

Constructing pseudo Goeritz matrix from Dehn coloring of virtual knots

Nagoya City University

Kin Unhou *

結び目の数理 VI 報告書

abstract

L. Goeritz introduced a Goeritz matrix[1], and K. Ichihara showed the relationship between the Goeritz matrix and the Dehn coloring of knots[2]. Virtual knot theory is a generalization of knot theory. N. Kamada introduced the pseudo Goeritz matrix which was a kind of Goeritz matrix of virtual knot diagrams[3]. In this talk, we discuss a relationship between a pseudo Goeritz matrix and a Dehn coloring matrix of virtual knots.

1 classical knot の Dehn coloring と Goeritz matrix の関係

1.1 classical knot の Goeritz matrix

D を向きを持たない classical knot diagram とする. ここで, **checkerboard coloring** とは図 1 のように D によって分けられた平面の領域を白黒の二色で塗分けることをという.

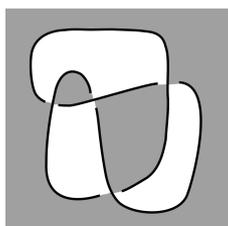


図 1: 塗分け例

ここで, 黒色で塗分けられた領域を X_1, X_2, \dots, X_m とし, 各交点に符号 ± 1 を図 2 に示されているようにつける. この符号を **Goeritz 指数** という. ここで, X_i と X_j の **連結指数 (connecting index)** とは, $i \neq j$ となるような領域 X_i と X_j の間の交点の Goeritz 指数の総和であり, a_{ij} で表す. ここで, a_{ii} は

$$a_{ii} = - \sum_{j, i \neq j} a_{ij}$$

と定義する. ここで, 結び目 K の (diagram D に関する) **Goeritz matrix** とは $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, m)$ を (i, j) 成分とする m 次対称整数行列である.

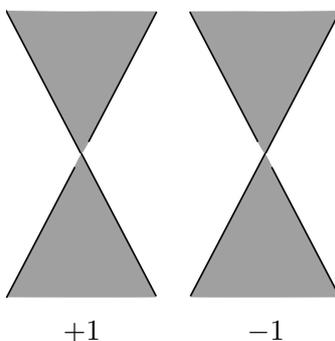


図 2: 各交点の符号

* e-mail : minehiro0908@gmail.com

図3の Goeritz matrix G の計算例を以下に示す。

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

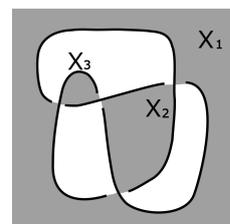


図 3: 例

ここで、同じ結び目 K の diagram D の Goeritz matrix は一通りに定まらない。

定理 1.1. [4] 結び目 K の diagram D の任意の Goeritz matrix G から 1 行と 1 列を除いて得られる行列 G_1 のねじれ不変量 $k_*(G)$ は K の位相不変量である。

この定理において、 $k_*(G_1)$ を K の **Goeritz 不変量** といい、 $k_*(K)$ で表す。また、 $d(G_1)$ を K の **深度 (depth)**、 $n(G_1)$ を K の **退化次数 (nullity)** といい、それぞれ $d(K)$ 、 $n(K)$ で表す。

例として図 1 の diagram D のねじれ不変量を計算すると、

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、 $k_*(K)=(5)$ となる。

1.2 classical knot の Dehn coloring

次に、Dehn coloring matrix を定義する。 D を向きづけられた classical knot diagram とし、その補領域を R_1, \dots, R_m とする。補領域 R_1, \dots, R_m に対して変数 Z_1, \dots, Z_m をそれぞれ定める。 diagram D の各交点に対して、図 4 のように、その交点の周りの補領域 R_i, R_j, R_k, R_l に対する変数を Z_i, Z_j, Z_k, Z_l としたとき、方程式 $Z_i + Z_j - Z_k - Z_l = 0$ を考える。すべての交点に対してこの方法で定められた方程式からなる連立方程式を、 D の **Dehn coloring equations** という。そして、その連立方程式の係数行列のことを **Dehn coloring matrix** という

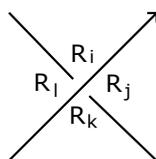


図 4: 交点の周りの補領域

図 5 で与えられた classical knot diagram D の Dehn coloring matrix を考える。図 5 のように、 D の補領域を R_1, \dots, R_6 とし、対応する変数を Z_1, \dots, Z_6 とする。

