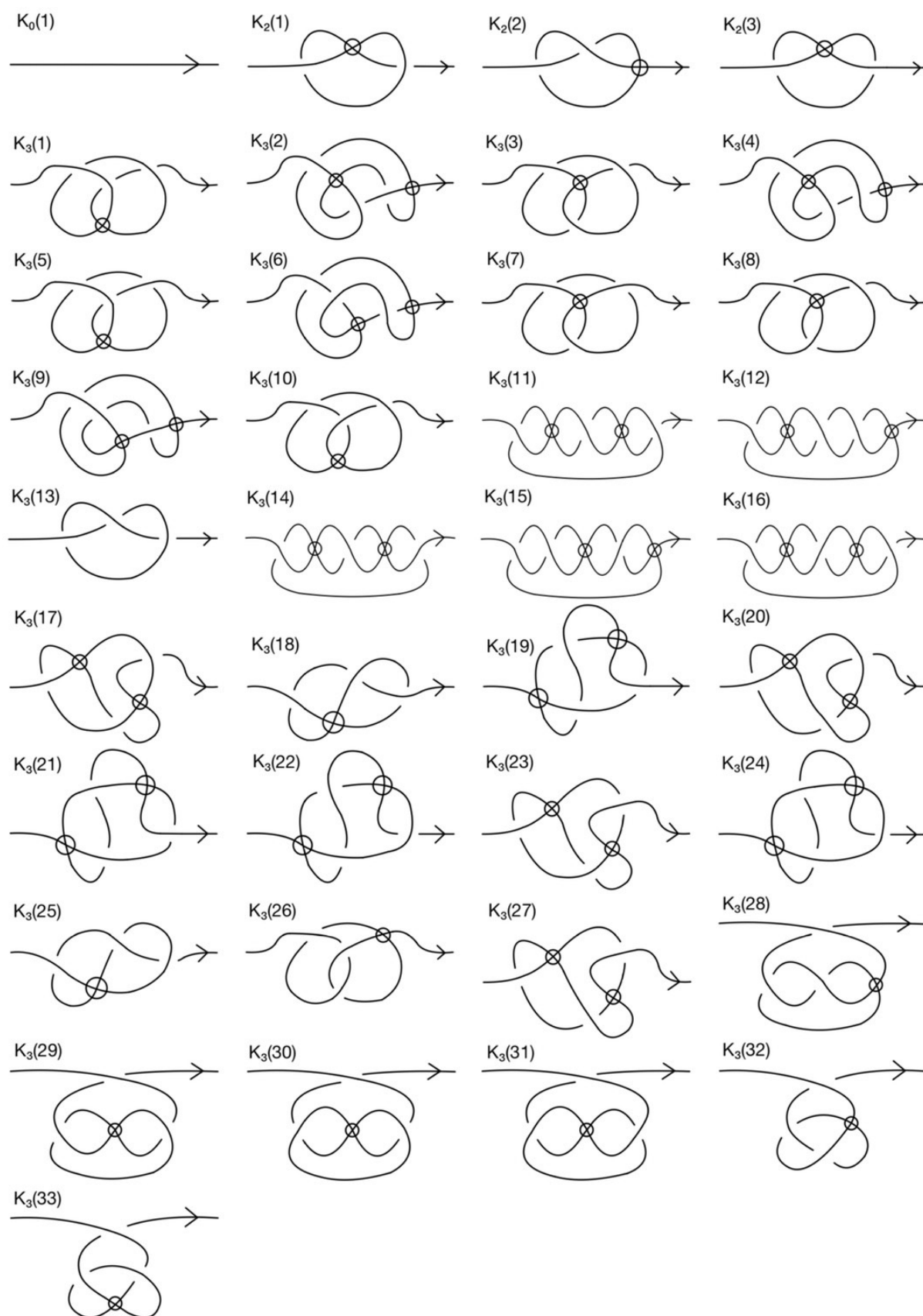


図 6: 交点数が 3 以下の long virtual knot

\widehat{K}	K	$R(\overline{K})$
0.1	$K_0(1)$	$[1]$
	$K_2(3)$	$[1 + x_1 + A^2y + A^{-2}y^{-1}]$
	$K_3(5), K_3(7), K_3(30)$	$[1 - A^4x_1 - A^6 - A^2y^{-1}]$
	$K_3(14)$	$[1 - A^4x_1^2 - A^6x_1y - A^2x_1y^{-1}]$
2.1	$K_2(1)$	$[A^4 + A^8x_1 + A^6y + A^6y^{-1}]$
	$K_2(2), K_3(18)$	$[A^4 + (A^6 + A^{10})y]$
	$K_3(1), K_3(3), K_3(29)$	$[A^4 - A^8x_1 - A^{10}y - A^{10}y^{-1}]$
	$K_3(28)$	$[A^4 + (-A^8 + A^{12})x_1 + (-A^{10} + A^{14})y]$
	$K_3(31), K_3(33)$	$[A^4 + (-2A^4 + A^8)x_1 - A^2y - A^2y^{-1}]$
3.1	$K_3(32)$	$[A^4 + (-A^4 + A^8)x_1 + (-A^2 + A^6)y]$
	$K_3(4)$	$[-A^4x_1 + (-A^2 - A^2x_1)y - A^6y^{-1} - A^4y^2]$
	$K_3(6)$	$[1 - A^4x_1 + (-A^6 - A^2x_1)y + (-1 - A^2)y^{-1} - A^4y^2]$
3.2	$K_3(20), K_3(21), K_3(22), K_3(23)$	$[-A^2x_1y - A^4y^2]$
	$K_3(8), K_3(10)$	$[1 - A^4 + A^8 - x_1 - A^2y - A^2y^{-1}]$
3.3	$K_3(25), K_3(26)$	$[1 - A^4 + A^8 + (A^{-2} - A^2)y]$
	$K_3(2)$	$[-A^8 + A^{14} - A^8x_1 + (-A^{10} - A^{10}x_1)y - A^{10}y^{-1} - A^{12}y^2]$
3.4	$K_3(17)$	$[A^4 - A^8 - A^{10}x_1y + (A^6 - A^{10})y^{-1} - A^{12}y^2]$
	$K_3(19)$	$[A^4 - A^8 + (A^6 - A^{10} - A^{10}x_1)y - A^{12}y^2]$
3.5	$K_3(9)$	$[1 - A^4 - x_1 + (-A^2 - A^6x_1)y - A^4y^2 - A^2y^{-2}]$
	$K_3(24)$	$[1 - A^4 + (A^{-2} - A^2 - A^6x_1)y - A^4y^2]$
	$K_3(27)$	$[1 - A^4 - A^6x_1y + (A^{-2} - A^2)y^{-1} - A^4y^2]$
3.6	$K_3(11)$	$[A^4 - A^8 + A^{12} - A^{12}x_1^2 - A^{10}x_1y - A^{10}x_1y^{-1}]$
	$K_3(12)$	$[A^4 - A^8 + A^{12} + (-A^{10} + A^{14})x_1y]$
3.7	$K_3(13)$	$[A^4 + A^{12} - A^{16}]$
3.7	$K_3(15)$	$[A^4 + (-A^2 + A^6)x_1 + (-A^4 + A^8)y]$
	$K_3(16)$	$[A^8 - A^4x_1^2 - A^2x_1y - A^2x_1y^{-1}]$

表 1: 交点数が 3 以下の long virtual knot の宮澤多項式

3 対称性を考慮した分類

本章では対称性を考慮した分類を行う. 実際には, 前章の対称性を考慮しない分類における各 \overline{K} に属する 8 つの long virtual knot の分類を行った.

