

Non-singular extensions of circle-valued Morse functions

九州大学 マス・フォア・イノベーション関係学府
 岩倉康樹*

1 問題

今回考えた問題について紹介する。以下、多様体や写像は滑らかなもののみ考える。

Question 1.1. 向き付け可能な閉曲面 M^2 , 沈め込み $g: M^2 \times [0, 1) \rightarrow S^1$ で $g|_{M \times \{0\}} = f$ が circle-valued Morse function であるものが与えられているとする。このとき、向き付け可能でコンパクトな 3次元多様体 N^3 で $\partial N = M$ を満たすもの、沈めこみ $G: N^3 \rightarrow S^1$ で以下の図式を可換にするものが存在する条件は何か？

$$\begin{array}{ccc}
 M^2 \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\
 \downarrow i & \nearrow G & \\
 N^3 & &
 \end{array}$$

ただし、 i は自然な包含写像とする。

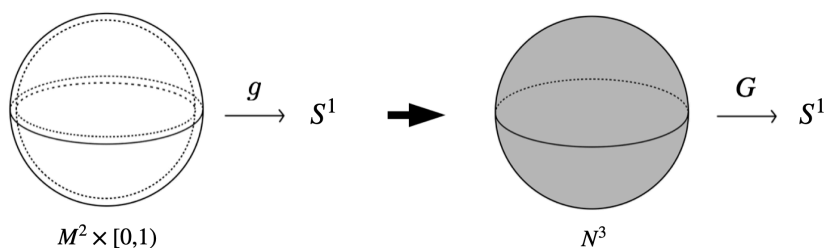


Figure1: Question 1.1のイメージ図

2 先行研究と今回の研究について

Question 1.1に関連する先行研究を紹介する。

1次元多様体上 Morse 関数に関する研究は、Blank-Laudenbuch[2] により行われている。

次に閉曲面上の Morse 関数に関する研究を紹介する。曲面が向き付け可能である場合は Curley による研究 [3] がある。曲面が向き付け不可能な場合には Laroche による研究 [6] がある。閉曲面上の

* iwakura.kouki.285@s.kyushu-u.ac.jp

Morse 関数の研究において, Reeb graph という写像から得られるグラフを用いることで, 拡張の存在の条件は組み合わせ的な対象を考えることに帰着されることは特筆すべき点である.

定義域多様体が一般次元の球面の場合については, Barannikov[1] や Seigneur[9] により研究がされている. 前者は組み合わせ的, 後者は代数的な見方で拡張が可能になるための必要条件について考えている.

今回の研究 [5] は Curley の研究を参考に, 値域多様体が S^1 の場合, つまり circle-valued Morse function について考えたものである. 以下では, 今回の発表で用いた用語を定義し, 主定理を紹介する.

3 用語

今回の発表の中で用いた用語についてまとめておく.

3.1 circle-valued Morse function

まずは circle-valued Morse function を定義する. circle-valued Morse function に関する事実は, [4] を参考にした. 以下, 写像の値域として現れる S^1 は向き付けられていると仮定する.

Definition 3.1 (circle-valued Morse function). M^2 は閉曲面とする. このとき, $f: M^2 \rightarrow S^1$ が *circle-valued Morse function* であるとは, f の臨界点が全て非退化で, 臨界値が全て異なることとする.

Remark 3.2. 今回は *circle-valued Morse function* として, 沈め込みも許すことにする.

3.2 Reeb graph と label

次に circle-valued Morse function の Reeb graph を定義する.

Definition 3.3 (Reeb graph). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $f: M^2 \rightarrow S^1$ は *circle-valued Morse function* とする. このとき, $x, y \in M$ に対して, \sim を次のように定義する:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \text{ かつ } x, y \text{ は } f^{-1}(f(x)) \text{ の同じ連結成分に含まれる.}$$

これは同値関係であり, $W_f := M / \sim$ を f の **Reeb graph** という. W_f にて, f の臨界点が含まれる逆像の連結成分に対応する部分を頂点とする.

また, 下の可換図式を満たす連続写像 $\bar{f}: W_f \rightarrow S^1$ は一意的に定まる. 但し, $q_f: M \rightarrow W_f$ は商写像とする.

$$\begin{array}{ccc} M^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q_f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ W_f & & \end{array}$$

頂点周りでの様子は Morse の補題 [7] から Figure 2のいずれかである.



Figure2: Reeb graph の頂点周りの様子

Remark 3.4. *circle-valued Morse function* の *Reeb graph* は上で定義した頂点, 辺でグラフになるとは限らない. 例えば, $f: T^2 \rightarrow S^1$ を Figure 3 とすると, *Reeb graph* は S^1 である.

