カスプ付きディバイドと対称的な絡み目

菅原 朔見 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

概要

本稿では，研究集会「結び目の数理 VI」における講演内容と [Su] に基づき，カスプ付きディバイドから定まる絡み目について紹介する．

1 導入

ディバイドとは，有限個の閉区間と単位円から二次元円板への固有でジェネリックなはめ込みの像のことである．ディバイドの概念は，平面曲線特異点の実モース化を記述するツール，あるいはその一般化としてA'Campo により導入されたものである [AC1, AC2]．ディバイドからは単位接ベクトルを対応させることでS^3 内の絡み目（ディバイド絡み目）が定まる．ディバイドがある平面曲線特異点の実モース化として得られるものであれば，ディバイド絡み目は元の曲線が定める特異点リンク（いわゆる代数的絡み目）と一致する．したがって，ディバイド絡み目は代数的絡み目の一般化とも言える．ディバイド絡み目はファイバー性 ([AC2]) や，quasi-positivity([Ka1]) などの性質を持ち，ディバイド絡み目として表すことができる絡み目には非常に強い制約がかかると言える．しかしながら，ディバイドが描かれた円板上の組み合わせ的な情報から，ディバイド絡み目のザイフェルト種数やファイバー絡み目のモノドロミーを計算することができ，ディバイドは絡み目の表示方法として「良い」ものであると言える．また，近年はディバイドを用いて 3 次元多様体や 4 次元多様体のトポロジーの研究への応用もされている [FK, IN]．ディバイドを用いた 3 次元双曲幾何への応用([FK]) については，広島大学の古谷凌雅氏が本研究集会で講演されているので，その報告集を参照されたい．

ディバイドはさまざまな一般化をもつが，ここでは近年著者と吉永により導入されたカスプ付きディバイド([SY]) について扱う．カスプ付きディバイドとはその名の通り，有限個のカスプを持つことを許すディバイドの一般化である．カスプ付きディバイドは複素化実直線配置の補集合の Kirby 図式を記述する際に導入されたものである．カスプ付きディバイドからも従来のディバイド同様に S^3 内の絡み目を定義することができる．しかしながらカスプを与えることがディバイド絡み目に半ひねりをもたらすため，従来のディバイドよりディバイド絡み目が複雑になり得る．例えば，カスプ付きディバイドからはファイバー性を持たない絡み目が得られることが知られていた（これについては結び目の数理 IV の著者による報告集を参照）．そのため，カスプ付きディバイドで表すことのできる絡み目のクラスは，従来のディバイドよりも真に広い．そこで本研究では，「カスプ付きディバイドで表すことができる絡み目のクラスはどれくらいか」という問いを考え，それに対し解答を与えることができた．主結果は以下の通りである．

定理 1.1. 3 次元球面内の絡み目 L がカスプ付きディバイドの絡み目として表せる必要十分条件は，S^3 上の向きを保ち，空でない固定点集合を持つ対合 j が存在して，$j(L) = L$ をみたすことである．

絡み目 $L = K$ が結び目である場合を考えると，定理内の対合に関する条件を満たす結び目は，周期 2 であるか，強可逆であるかのいずれかである．したがって，主定理の特別な場合として，以下の定理が得られる．

定理 1.2. 3 次元球面内の結び目 K がカスプ付きディバイドの絡み目として表せる必要十分条件は，K が周期 2 を持つか，強可逆かのいづれかとなることである．

主定理の詳細な証明は [Su] を参照されたい．特に，トーラス結び目や 2 橋結び目はすべて強可逆結び目であるから，これらの結び目はカスプ付きディバイドの絡み目として表すことができることがわかる．

さて，本稿の構成を述べる．まず 2 章でカスプ付きディバイドと，それに付随する絡み目の性質について述べる．3 章では主定理といくつかの強可逆結び目の例を挙げる．また，図は全て参考文献の後にまとめてある．

謝辞 本研究集会で発表の機会を与えてくださいました世話人の皆様に感謝申し上げます．また，現地にて質問やコメント，議論いただいた参加者の皆様に感謝申し上げます．

2 カスプ付きディバイド

この節では，カスプ付きディバイドと付随する絡み目の定義と，基本的な性質を述べる．

定義 2.1. カスプ付きディバイド P とは，有限個の閉区間と S^1 から D^2 への連続写像の像で，有限個のカスプを除けばジェネリックで適切なはめ込みの像になっているもののことをいう．（図 1）

