

ディバイドと双曲体積について

古谷 凌雅*

概 要

ディバイドとは, A'Campo が複素平面曲線の孤立特異点の研究に導入した概念であり, ディバイドからディバイド絡み目とよばれる絡み目が定まる. 本稿では, ディバイドがもつ組み合わせ構造を用いて, ディバイド絡み目補空間を組み合わせ的に再構成する. これにより, 素なディバイド絡み目補空間は, 理想双曲正 4 面体, 理想双曲正 8 面体, 理想双曲正立方 8 面体による双曲多面体分割をもつ双曲 3 次元多様体に Dehn 充填を施して得られることを示す. 本稿の内容は, 古宇田悠哉氏 (慶應義塾大学) との共同研究に基づく.

本稿を通して, $D \subset \mathbb{R}^2$ を 2 次元円盤とする. また, S^3 内の絡み目 L に対して, L の補空間 $S^3 - L$ の双曲体積を $\text{vol}(L)$ と表す. ただし, 絡み目 L が双曲絡み目でない場合は $\text{vol}(L) = 0$ とする.

1 導入

定義 1.1. 2 次元円盤 D 内にはめ込まれたコンパクト 1 次元多様体 P が以下を満たすとき, P はディバイドであるという.

- $\partial D \cap P = \partial P$ であり, これらの点で P は ∂D と横断的に交わる.
- P の任意の交点は 2 次元円盤 D の内部で横断的に交わり, かつ P は 3 重点をもたない.

$D - P$ の連結成分を領域という. 2 次元円盤 D の境界 ∂D と接する領域を外部領域とよび, 外部領域でない領域を内部領域とよぶ.

定義 1.2. ディバイド P が合成的であるとは, 以下を満たす 2 次元円盤 D 内に埋め込まれた弧 l が存在するときをいう.

- 弧 l はディバイド P とある点 x でのみ横断的に交わる.
- 交点 x はディバイド P の 2 重点でない.
- ディバイド P から交点 x を除くことにより, P は 2 つの連結成分 P_1, P_2 に分けられる. さらに, 連結成分 P_1, P_2 はともに P の 2 重点を少なくとも 1 つもつ.

ディバイド P が素であるとは, P が合成的でないときをいう.

ディバイド P に対して, 次のようにして S^3 内の絡み目が定まる. まず, TD を D の接束とし, これを \mathbb{R}^4 の部分空間 $D \times \mathbb{R}^2$ と同一視する. このとき, $N(TD)$ を接束 TD の点であって長さ 1 以下のものの集まりとする. 定義より, $N(TD)$ は \mathbb{R}^4 内の 4 次元

* 広島大学大学院先進理工系科学研究科
e-mail: d222850@hiroshima-u.ac.jp

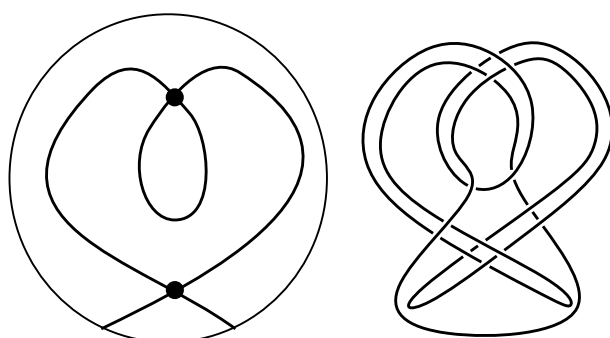


図 1: デイバイドとデイバイド絡み目の例.

球体である. このとき, デイバイド P に対して, $F_P := \{(x, u) \in N(TD) \mid x \in P, u \in T_x P, |x|^2 + |u|^2 \leq 1\}$ とおく. 定義より, F_P はデイバイド P の 2 重点を自己交差点にもつような 4 次元球体 $N(TD)$ 内にはめ込まれた曲面である.

定義 1.3. デイバイド P に対して, $L_P := F_P \cap \partial N(TD)$ を P のデイバイド絡み目とよぶ. これは $\partial N(TD)$ 内, すなわち, 3 次元球面 S^3 内の絡み目である.

デイバイド絡み目 L_P は強可逆な絡み目である. ここで, 3 次元球面 S^3 内の絡み目 L が強可逆であるとは, S^3 の向きを保つ対合 ι であって, $\iota(L) = L$ かつ ι は L の向きを逆にするものが存在するときをいう. 実際, デイバイド絡み目は $\partial N(TD)$ の対合 $\iota : \partial N(TD) \rightarrow \partial N(TD), (x, u) \mapsto (x, -u)$ により強可逆な絡み目であることがわかる. また, P が連結であるならば, デイバイド絡み目 L_P はファイバー絡み目となる (A'Campo [1]). また, スラローム結び目とよばれる Dynkin 図から得られるデイバイドから定まる結び目は, 具体的な例外を除いて, 双曲結び目である (A'Campo [2]). このことから, 双曲なデイバイド絡み目は無数に存在する.