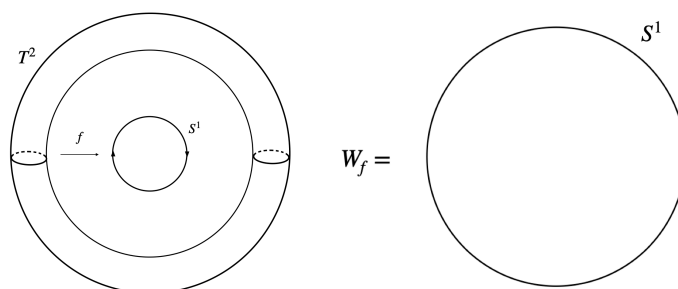


Figure3: Reeb graph が S^1 である例

さらに, *Reeb graph* の頂点に g によって厚みに関する情報を付与する.

$p \in M$ を f の臨界点, $w \in T_p(M \times [0,1])$ を outward normal vector とする. このとき, $dg_p(w) \in T_{g(p)}S^1$ は S^1 の向きについて, 正, 負のいずれかである. 正であるとき W_f の対応する頂点に “+”, 負であるとき “-” を付与する.

Definition 3.5 (labeled Reeb graph). 上の方法で各頂点に符号を付与した *Reeb graph* を **labeled Reeb graph** と呼び, W_f^\pm で表す.

Figure 4 は labeled Reeb graph の例である.

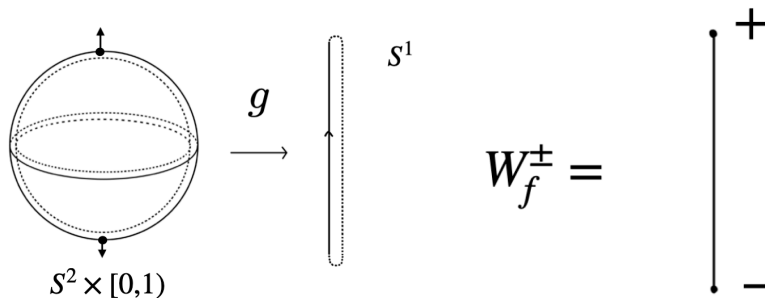


Figure4: labeled Reeb graph の具体例

3.3 non-singular extension

今回の発表題目にも含まれている, non-singular extension を定義する.

Definition 3.6 (non-singular extension). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g: M^2 \times [0, 1) \rightarrow S^1$ は $g|_{M \times \{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3次元多様体 N^3 で境界が M に一致するようなもの, 沈め込み $G: N \rightarrow S^1$ で以下の図式を可換にするものが存在するとき, G を g の *non-singular extension* という.

$$\begin{array}{ccc} M^2 \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N^3 & & \end{array}$$

上の図式は, Question 1.1の図式と同じものである.

3.4 collapse

次に, “collapse”を導入する. これは, 拡張で臨界点まわりがどのように振る舞うのかということを組み合わせた言葉で表したものである.

Definition 3.7 (collapse). M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g: M^2 \times [0, 1) \rightarrow S^1$ は $f = g|_{M \times \{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. また, V は有限グラフといくつかの S^1 の非交和, $h: V \rightarrow S^1$ はグラフの辺, S^1 への制限がはめ込みであるような連続写像とする. ここで, 全射である連続写像 $C: W_f^\pm \rightarrow V$ が以下の条件を満たすとする:

1. C により, W_f^\pm の頂点は V の頂点に一対一に対応する,
2. 下の図式は可換である,
3. C は頂点周りで *Figure 5*のいずれかである.

$$\begin{array}{ccc} W_f^\pm & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \\ C \downarrow & \nearrow h & \\ V & & \end{array}$$

このとき, C を *collapse* という.

さらに, collapse には “allowable” という性質を定義できる. 正確な定義は省略し, [5] に譲るが, 簡潔にいうと, V のそれぞれの連結成分で, V での *Figure 5*における G^+ , G^- に対応する頂点が一対一に対応するということである.