注意 2.2. カスプが一つもないものが A’Campo により導入された従来のディバイドである．

ディバイドのはめ込まれた D^2 を複素平面の単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とみなし，標準的に向きをいれる．$TD^2 \cong D^2 \times \mathbb{R}^2$ を接バンドルの全空間とし，3 次元球面 S^3 を $S(D^2) \subset TD^2$ と同一視する．ここで

$$S(D^2) = \{(x, v) \in TD^2 \mid |x|^2 + |v|^2 = 1\}$$

である．

定義 2.3. P をカスプ付きディバイドとする．このとき，ディバイド絡み目 $L(P)$ が以下で定まる．

$$L(P) = \{(x, v) \in S(D^2) \mid x \in P, v \in T_x P\}$$

注意 2.4. 滑らかな内部の点 $x \in \operatorname{Int} P$ からは，組が $L(P)$ に含まれるような接ベクトルは二つ $\pm v \in T_x P$ 存在する．$x \in \partial P$ の場合は，$0 \in T_x P$ との組のみが $L(P)$ に含まれる．

注意 2.5. カスプにおいては関数の微分は考えられないが，自然な接ベクトル空間が存在する．また，カスプの点は $L(P)$ 上の半捻りが対応し，捻りの向きはカスプが付いている向きに対応している．（図 2）

A’Campo のオリジナルのディバイドから得られる絡み目の図式の表し方については Couture–Perron[CP], Chmutov[Ch], 平澤 [Hi] により得られている．これらの方法はすべてカスプ付きディバイドの絡み目図式へと応用することができる．

例えば，平澤による方法では，ディバイドを傾きが ± 1 となるように折れ線にし，それを二重化して，適切に上下の交差をつけることでディバイド絡み目の図式の記述を与える．カスプがある場合も，カスプがある箇所で適切に半捻りを対応させせることで，絡み目の図式を書くことができる．（図 3，4，5 を参照．）

命題 2.6. カスプ付きディバイド P に対し，図 6 にある 6 つの変形を施しても，$L(P)$ のイソトピー型は変化しない．

同一視された 3 次元球面 $S(D^2)$ 上には，自己微分同相写像 $j : S(D^2) \to S(D^2); j(x, v) = (x, -v)$ が定まる．これは向きを保ち，固定点集合は $\mathrm{Fix}(j) = \partial D^2 \times \{0\}$（自明な結び目）で，$j^2 = id$ をみたす．

ディバイド絡み目の定義から，次の命題を得る．

命題 2.7. P をカスプ付きディバイドとし，$L(P)$ をディバイド絡み目とする．このとき，$j(L(P)) = L(P)$ をみたす．さらに，$\mathrm{Fix}(j) \cap L(P) \cong \partial P \times \{0\}$ である．

上記の対合 j の元で不変な絡み目の例として，強可逆結び目や，周期 2 の結び目があげられる．そのため，カスプ付きディバイドから得られる絡み目はしばしば強可逆結び目や周期 2 の結び目となる．

3　主結果と例

前節ではカスプ付きディバイドの基本的な性質を紹介，最後にカスプ付きディバイドがある対合のもと不変であると述べた．本研究の主結果は，命題 2.7 の逆も成り立ち，これらの条件は同値である，ということである．主結果を改めて述べると，次のようになる．

定理 3.1. 3 次元球面内の絡み目 L がカスプ付きディバイドの絡み目として表せる必要十分条件は，S^3 上の向きを保ち，空でない固定点集合を持つ対合 j が存在して，$j(L) = L$ をみたすことである．

必要条件であることは，ディバイド絡み目の定義より明らかであるから，非自明なのは十分条件を示すところである．大まかな証明の方針は，対合に対して対称的である絡み目が与えられたときに，対合と“相性のよい”D^2 への射影を考え，その射影図の情報をもとに絡み目を適切にイソトピー変形することで行われる．

注意 3.2. 2006 年に，Couture 氏によって符号付きディバイドから得られる絡み目と強可逆な絡み目が同値であることが示されている ([Co], Proposition 1.10) が，主定理の証明はこの証明のアイデアに基づいている．