本稿の構成は次の通りである. 2 章では, 3 次元球面 S^3 内の絡み目に対して, Turaev のシャドーとよばれる 2 次元多面体を定義し, シャドーを用いた絡み目外部空間の組み合わせ的な分解について述べる. そして, 本研究の先行研究である Costantino-Thurston が示したシャドーの頂点数による絡み目の双曲体積の評価について紹介する. ここでの議論は本研究の基礎である. 従って, 本稿の主結果との対比の為に少し詳しく述べる. 3 章では, 連結かつ素なデイバイドに対して, デイバイド多面体とよばれる 2 次元多面体を導入し, デイバイド多面体を用いたデイバイド絡み目外部空間の組み合わせ的な分解について述べ, デイバイド絡み目の双曲体積をデイバイドの 2 重点の数によって評価する.

2 絡み目図式から得られるシャドー

L を 4 次元球体 D^4 の境界 $\partial D^4 (= S^3)$ 上の絡み目とする. 4 次元球体 D^4 から 2 次元円盤 $D = \{(x, u) \in D^4 \mid u = 0\}$ への collapsing を S^3 上に制限して得られる射影を $\rho : S^3 \rightarrow D$ とおく. ここで射影 ρ は, 摂動することで, 絡み目 L に関してジェ

ネリックであるとしてよい. このとき, 像 $\rho(L)$ により得られる絡み目 L の図式を D_L とおく. 図式 D_L に対して, 内部領域と外部領域をディバイドと同様に定める. ここで, あらかじめ絡み目 L を S^3 内でイソトピックに動かすことにより, 図式 D_L は連結であり, さらに, 外部領域はアニュラスであるとしてよい. このとき, 射影 ρ による写像柱 $D \cup (L \times [0, 1]) / (x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ から図式 D_L のすべての外部領域を除いて得られる 2 次元多面体を X_{D_L} と定める. 定め方より, X_{D_L} は 4 次元球体 D^4 内に適切に埋め込まれた 2 次元多面体であり, その境界 ∂X_{D_L} は絡み目 L である. 2 次元多面体 X_{D_L} は (S^3, L) のシャドーの 1 つである. シャドーとは Turaev が量子不変量の研究の一環として導入した概念であり, 4 次元多様体に適切な条件を満たすように埋め込まれた 2 次元多面体のことである (Turaev [6]). (S^3, L) のシャドー X_{D_L} の各点の近傍は図 2 の局所モデルのいずれかと同相であり, X_{D_L} はこれらの局所モデルの組み合わせによって構成される. 像 $\rho(L)$ の 2 重点であるシャドー X_{D_L} の点を X_{D_L} の頂点とよぶ. X_{D_L} の頂点は図 2 の (iii) の局所モデルと同相な近傍をもつ. また, 図 2 の各局所モデルの 4-thickening を X_{D_L} の組み合わせ構造に従って貼り合わせることで, 4 次元球体 D^4 が再構成される. この再構成の方法を **Turaev の reconstruction** という (Turaev [6]). このとき, 再構成した 4 次元球体 D^4 とシャドー X_{D_L} の境界をとることにより, S^3 内の絡み目 L が再構成される. 従って, シャドー X_{D_L} は 4 次元球体 D^4 とその境界上の絡み目 L を表す 2 次元多面体である.

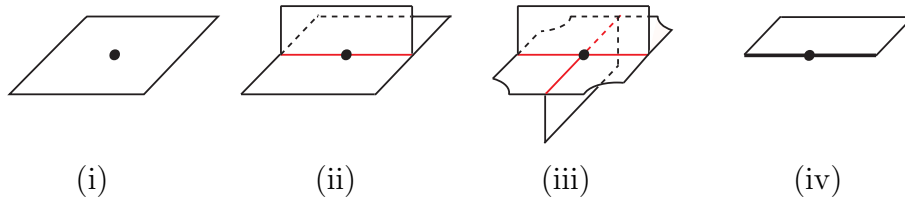


図 2: シャドー X_{D_L} の局所モデル. 赤線は像 $\rho(L)$ を表し, 太線は境界を表す.