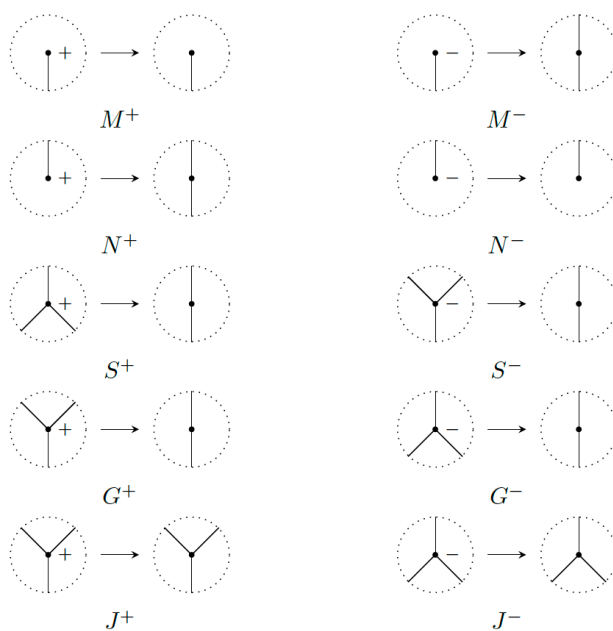


Figure5: collapse の頂点周りでの様子

4 主定理

Theorem 4.1. M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g : M \times [0, 1) \rightarrow S^1$ は沈め込みで, 境界への制限 f が *circle-valued Morse function* であるものとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3 次元多様体 N , g の *non-singular extension* $G : N \rightarrow S^1$ で (\star) を満たすものが存在するための必要十分条件は,

- V : 有限グラフといくつかの S^1 の非交和,
- $h : V \rightarrow S^1$: 有限グラフの辺, S^1 上ではめ込みであるような連続写像,
- $C : W_f^\pm \rightarrow V$: *allowable collapse*,

が存在することである.

但し, (\star) は以下の条件である:

各 $r \in S^1$ に対して, $G^{-1}(r)$ は境界を持つ.

定理の証明の流れを簡単に紹介しておく.

g の *non-singular extension* が与えられた状況からは, f の臨界点周りの g の形を観察することで, 条件を満たす Reeb graph や collapse を具体的に得る.

逆に, collapse C や h が与えられているとする. このとき, collapse により, g が拡張されるとき臨界点周りの様子がわかっている. また, 拡張した後の写像の値は h に従うとする. 従って, 実際に Figure 6 を collapse の局所表示 Figure 5 に従って組み合わせ, 値が h に従うように N を構成することで, G を構成する.

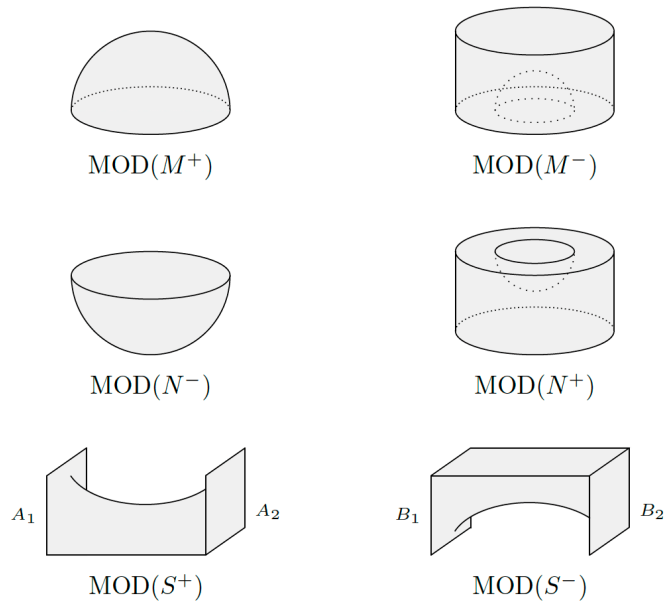


Figure6: 構成に使われるパーツ

5 まとめ

先行研究や今回の主定理について述べた場合は定義域多様体の次元が1のときであり、拡張した後の写像は臨界点を持たなかった。他の次元ではどうなのか、特異点を作るように拡張する場合にはどういった条件を考えれば良いのか、拡張の仕方は何種類あるのかなど考えられる問題は沢山あるが、現在研究中である。

また、今回の研究は circle-valued Morse function に関して行った。circle-valued Morse function は結び目や絡み目の不変量である Morse-Novikov number を定義するのに用いられる。そのため、Morse-Novikov number[8] への応用が何かできるのではないかと、Morse-Novikov number を模した不変量をより得点論的な観点から定めることができるのではないかと期待を持っている。

References

- [1] S. A. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Adv. Soviet Math. **21** (1994), 93–115.
- [2] S. Blank and F. Laudenbach, *Extension à une variété de dimension $2d$ d'un germe de fonction donné le long du bord*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1663–1665.
- [3] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.
- [4] I. Gelbukh, *Reeb graphs of circle-valued functions: A survey and basic facts*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (1) **61** (2023), 59–81.
- [5] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Preprint (2023), arXiv:2311.07309.

- [6] C. Laroche, *Extending a Morse function to a non-orientable 3-manifold*, Preprint (2017), arXiv:1709.03328v1.
- [7] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud. 51, Princeton Univ. Press (1963).
- [8] A. Pazhitnov, L. Rudolph, L. K. Weber, *The Morse-Novikov number for knots and links*, (Russian)Algebra i Analiz **13** (2001), no. 3, 105–118; translation in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), no. 3, 417–426.
- [9] V. Seigneur, *Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (7) 356 (2018), 712–716.