符号付きディバイドとは雑に言えばディバイドの各交点に正負の符号をつけたものである．（符号付きディバイドについての詳細は [Co] を参照）符号付きディバイドはカスプ付きディバイドの特別な場合とみなすことができる．実際，負の符号がついた交点の近傍で，図 7 のようにカスプを加えることで，同じ絡み目を得ることができる．(1) のように符号付きディバイドの交点に負の符号が与えられる時，その近くで対応する絡み目の図式は (2) のようになる．これは (3) のようにカスプをつけたカスプ付きディバイドから得られる絡み目となる．したがって，今回の主結果は Couture の定理の一般化であると言える．

ここからは，主結果の条件を満たす対称的な絡み目で代表的なものである，トーラス結び目や 2 橋結び目のカスプ付きディバイドによる表示について紹介する．

例 3.3. n を正の整数とし，$T(2, 2n+1)$ を $(2, 2n+1)$-トーラス結び目とする．トーラス結び目に対しては，$(T(2, 2n+1), j_1)$ が強可逆になり，$(T(2, 2n+1), j_2)$ が周期 2 となるような二つの対合 j_1, j_2 が存在する．これらの対称的な結び目はどちらもカスプ付きディバイドの絡み目として表すことができ，図 3 のようになる．

例 3.4. 強可逆な結び目として，2 橋結び目が知られている．2 橋結び目は 0 でない偶数 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて Conway 表示 $C(a_1, \ldots, a_n)$ により表すことができる（図 9）．ここで，数字の書かれた四角形はその回数だけ右手向きの半捻りを表す（負の数字ならその絶対値の数だけ左手向きの半捻りを表す）．2 橋結び目 $C(a_1, \ldots, a_n)$ は図 10 にあるカスプ付きディバイドを用いて表すことができる．

また，作間 [Sa] により 2 橋結び目を含む強可逆結び目を表示する方法が与えられている（[Sa] 内の絡み目

$I_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; c_1, \ldots, c_n)$ と $I_2(a_1, \ldots, a_n)$）が，これらを表すカスプ付きディバイドも与えられる．（[Su] の Figure 14，15 を参照）

参考文献

[AC1] N. A'Campo, Real deformations and complex topology of plane curve singularities, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 8 (1999) 5-23.

[AC2] N. A'Campo, Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 88 (1998), 151-169 .

[Ch] S. Chmutov, Diagrams of divide knots, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 1623-1627.

[Co] O. Couture, Strongly invertible links and signed divides, *J. Topology*, **47** (2008), 316-350.

[CP] O. Couture, B. Perron, Representative braids for links associated to plane immersed curves. *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 1, 1-30.

[FK] R. Furutani, Y. Koda, Divides and hyperbolic volumes, preprint, arXiv:2306.12631

[Hi] M. Hirasawa, Visualization of A'Campo's fibered links and unknotting operation, *Topology Appl.* , **121** (2002) 287-304.

[I] M. Ishikawa, Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links, *Topology*, **43**, (2004), 215-232.

[IN] M. Ishikawa, H. Naoe, Milnor fibration, A'Campo's divide and Turaev's shadow, Singularities-Kagoshima 2017, *Proceedings of the 5the Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, World Scientific Publishing*, 2020, 71-93.

[Ka1] T. Kawamura, Quasipositivity of links of divides and free divides, *Topology. App.* , **125** (2002), 111-123.

[Sa] M. Sakuma, On strongly invertible knots, Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984), 176–196, Kinokuniya, Tokyo, 1986.

[Su] S. Sugawara, Divides with cusps and symmetric links, preprint, arXiv:2312.00422

[SY] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, *Topology Appl.* **313** (2022), Paper No. 107989