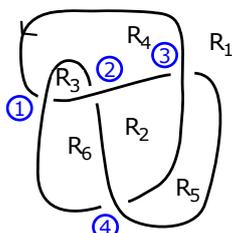


図 5: D

このとき, Dehn coloring equations は次のようになる.

$$\begin{cases} Z_1 + Z_6 - Z_3 - Z_4 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ Z_2 + Z_4 - Z_3 - Z_6 = 0 \cdots \textcircled{2} \\ Z_1 + Z_4 - Z_2 - Z_5 = 0 \cdots \textcircled{3} \\ Z_2 + Z_6 - Z_1 - Z_5 = 0 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

ここで, 各方程式は図5の交点の番号に対応するように並べてある. よって, Dehn coloring matrix は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D の各交点に対して, 図4のように, その交点の周りの補領域 R_i, R_j, R_k, R_l に対して $Z_i + Z_j - Z_k - Z_l = 0 \pmod{n}$ を満たす写像 $C: \{R_1, \dots, R_m\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を D の **Dehn n -coloring** という.

Dehn n -coloring の集合を $\widetilde{col}_n(D)$ とする. このとき $\widetilde{col}_n(D)$ の元の個数を $\widetilde{col}_n(D)$ の濃度という.

定理 1.2. (Alexander Madaus and Maisie Newman and Heather M. Russell [5])
 $\widetilde{col}_n(D)$ の濃度は D の不変量である.

1.3 classical knot の Dehn coloring から Goeritz matrix を導く方法

classical knot diagram の Dehn coloring matrix と Goeritz matrix に関して, 次の結果が知られている.

黒領域の数が b 個である checker board coloring が与えられた classical knot diagram D に対して, 最初の b 行が diagram D の黒領域に対応するような Dehn coloring matrix を M_D とする. D の交点の数を c とする. ある $j(1 \leq j \leq c)$ に対して, M_D の行で第 j 成分が 0 でないものを選ぶ. それらの各行に, 第 j 成分が対応する交点の Goeritz 指数の -1 倍になるように $+1$ か -1 をかけて, その和をとり 1 つの行ベクトルを作る. この操作を $j = 1$ から $j = c$ まで繰り返し, 得られた c 本の行ベクトルを縦に並べて行列を作る. この行列を M_G とする.

定理 1.3. (Masaki Horiuchi and Kazuhiro Ichihara and Eri Matsudo and Sota Yoshida [2])
 M_G の第 1 列から第 b 列までの部分が, D の Goeritz matrix と一致する. さらに, その行列の残りの右半分は全て 0 になる.

この定理の具体例を以下に示す.

図5の knot diagram D の Dehn coloring equations と Dehn coloring matrix M_D を考える. ここで, 黒領域と白領域を区別するため, 変数 Z_1, \dots, Z_3 を X_1, \dots, X_3 に, 変数 Z_4, \dots, Z_6 を Y_1, \dots, Y_3 に変更している.

$$\begin{cases} X_1 + Y_3 - X_3 - Y_1 = 0 \\ X_2 + Y_1 - X_3 - Y_3 = 0 \\ X_1 + Y_1 - X_2 - Y_2 = 0 \\ X_2 + Y_3 - X_1 - Y_2 = 0 \end{cases} \quad M_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで, M_D の第 1 列の成分が 0 でない行は, 第 1, 3, 4 行で, 対応する行ベクトルは次のようになっている.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

図 3 より, それらの行に対応する交点の Goeritz 指数は

$$+1, +1, +1$$

となっているので, 定理 1.3 のように ± 1 倍して, これらの方程式の和をとると, 次のようになる.

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この操作を第 2 列と第 3 列でも同様に行うと, 次の 3 つの行ベクトルが得られる.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得られた 3 つの行ベクトルをそのまま縦に並べると $M_G(D)$ は

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, これは図 5 の Goeritz matrix と一致している.

2 virtual knot の Dehn coloring と Goeritz matrix の関係

2.1 virtual knot の Pseudo Goeritz matrix

D を virtual knot diagram とする. ここで, D の **abstract knot diagram** とは図 6 のようにコンパクトな曲面 Σ と Σ 上の knot diagram D_Σ のペア (Σ, D_Σ) のことである.