2.1 シャドーから得られる絡み目外部空間の分解

この節では, Costantino-Thurston [3] に基づき, シャドー X_{D_L} の組み合わせ構造に従って, 絡み目 L の外部空間を幾何構造をもつピースに分解する. これにより, 双曲体積 $\text{vol}(L)$ をシャドー X_{D_L} の頂点数によって評価する. (S^3, L) のシャドー X_{D_L} の定め方から, 4 次元球体 D^4 は X_{D_L} へ collapse する. この collapsing を 4 次元球体 D^4 の境界上に制限したものを $\pi: S^3 \rightarrow X_{D_L}$ とおく. このとき, collapsing π は, 摂動することにより, 図式 D_L の内部領域上で S^1 束であるとしてよい. R_1, R_2, \dots, R_m をシャドー X_{D_L} から像 $\rho(L)$ の近傍 $\text{Nbd}(\rho(L); X_{D_L})$ を除いて得られる連結成分であって, 図式 D_L の内部領域に含まれるものとする. 近傍 $\text{Nbd}(\rho(L); X_{D_L})$ の π による引き戻しを $M_{D_L} := \pi^{-1}(\rho(L); X_{D_L})$ とおく. このとき, シャドー X_{D_L} の定め方より, 各 R_i は 2 次元円盤と同相であるので, 絡み目 L の外部空間 $E(L)$ は 3 次元多様体 M_{D_L} に 2 次元円

盤 R_i ($i = 1, 2, \dots, m$) に対応した Dehn 充填を施すことにより得られる. このとき, 3次元多様体 M_{D_L} について次が成り立つ.

定理 2.1. (Costantino-Thurston [3]) 3次元多様体 M_{D_L} の内部は完備双曲 3次元多様体であり, その双曲体積は $2v_{\text{oct}}n$ である. ここで n はシャドー X_{D_L} の頂点数を表し, v_{oct} は理想双曲正 8 面体の双曲体積を表す.

定理 2.1 の証明の概要を述べる. シャドー X_{D_L} の頂点を c_1, c_2, \dots, c_n とおく. 各頂点 c_i に対して, C_i を図 2 (iii) と同相な c_i の近傍とする. 各頂点近傍 C_i に対して, C_i の 3-thickening M_{c_i} をとる (図 3). このとき, Turaev の reconstruction により, 各頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C_i)$ は 3-thickening M_{c_i} の 2 つのコピーを図 4 の通りに貼り合わせて得られるハンドル体となる. ここで, 各 3-thickening M_{c_i} を切頂理想双曲正 8 面体とみなし, M_{c_i} に双曲構造をいれる. このとき, 3次元多様体 M_{D_L} は, n 個のハンドル体 $\pi^{-1}(C_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を, シャドー X_{D_L} の組み合わせ構造に従って, 境界上の全測地面で貼り合わせるにより再構成される. これにより, 3次元多様体 M_{D_L} の $2n$ 個の切頂理想双曲正 8 面体による分割を得る. このとき, この分割からの誘導により, 3次元多様体 M_{D_L} の内部は $2n$ 個の理想双曲正 8 面体によって分割される. この分割により, 定理 2.1 の主張が成り立つ.

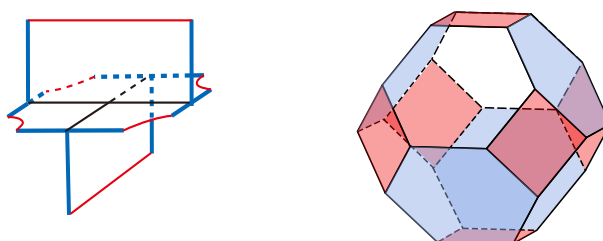


図 3: 頂点近傍 C と 3-thickening M_c .

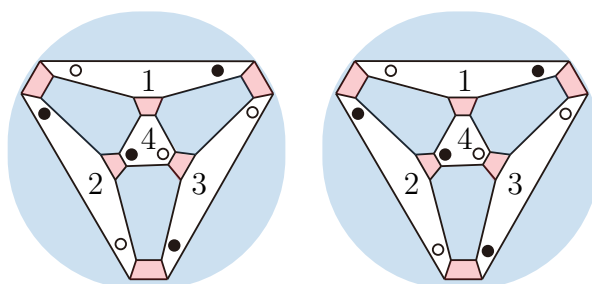


図 4: 頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ の切頂理想双曲正 8 面体による分割.

定理 2.1 により, (S^3, L) のシャドー X_{D_L} の頂点数による絡み目 L の双曲体積の上からの評価が得られる.

系 2.2. n を (S^3, L) のシャドー X_{D_L} の頂点数とする. このとき $\text{vol}(L) \leq 2v_{\text{oct}}n$ が成り立つ.

3 デイバイド多面体

デイバイド P を連結かつ素であり, 少なくとも 1 つの内部領域をもつものとする. このとき, デイバイド P に対して, 次の 2 次元多面体を定める.

定義 3.1. 2 次元円盤 D と曲面 F_P との和集合 $D \cup F_P$ から P のすべての外部領域を除いて得られる 2 次元多面体 X_P をデイバイド P のデイバイド多面体とよぶ.