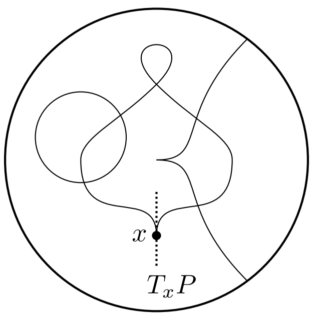

図 1　カスプ付きディバイドの例

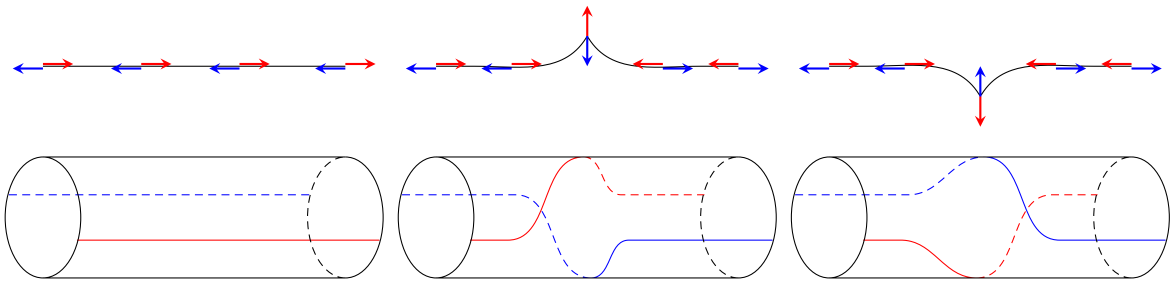

図 2　カスプの近くでの半捻り

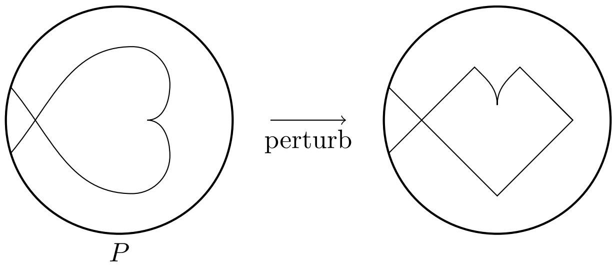