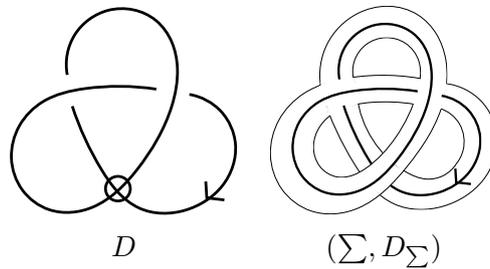


図 6: abstract knot diagram

次に virtual knot の pseudo Goeritz matrix を紹介する. まず virtual knot diagram から virtual knot diagram への写像 φ_1 と φ_2 を定義していく. φ_1 は図 7 のように移される.

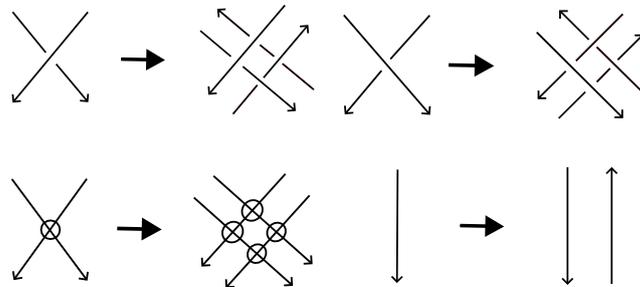


図 7: $\varphi_1 : \{\text{virtual knot diagrams}\} \rightarrow \{\text{virtual knot diagrams}\}$

例として virtual knot diagram D とその像 $\varphi_1(D)$ を図 8 に示す.

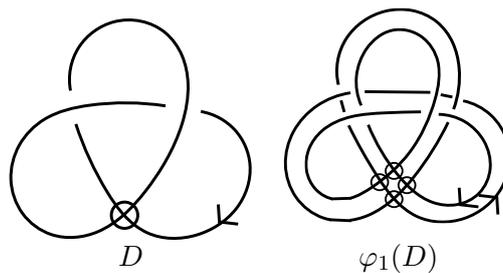


図 8: $\varphi_1 : \{\text{virtual knot diagrams}\} \rightarrow \{\text{virtual knot diagrams}\}$ の例

同様に φ_2 は図 9 のように移される.

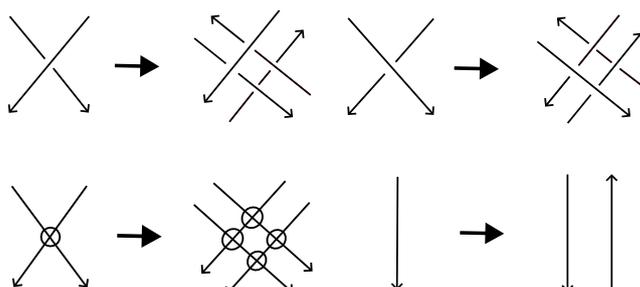


図 9: $\varphi_2 : \{\text{virtual knot diagrams}\} \rightarrow \{\text{virtual knot diagrams}\}$

例として virtual knot diagram D とその像 $\varphi_2(D)$ を図 10 に示す.

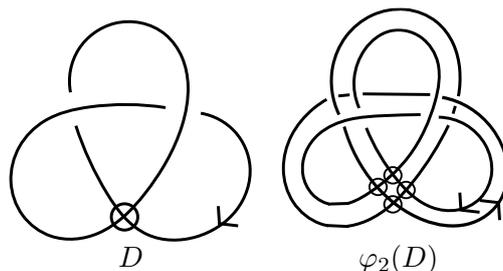


図 10: $\varphi_2 : \{\text{virtual knot diagrams}\} \rightarrow \{\text{virtual knot diagrams}\}$ の例

定理 2.1. (N.Kamada [3])

$\varphi_1(D)$ と $\varphi_2(D)$ は *almost classical* な *virtual knot diagram* である.

D に対応する abstract knot diagram を (Σ, D_Σ) とおく. D の **semi-arc** とは diagram D に対して, D の実交点を端点にもち, D の実交点を含まない D の arc である. 図 11(a)(または (c)) に示す正の交点 (または負の交点) の周りの $\Sigma \setminus D_\Sigma$ に対する numbering を **first local region index** という. ここで, 図 11(b)(または (d)) に示すように first local region index の numbering は, $\varphi_1(D)$ の abstract knot diagram を checkerboard coloring した時の実交点の Goeritz 指数に対応している.