デイバイド多面体 X_P は 4 次元球体 $N(TD)$ 内に適切に埋め込まれた 2 次元多面体であり, その境界はデイバイド絡み目 L_P である. さらに, 2 節のシャドーと同様に, 4 次元球体 $N(TD)$ はデイバイド多面体 X_P に collapse し, かつ, X_P は P の近傍 $\text{Nbd}(P; X_P)$ と P の内部領域に対応するいくつかの 2 次元円盤に分解される. デイバイド P の 2 重点であるデイバイド多面体 X_P の点を X_P の頂点とよぶ. デイバイド多面体 X_P の頂点は図 5 の 5 つの局所モデルのうちのいずれかと同相な近傍をもつ.

定義 3.2. デイバイド多面体 X_P の頂点 c に対して, 頂点 c がタイプ i の頂点であるとは c の近傍として図 5 のタイプ i の局所モデルと同相なものがとれるときをいう ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

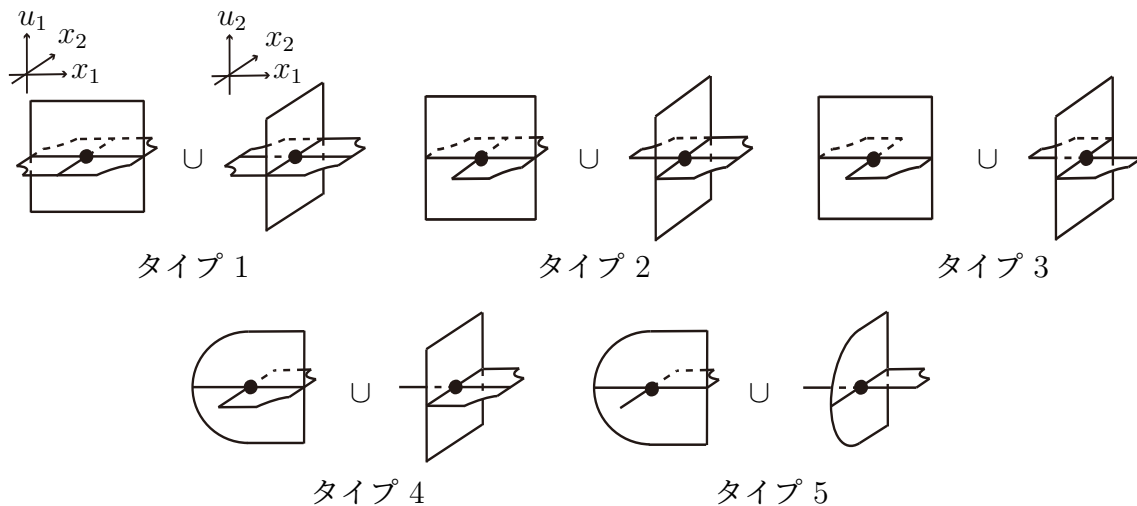


図 5: デイバイド多面体の頂点近傍.

3.1 デイバイド多面体から得られるデイバイド絡み目外部空間の分解

4 次元球体 $N(TD)$ からデイバイド多面体 X_P への collapsing を $N(TD)$ の境界上に制限したものを $\pi : \partial N(TD) \rightarrow X_P$ とおく. デイバイド P の近傍 $\text{Nbd}(P; X_P)$ の collapsing π による引き戻しとして得られる 3 次元多様体を $M_P := \pi^{-1}(\text{Nbd}(\rho(L); X_P))$

とおく. このとき, 2.1 節のシャドーと同様に, デイバイド絡み目 L_P の外部空間 $E(L_P)$ は 3 次元多様体 M_P に P の内部領域に対応した Dehn 充填を施すことで得られる. このとき, 次で述べる主定理の通り, 3 次元多様体 M_P の内部は完備双曲 3 次元多様体であり, その双曲構造はデイバイド多面体 X_P の組み合わせ構造により定まる.

定理 3.3. 3 次元多様体 M_P の内部は完備双曲 3 次元多様体であり, その双曲体積は $4v_{\text{oct}}n_1 + v_{\text{co}}n_2 + 10v_{\text{tet}}n_3 + 2v_{\text{oct}}n_4 + v_{\text{oct}}n_5$ である. ここで n_i はデイバイド多面体 X_P のタイプ i の頂点数を表し ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $v_{\text{tet}}, v_{\text{co}}$ はそれぞれ理想双曲正 4 面体, 理想双曲正立方 8 面体の双曲体積を表す.

以下, 定理 3.3 の証明を述べる. まず, 次の命題を示す.

命題 3.4. 点 $c \in X_P$ をデイバイド多面体 X_P のタイプ i の頂点とし, 頂点 c の近傍 C を図 5 のタイプ i とする ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). このとき, 次が成り立つ.