図 3　傾き ±1 のディバイドへ摂動

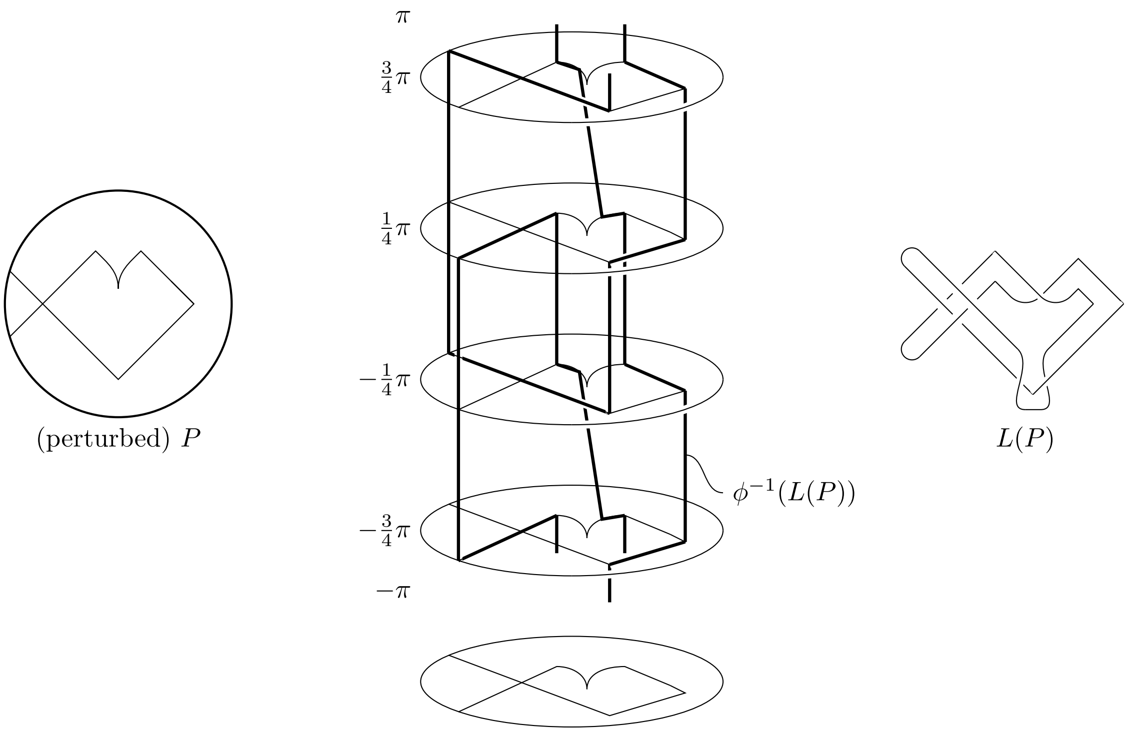

図 4　$L(P)$ の図式の例

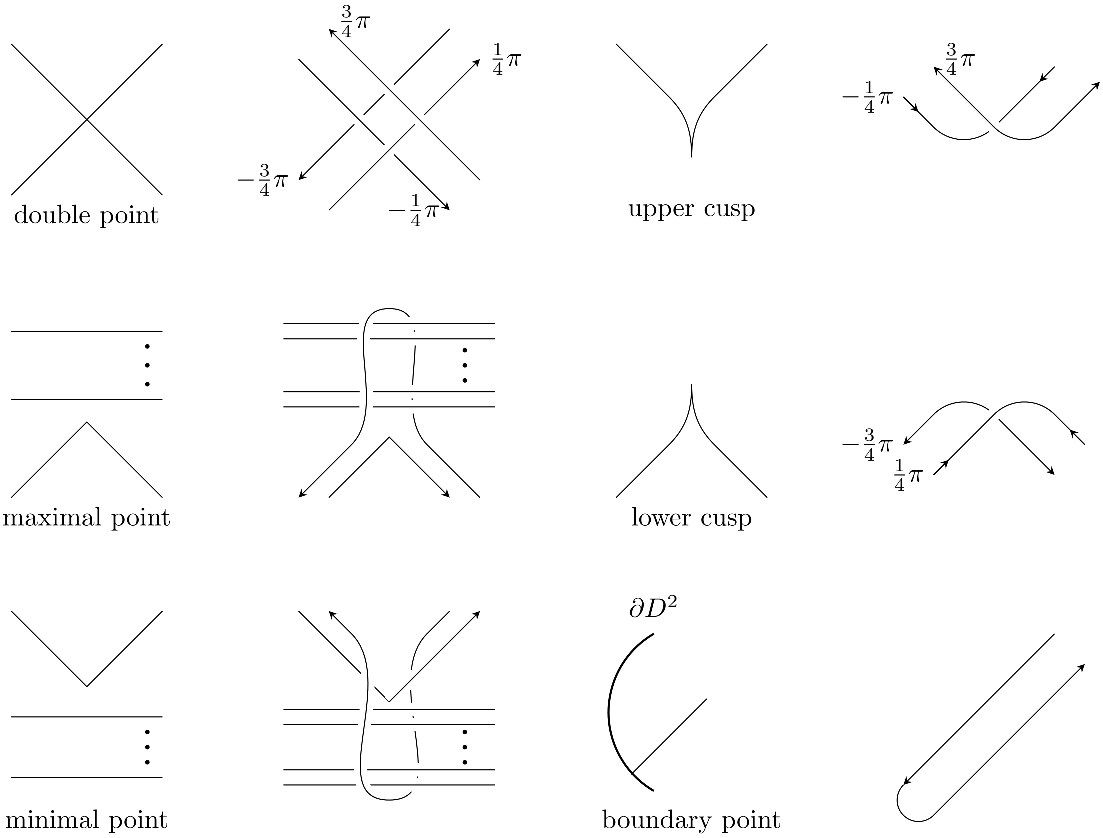

図 5　局所的なディバイド絡み目図式

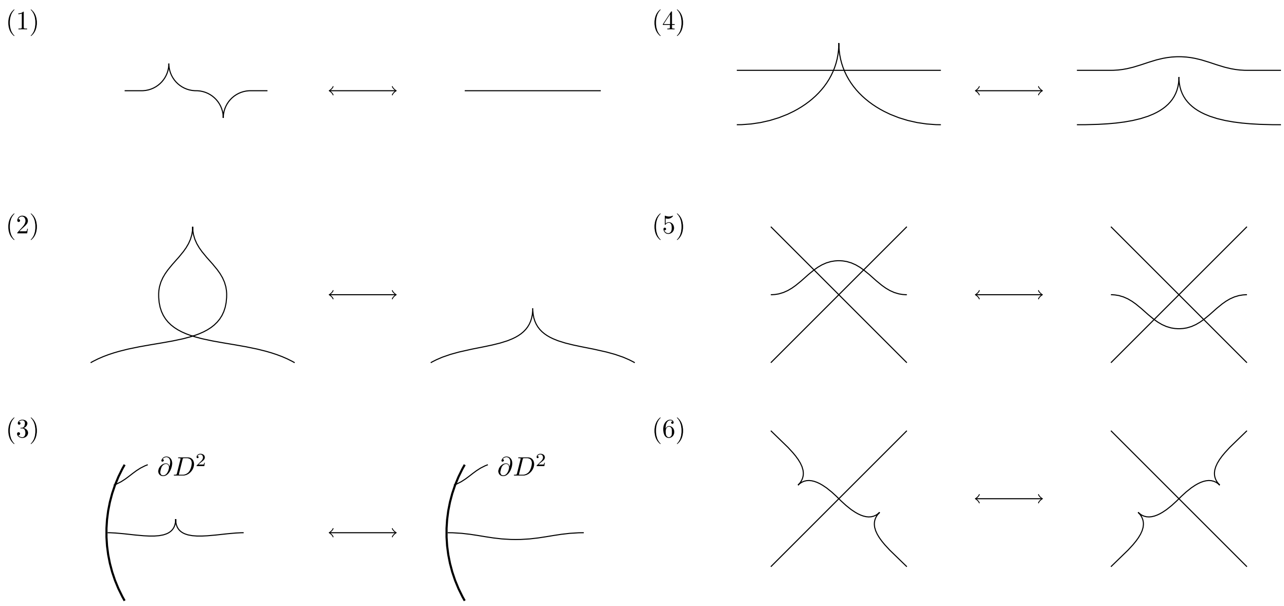