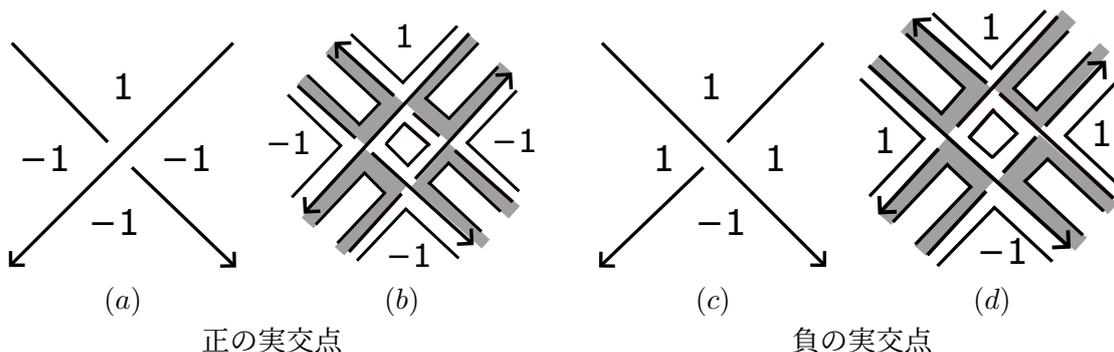


図 11: first local region index と $\varphi_1(D)$ の abstract knot diagram の checkerboard coloring

図 12(a)(または (c)) に示す正の交点 (または負の交点) の周りの $\Sigma \setminus D_\Sigma$ に対する numbering を **second local region index** という. ここで, 図 12(b)(または (d)) に示すように second local region index の numbering は, $\varphi_2(D)$ の abstract knot diagram を checkerboard coloring した時の実交点の Goeritz 指数に対応している.

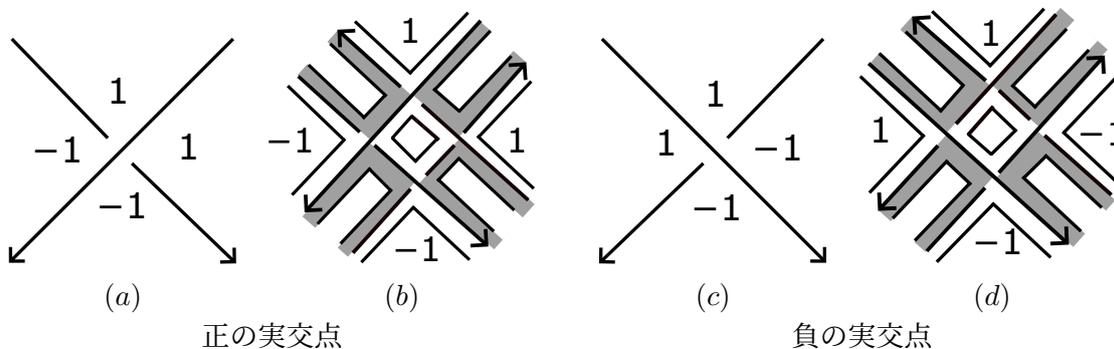
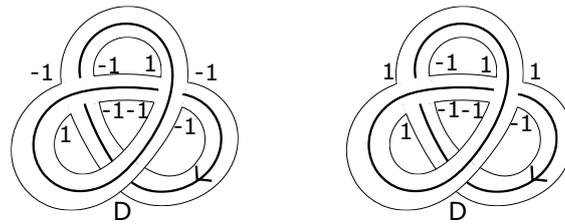


図 12: second local region index と $\varphi_2(D)$ の abstract knot diagram の checkerboard coloring

例として図 6 の D に対しての first local region index と second local region index を図 13 に示す.



first local region index second local region index

図 13: local region index の例

D を virtual knot diagram とし, D の semi-arc を a_1, \dots, a_r とする. ここで, $i \neq j$ となるような semi-arc a_i と a_j の間の first (または second) local region index の総和を p_{ij} で表す. また,

$$p_{ii} = - \sum_{j, i \neq j} p_{ij}$$

と定義する. ここで, virtual knot diagram D の first (または second) pseudo Goeritz matrix $G_1(D)$ (または $G_2(D)$) とは $p_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, r)$ を (i, j) 成分とする r 次対称整数行列である.