1. 頂点 c がタイプ 1 のとき, $\pi^{-1}(C)$ は 4 個の切頂理想双曲正 8 面体を図 6 の (i) の通りに貼り合わせて得られる種数 4 のハンドル体であり, 境界上に全測地的 4 つ穴あき球面を 4 つもつ.
2. 頂点 c がタイプ 2 のとき, $\pi^{-1}(C)$ は 1 個の切頂理想双曲正立方 8 面体を図 6 の (ii) の通りに貼り合わせて得られる種数 4 のハンドル体であり, 境界上に全測地的 3 つ穴あき球面を 2 つと全測地的 4 つ穴あき球面を 2 つもつ.
3. 頂点 c がタイプ 3 のとき, $\pi^{-1}(C)$ は 10 個の切頂理想双曲正 4 面体を図 6 の (iii) の通りに貼り合わせて得られる種数 3 のハンドル体であり, 境界上に全測地的 3 つ穴あき球面を 4 つもつ.
4. 頂点 c がタイプ 4 のとき, $\pi^{-1}(C)$ は 2 個の切頂理想双曲正 8 面体を図 6 の (iv) の通りに貼り合わせて得られる種数 3 のハンドル体であり, 境界上に全測地的 3 つ穴あき球面を 2 つと全測地的 4 つ穴あき球面を 1 つもつ.
5. 頂点 c がタイプ 5 のとき, $\pi^{-1}(C)$ は 1 個の切頂理想双曲正 8 面体を図 6 の (v) の通りに貼り合わせて得られる種数 2 のハンドル体であり, 境界上に全測地的 3 つ穴あき球面を 2 つもつ.

証明 命題 3.4 は, タイプ 1, 2, 4, 5 の頂点については定理 2.1 の証明に基づいた手法で示し, タイプ 3 の頂点については具体的な絡み目外部空間を用いて示す.

タイプ 1, 2, 4, 5 の頂点について. 頂点 c はタイプ 1 であるとする. このとき, 4 次元球体 $N(TD)$ の対合 $\iota : N(TD) \rightarrow N(TD), (x, u) \rightarrow (x, -u)$ によって, 頂点近傍 C とその引き戻し $\pi^{-1}(C)$ を割った空間をそれぞれ $C/\iota, \pi^{-1}(C)/\iota$ とおく. すると, 商空間 C/ι は図 7 左下に示した 2 次元多面体となり, これは 2 節のシャドーの頂点近傍である図 2 (iii) と同相である. このとき, 定理 2.1 と同様にして, 2 次元多面体 C/ι の 3-thickening