不変量として, 宮澤多項式, writhe 多項式, intersection polynomial を用いて分類を行った. その結果, 交点数が 3 以下の long virtual knot は次の 5 つのタイプのいずれかであることが分かった.

タイプ A: $K, K^\#, K^*, K^{\#\#}, -K, -K^\#, -K^*, -K^{\#\#}$ が異なる.

タイプ B: $K = -K, K^\# = -K^\#, K^* = -K^*, K^{\#\#} = -K^{\#\#}$ が異なる.

タイプ C: $K = -K^*, K^\# = -K^{\#\#}, K^* = -K, K^{\#\#} = -K^\#$ が異なる.

タイプ D: $K = -K^{\#\#}, K^\# = -K^*, K^* = -K^\#, -K = K^{\#\#}$ が異なる.

タイプ E: $K = -K = K^{\#\#} = -K^{\#\#}, K^\# = -K^\# = K^* = -K^*$ が異なる.

次の Theorem が成り立つ.

Theorem 3.1. $K_2(1), K_2(2), K_2(3), K_3(1), \dots, K_3(33)$ は, それぞれ表 2 のタイプに分類される. \square

$K_2(k)$	1	2	3														
タイプ	D	B	C														
$K_3(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
タイプ	D	A	D	A	A	A	A	D	A	D	D	A	E	A	A	D	
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	D	A	D	A	D

表 2: 対称性を考慮した分類

Remark 3.2. 対称性を考慮する場合, 交点数が 3 以下の long virtual knot は 231 個存在することがわかった.

謝辞

講演の機会を与えてくださったことに感謝し, 本研究集会の世話人である東京女子大学の大山淑之教授, 新國亮教授には心より御礼申し上げます. また, 参加者の皆様にはご清聴を賜り, 貴重なアドバイスを頂いたことに感謝致します. 神戸大学の佐藤進先生, 和田康載先生にはセミナーを通してたくさんのご指導していただきました. ここに感謝申し上げます.

参考文献

- [1] C. C. Adams, *結び目の数学* (金信泰造 訳), 丸善出版, 2021.
- [2] J. Green, A Table of Virtual Knot, <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
- [3] R. Higa, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, *The interseciton polynomials of a virtual knot II: Connected sums*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **32** (2023), no. 10, 23570067, 16pp.
- [4] A. Ishii, N. Kamada, and S. Kamada, *The Miyazawa polynomial for long virutal knots*, Topology and its Applications **157** (2010), no. 1, 290–297.
- [5] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, Europ. J. Combinatorics **20** (1999), no. 7, 663–690.
- [6] 富山裕美, 仮想結び目の交点数とステイト数, 神戸大学大学院理学研究科修士論文, 2010.