定理 2.2. (*N.Kamada* [3])

virtual knot K の diagram D の任意の first (または second) pseudo Goeritz matrix $G_1(D)$ (または $G_2(D)$) から 1 行と 1 列を除いて得られる行列のねじれ不変量は K の位相不変量である.

例として図 6 の D に対して $G_1(D)$ (または $G_2(D)$) を求めると,

$$G_1(D) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_2(D) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $G_1(D)$ (または $G_2(D)$) から 1 行と 1 列を除いて得られる行列のねじれ不変量は $(4, 0)$ (または $(0, 0)$) となる.

注意 2.3. $G_1(D)$ (または $G_2(D)$) は $\varphi_1(D)$ (または $\varphi_2(D)$) の abstract knot diagram を図 11 (または 図 12) のように checkerboard coloring した時の Goeritz matrix と同値である. 詳細は [3] を参照.

2.2 主結果

先程定義した pseudo Goeritz matrix と virtual knots の Dehn coloring matrix との関係を示すために, まずは virtual knots の Dehn coloring matrix について定義する.

D を virtual knot diagram とし, D の semi-arc を a_1, \dots, a_r とする. また, D の abstract knot diagram (Σ, D_Σ) の補領域を R_1, \dots, R_w とし, D の実交点を C_1, \dots, C_m とする. ここで, $s(C_p; i, j)$ とは図 14 のように, 実交点 C_p の周りの semi-arc a_i, a_j の first (または second) local region index である.

ここで, virtual knot diagram D の各 local region に対して, 図 15 のように, その交点の周りの semi-arc a_i, a_j , 実交点 C_p , 補領域 R_v に対する変数を x_i, x_j, Y_p, Z_v としたとき, 方程式 $x_j - x_i + s(C_p; i, j)(Y_p - Z_v) = 0$ を考える. すべての local region に対してこの方法で定められた方程式からなる連立方程式を, virtual knot diagram D の **Dehn coloring equations** という. そして, その連立方程式の係数行

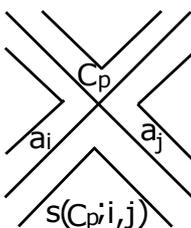


図 14: $s(C_p; i, j)$

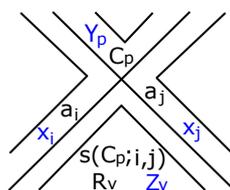


図 15: a_i, a_j, C_p, R_v に対する変数

列のことを **Dehn coloring matrix** という。

図 6 で与えられた virtual knot diagram D の Dehn coloring matrix を考える。図 16 のように、 D の semi-arc を a_1, \dots, a_4 とし、 D の abstract knot diagram (Σ, D_Σ) の補領域を R_1, R_2 とし、 D の実交点を C_1, C_2 とする。また、それらに対応する変数を $x_1, \dots, x_4, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ とする。

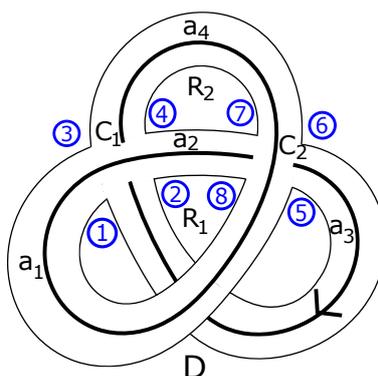


図 16: (Σ, D_Σ)

このとき、Dehn coloring equations は次のようになる。ここで、local region index は first local region index を用いる。

$$\begin{cases} x_3 - x_1 + (Y_1 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x_2 - x_3 - (Y_1 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{2} \\ x_1 - x_4 - (Y_1 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{3} \\ x_4 - x_2 - (Y_1 - Z_2) = 0 \cdots \textcircled{4} \\ x_3 - x_1 - (Y_2 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{5} \\ x_4 - x_3 - (Y_2 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{6} \\ x_2 - x_4 + (Y_2 - Z_2) = 0 \cdots \textcircled{7} \\ x_1 - x_2 - (Y_2 - Z_1) = 0 \cdots \textcircled{8} \end{cases}$$

ここで、各方程式は図 16 の交点の番号に対応するように並べてある。よって、Dehn coloring matrix は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

virtual knot diagram D の各 local region に対して, 図 15 のように, その local region の周りの semi-arc a_i, a_j , 実交点 C_p , 補領域 R_v に対して $x_j - x_i + s(C_p; i, j)(Y_p - Z_v) = 0 \pmod{n}$ を満たす写像 $C : \{a_1, \dots, a_r, R_1, \dots, R_v, C_1, \dots, C_m\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を D の **Dehn n -coloring** という.