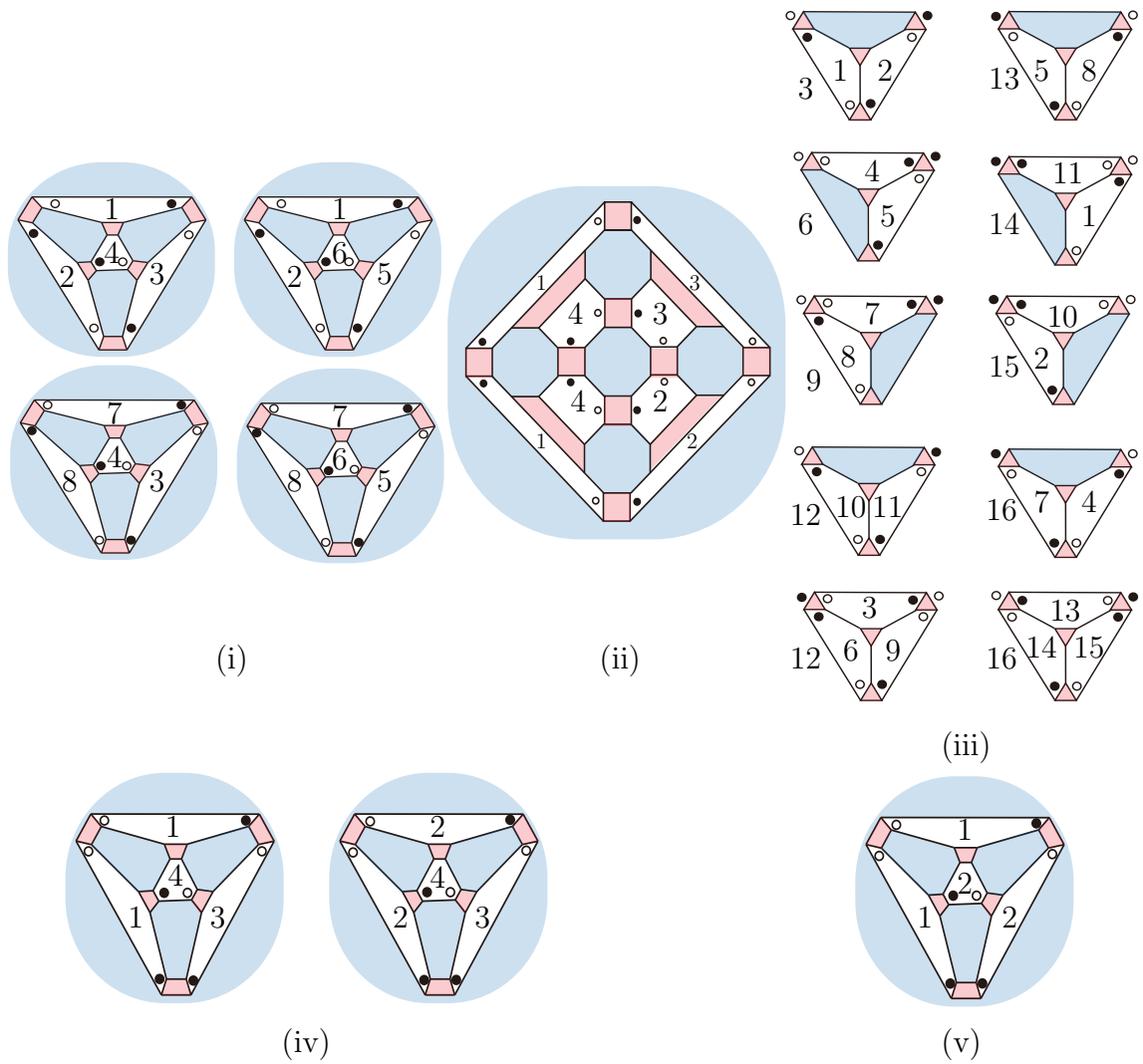


図 6: 頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ の切頂理想双曲正多面体分割.

$M_{C/\iota}$ を切頂理想双曲正 8 面体とみなすことにより, 商空間 $\pi^{-1}(C)/\iota$ は切頂理想双曲正 8 面体 $M_{C/\iota}$ の 2 つのコピーを図 4 の通りに貼り合わせて得られる種数 3 のハンドル体であることが示される. さらに, このハンドル体 $\pi^{-1}(C)/\iota$ を対合 ι で頂点近傍 C の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ に引き戻すことにより, $\pi^{-1}(C)$ は切頂理想双曲正 8 面体 $M_{C/\iota}$ の 4 つのコピーを図 6 の (i) の通りに貼り合わせて得られる種数 4 のハンドル体であることがわかる. これにより, 命題 3.4 の 1 が成り立つ.

次に, 頂点 c をタイプ 2, 4, 5 のいずれかであるとする. タイプ 1 の場合と同様に, 頂点近傍 C を対合 ι により割った空間を C/ι とおく. すると, 各タイプに対して, 商空間 C/ι とその 3-thickening $M_{C/\iota}$ はそれぞれ図 8 に示したものとなる. ここで, 各タイプの 3-thickening $M_{C/\iota}$ に対して, タイプ 2 のものを理想双曲正 8 面体の 1 つの理想頂点を面角が $\pi/2$ である辺に変形し, 残りの理想頂点を切頂したもののみなし, タイプ 4 のものを切頂理想双曲正 8 面体の半分のみなし, タイプ 5 のものを切頂理想双曲正 8 面体の 4