図 6　カスプ付きディバイドの変形

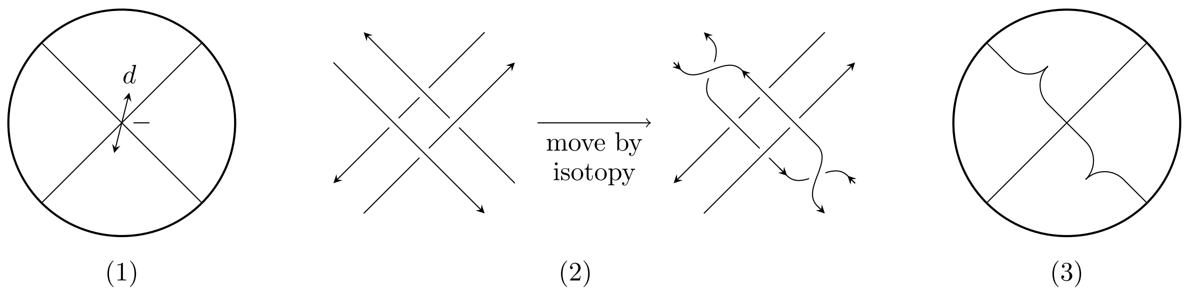

図 7　符号付きディバイドとカスプ付きディバイド

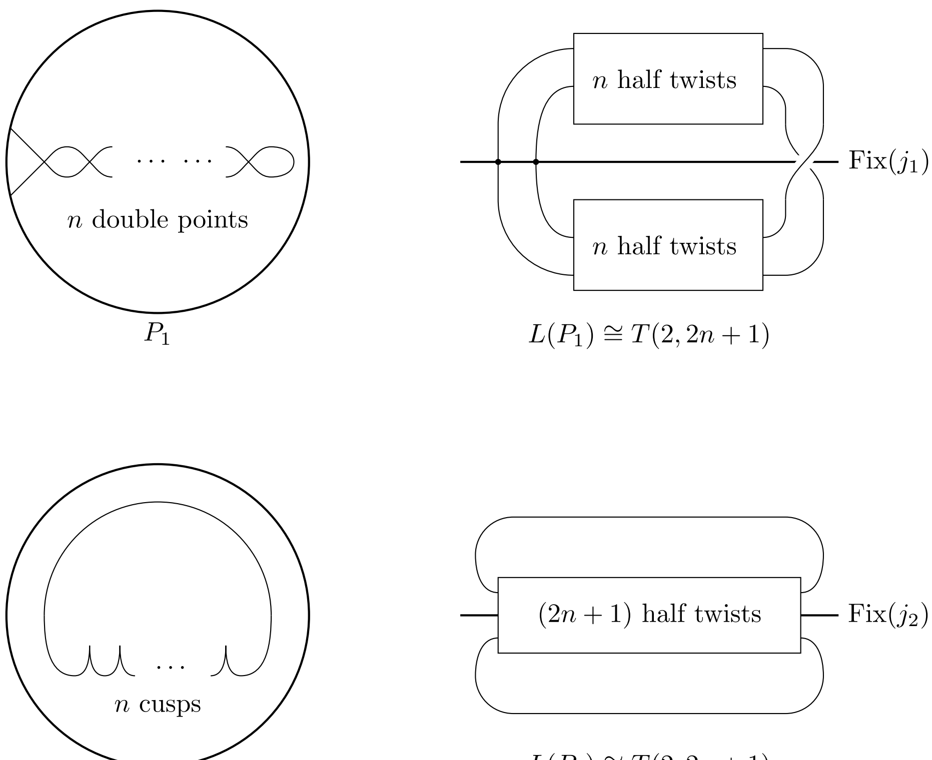

図 8　トーラス結び目 $T(2, 2n+1)$ を表すカスプ付きディバイド