Dehn n -coloring の集合を $\widetilde{col}_n(D)$ とする. このとき $\widetilde{col}_n(D)$ の元の個数を $\widetilde{col}_n(D)$ の濃度という.

定理 2.4. virtual knot diagram D の $\widetilde{col}_n(D)$ の濃度は D の不変量である.

virtual knot diagram の Dehn coloring matrix と pseudo Goeritz matrix に関して, 次の結果が得られた.

semi-arc の数が r 個である virtual knot diagram D に対して, 最初の r 行が diagram D の semi-arc に対応するような Dehn coloring matrix を M_D とする. D の local region の数を l とし, \mathbb{P}_i ($1 \leq i \leq l$) を M_D の行ベクトルで第 j 成分が 0 でないものとする. $s(C_p; k, j)$ を first (または second) local region index とし, \mathbb{G}_j を $\mathbb{G}_j = \sum_{1 \leq k \leq l} -\frac{s(C_p; k, j)}{p_{kj}} \mathbb{P}_k$ の式で得られる行ベクトルとする. このとき, $M_G =$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{G}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{G}^1 & \dots & \mathbb{G}^r & \mathbb{G}^{r+1} & \dots & \mathbb{G}^{r+m+w} \end{bmatrix} \text{ とする.}$$

定理 2.5. 行列 M_G の第 1 列から第 r 列までの部分が, D の first (または second) pseudo Goeritz matrix と一致する. さらに, 第 $r+1$ 列から第 $r+m+w$ 列の成分は全て 0 になる.

注意 2.6. 定理 2.5 で紹介した virtual knot diagram D の Dehn coloring matrix から行列 M_G を得る手順は, 図 11(または 図 12) に示すような checker board coloring が与えられた $\varphi_1(D)$ (または $\varphi_2(D)$) の abstract knot diagram $(\Sigma, \varphi_1(D)_\Sigma)$ (または $(\Sigma, \varphi_2(D)_\Sigma)$) に対して, 定理 1.3 に示す手順に従って得られるものである.

この定理の具体例を以下に示す.

図 16 の virtual knot diagram D の Dehn coloring equations と Dehn coloring matrix M_D を考える. ここで, local region index は first local region index を用いる.

$$\begin{cases} x_3 - x_1 + (Y_1 - Z_1) = 0 \\ x_2 - x_3 - (Y_1 - Z_1) = 0 \\ x_1 - x_4 - (Y_1 - Z_1) = 0 \\ x_4 - x_2 - (Y_1 - Z_2) = 0 \\ x_3 - x_1 - (Y_2 - Z_1) = 0 \\ x_4 - x_3 - (Y_2 - Z_1) = 0 \\ x_2 - x_4 + (Y_2 - Z_2) = 0 \\ x_1 - x_2 - (Y_2 - Z_1) = 0 \end{cases} \quad M_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 M_D の第 1 列の成分が 0 でない行は、第 1, 3, 5, 8 行で、対応する行ベクトルは次のようになっている。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

図 13 より、定理 2.5 のように $\mathbb{G}_1 \cdots \mathbb{G}_4$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_3 &= - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_4 &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって M_G は

$$M_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、これは第 1 列から第 4 列までの部分が図 6 の D の first pseudo Goeritz matrix と一致している。

参考文献

- [1] L. Traldi, *Link colorings and the Goeritz matrix*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 26(8), 1750045 (2017).
- [2] Masaki Horiuchi and Kazuhiro Ichihara and Eri Matsudo and Sota Yoshida, *Constructing Goeritz matrix from Dehn coloring matrix*, posted on 2022, DOI <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.01983>.
- [3] Naoko Kamada, *Conversion to almost classical virtual links and pseudo Goeritz matrices*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 31(14) (2022).
- [4] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版株式会社 (2007).
- [5] Alexander Madaus and Maisie Newman and Heather M. Russell, *Dehn coloring and the dimer model for knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 26(3) (2017).