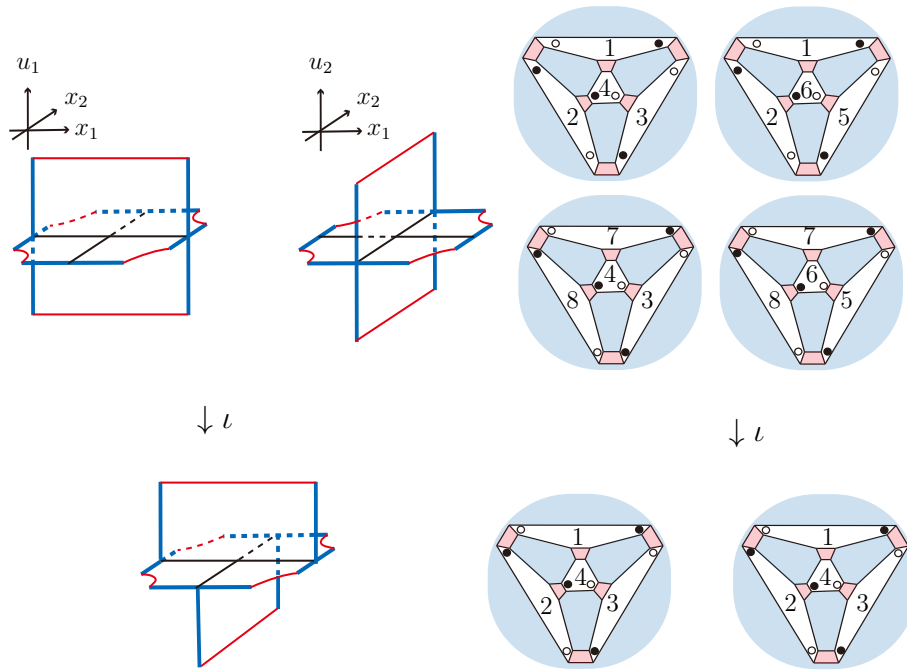


図 7: 命題 3.4 の 1 の証明の概要図.

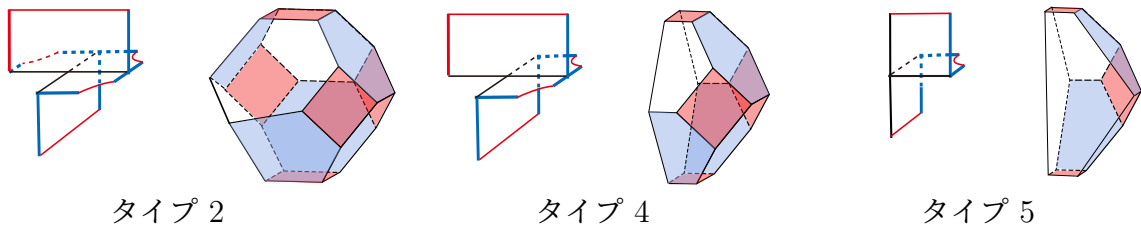


図 8: タイプ 2, 4, 5 の頂点 c における頂点近傍 C/ι と 3-thickening $M_{C/\iota}$.

半分とみなす. これにより, 各 3-thickening $M_{C/\iota}$ に双曲構造をいれる. このとき, タイプ 1 の場合の証明と同様にして, 頂点近傍 C の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ は 3-thickening $M_{C/\iota}$ の 4 つのコピーを貼り合わせることで得られる. その結果, タイプ 2, 4, 5 に対して, $\pi^{-1}(C)$ はそれぞれ図 6 の (ii), (iv), (v) に示した切頂理想双曲正多面体分割の貼り合わせによって得られるハンドル体であることが示される. これにより, 命題 3.4 の 2, 4, 5 が成り立つ.

タイプ 3 の頂点近傍について. デイバイド P を図 9 の左下に示したものとする. デイバイド P のデイバイド多面体 X_P はタイプ 3 の頂点 $c \in X_P$ を 1 つもつ. このとき, デイバイド P の近傍 $\text{Nbd}(P; X_P)$ の引き戻し $M_P := \pi^{-1}(\text{Nbd}(P; X_P))$ は図 10 の左に示した絡み目 \widehat{L}_P の外部空間 $E(\widehat{L}_P)$ と同相である. また, 絡み目 \widehat{L}_P の鏡像は図 10 の右に示した絡み目 L と同値である. さらに, 絡み目 L は 10 個の理想双曲正 4 面体による双曲多面体分割をもつ (Furutani-Koda [4]). 以上より, 絡み目 \widehat{L}_P は絡み目 L と同じ 10 個の理想双曲正 4 面体による双曲多面体分割をもつ. タイプ 3 の頂点近傍 C はデイバイド P の近傍 $\text{Nbd}(P; X_P)$ を図 9 の右下に示した線分 Y_1, Y_2 に沿って切り開くことで得られる.

線分 Y_1, Y_2 を collapsing π で引き戻したものは $E(\widehat{L}_P)$ 内で図9の右上に示した3つ穴あき球面 Q_1, Q_2 である. これらの3つ穴あき球面は $E(\widehat{L}_P)$ の10個の切頂理想双曲正4面体分割における全測地的3つ穴あき球面である ([4]). 従って, タイプ3の頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ は $E(\widehat{L}_P)$ の10個の切頂理想双曲正4面体分割からこれらの3つ穴あき球面を切り開くことで得られる. これにより, タイプ3の頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C)$ は図6の(iii)に示した双曲多面体分割をもつ. 以上により, 命題3.4の3が成り立つ.