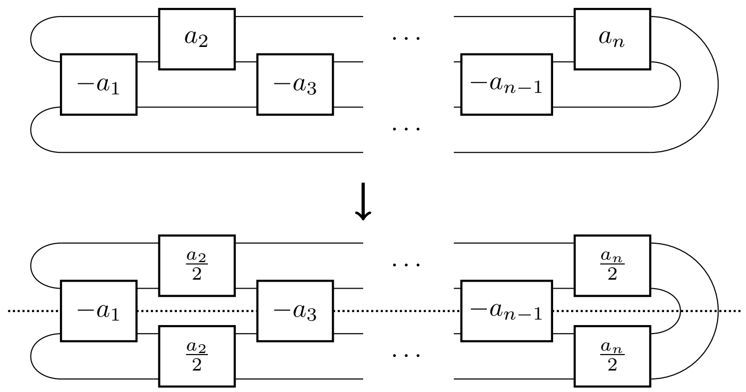

図 9　2 橋結び目 $C(a_1, \cdots, a_n)$

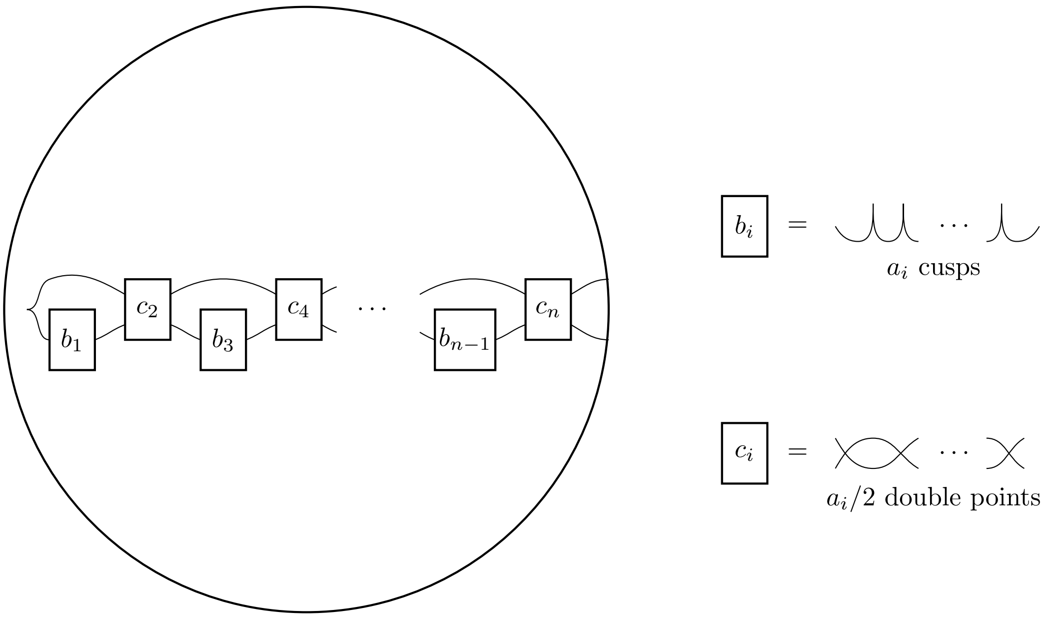

図 10　2 橋結び目 $C(a_1, \cdots, a_n)$ を表すカスプ付きディバイド