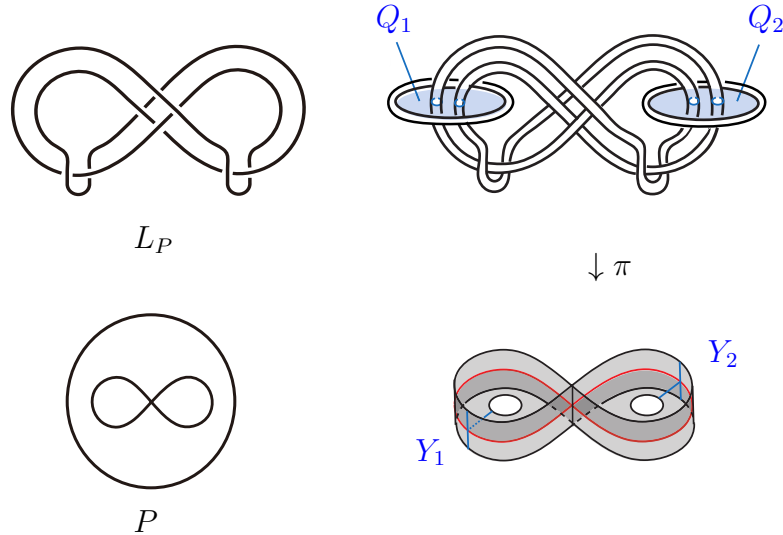


図9: 線分 $Y_1, Y_2 \subset \text{Nbd}(P; X_P)$ と3つ穴あき球面 $Q_1, Q_2 \subset E(\widehat{L}_P)$.

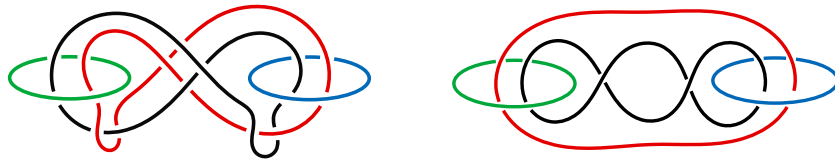


図10: 絡み目 \widehat{L}_P と L .

□

命題3.4により, 定理3.3は以下の通りに証明される.

定理3.3の証明 点 c_1, c_2, \dots, c_n をダイバイド多面体 X_P のすべての頂点とする. 命題3.4より, 各頂点近傍の引き戻し $\pi^{-1}(C_i)$ は図6に示した切頂理想双曲正多面体分割をもつハンドル体である. 3次元多様体 M_P は, ダイバイド多面体 X_P の組み合わせ構造に従って, n 個のハンドル体 $\pi^{-1}(C_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をこれらの境界上の全測地的3つ穴あき球面または4つ穴あき球面に沿って貼り合わせることで得られる. 貼り合わせ方により, 各切頂理想双曲正多面体の1辺に集まる面角の和は 2π となる. さらに, 図6の各切頂理想双曲正多面体の切頂面の大きさ (すなわち, 理想頂点のホロ球面の高さ) をあらかじめ調節しておくことにより, 貼り合わせによって貼り合わせ面のスケールは変わらないとしてよい. これにより, M_P の各境界トーラスは, これら切頂理想双曲正多面体のカस्प面

によるタイル貼りとして得られ, ユークリッド構造が入る. 以上により, 上記の構成によって, 3次元多様体 M_P の切頂理想双曲正多面体分割が得られる. この分割からの誘導により, M_P の内部はこれらの理想双曲正多面体に分割される. これにより, 定理 3.3 の主張が成り立つ.

□

定理 3.3 により, デイバイド多面体 X_P の頂点数によるデイバイド絡み目 L_P の双曲体積の上からの評価が得られる.

系 3.5. n_i をデイバイド多面体 X_P のタイプ i の頂点数とする ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). このとき, $\text{vol}(L_P) \leq 4v_{\text{oct}}n_1 + v_{\text{co}}n_2 + 10v_{\text{tet}}n_3 + 2v_{\text{oct}}n_4 + v_{\text{oct}}n_5$ が成り立つ.

注意. 系 3.5 で与えたデイバイド絡み目の双曲体積の評価式は漸近的にシャープである. すなわち, デイバイドの列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって, デイバイド絡み目 L_{P_n} の双曲体積 $\text{vol}(L_{P_n})$ が系 3.5 が示す上限に漸近的に近づくものが存在する (Furutani-Koda [5]).

4 謝辞

本研究集会での貴重な講演の機会を与えてくださった世話人の大山淑之先生ならびに新國亮先生に感謝申し上げます. また, 本研究集会にて質問や議論をしてくださいました皆様に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] A'Campo, N., Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 88 (1998), 151–169 (1999).
- [2] A'Campo, N., Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 88 (1998), 171–180 (1999).
- [3] Costantino, F., Thurston, D., 3-manifolds efficiently bound 4-manifolds, J. Topol. **1** (2008), no. 3, 703–745.
- [4] Furutani, R., Koda, Y., Stable maps and hyperbolic links, *to appear in* Comm. Anal. Geom.
- [5] Furutani, R., Koda, Y., Divides and hyperbolic volumes, arXiv:math/2306.12631.
- [6] Turaev, V. G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.