

# 「逆像のトポロジー」に関する具体的な条件を満たす滑らかな関数の構成

北澤 直樹 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)  
 n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp, naokitazawa.formath@gmail.com  
<https://naokitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html>

## 1 導入。

Morse 関数の理論は、多様体の幾何等において基本的で強力な理論であり続けている。古典的な理論であり、いろいろ有名有用な書籍もある: 今回は多様体の代数トポロジーや微分トポロジーを強く意識していると考え [14] を挙げる。一方、Morse 関数の理論は、未だ古典+ $\alpha$  というレベルでもいろいろ開拓されている。今回の「結び目の数理VI」(<http://www.math.twcu.ac.jp/~mathsciknot6/>)において、Reeb グラフという、関数の逆像の連結成分からなる空間をグラフとして(頂点は関数の特異点を含む連結成分として) みたものに関する一つのトピックについて紹介させて頂くこととなった。

以下、講演内容を特に「自身作成の自身の用いたスライド」([11])をもとに時に「自身作成の」スライド内の図や文言等も拝借しながら報告させて頂く。

Figure 1 で最も簡単な Reeb グラフの例を挙げる。Reeb グラフについては第 3 節でもう一度触れる。Reeb グラフはすでに Morse 関数の理論が確立された時期に [15] 等に登場しており、多様体をコンパクトに捉える。

今回、

**Problem 1.** Reeb グラフを使って滑らかな関数を具体的に作れるか。

というのが主題であった。より詳細には以下を考えた。

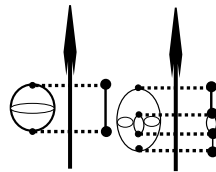


Figure 1: (次元 2 以上の)球面と円周の直積(トーラス)  $S^1 \times S^1$  を自然に 3 次元空間に埋め込んだときの高さから定まる関数の Reeb グラフ(どちらも Morse 関数)。

Problem 2 ([19]). 良い性質を有する滑らかな関数で、Reeb グラフが与えられたグラフと同型なものを作れるか? 定義域多様体は「最初から固定」しない。

骨組み(グラフ)に対して自然なもの(多様体)を再構成してあげようというものである。(講演者は機械学習については”ほぼ素人”として”勉強中”だが)機械学習でいうと関数の適合か? なお、Reeb グラフは可視化等でも重要なツールである。関連した応用研究については現時点で勉強中だが、講演者の研究キーワード”特異点論”に関連性があるものとして [18] を挙げる。

この問題について以下の研究を主なものとして挙げる。

- 2006 Sharko ([19]): ある性質を満たす有限グラフに対し、適切な閉曲面上の、滑らかで、局所的には多項式で表せるような関数を構成した。
- 2010 Masumoto-Saeki ([12]): 任意の有限グラフ(でループのないもの)に対し Sharko の結果を拡張した。
- 2018 Michalak ([13]): 適切なクラスの有限グラフに対し所謂適切な閉多様体上の Morse 関数で、一般の逆像が球面の非交和であるようなものを構成した。

今回は特に、次の、自身が初めて考え設定しいくつか成果を得た問題に重点をおいた。

Problem 3. グラフに加え逆像のトポロジーも考慮して(”一般の逆像”が”球面とは限らない”ものを考えて)滑らかな関数を構成できるか。

## 2 多様体・滑らかな写像・特異点に関する基本的用語や記法。

- $\mathbb{R}^k$ :  $k$  次元 Euclid 空間 ( $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ ) を表す。なおこれは、もっとも単純な  $k$  次元の滑らかな多様体で標準的 Euclid 計量のはいった Riemann 多様体でもある。
- $\|p\|$ :  $p \in \mathbb{R}^k$  と原点  $0 \in \mathbb{R}^k$  の間の距離を表す。
- $S^k (D^{k+1}) := \{p \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \|x\| = (\text{resp. } \leq) 1\}$ :  $k$  次元単位球面 (resp.  $k+1$  次元単位球体) を表す。
- $X^l$ :  $l$  次元の可微分多様体(滑らかな多様体)  $X$  (そして ” $X^l$ ” の  $l$  は次元) を表す。
- $\pi_{k,k'} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'} (k \geq k' \geq 1)$  を  $\pi_{k,k'}(x_1, x_2) := x_1 ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k-k'})$  で定義( $\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^{k'} = \mathbb{R}^k$ ): 所謂自然な射影(そして  $S^{k-1}$  への制限は単位球面の射影)を表す。

- $f : M^m \rightarrow N^n$  を滑らかな多様体間の滑らかな写像として、 $p$  で(微分  $df_p$  の階数)  $< \min\{m, n\}$  が成り立つとき、 $p \in M^m$  は  $f$  の特異点という( $n = 1$  のときは臨界点ともいう)。このとき  $f(p)$  を  $f$  の特異値と( $n = 1$  のときは臨界値とも)よび、 $S(f)$  で  $f$  の特異点全体の集合を表す。
- $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$  が滑らかで ( $f$  の)各臨界点  $p$  で、 $x = 0 \in \mathbb{R}^m$  と同一視して適切な局所座標と適切な整数  $0 \leq i(p) \leq m$  で  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{j=1}^{m-i(p)} x_j^2 - \sum_{j=1}^{i(p)} x_{m-i(p)+j}^2 + f(p)$  と表せる(つまり臨界点が非退化である)とき、 $f$  は Morse 関数であるという。
- 二つの滑らかな多様体が微分同相であるとは、二つの多様体の間の微分同相写像、つまり特異点をもたない同相写像が存在することを意味する。

### 3 Reeb グラフ。

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$  について  $W_f$  を  $f$  の逆像の連結成分全体からなる空間とする(自然に  $M$  の商空間となる)。

**Theorem 1** ([17]).  $M$  が閉多様体とする。  $f$  の臨界値全体の集合  $f(S(f))$  が有限なら、 $W_f$  は以下のルールでグラフとなる:  $W_f$  の点  $p$  が頂点となるのは、 $p$  が " $f$  の臨界点を持つような連結成分を示すとき"かつその時に限る。

この  $W_f$  が  $f$  の Reeb グラフであり、例えば商写像を  $q_f : M \rightarrow W_f$  で表す。なお、概念自体は 20 世紀半ばには登場している([15])。

### 4 いくつかの結果(含自身の結果)。

**Theorem 2** (2018 Michalak ([13]  $F_e$  が単位球面), 2021- K ([8])).  $m > 2$  を整数とし、 $G := (V, E)$  を有限連結グラフとする。さらに連続関数  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  で  $g|_e$  が各辺  $e \in E$  上単射であるようなものがあるとする。そして  $\{F_e\}_{e \in E}$  を滑らかな閉多様体の族とし、以下が満たされるとする。

- $F_e$  は  $S^{m-1}$  または(滑らかなカテゴリーで考えた)連結和  $\sharp_{j'}(S^{i_{j'}} \times S^{m-i_{j'}-1})$  ( $1 \leq i_{j'} \leq m-2$ )である。
- 辺  $e \in E$  が頂点 " $v \in V$  で  $g(v)$  が極値であるようなもの" を含むとき、 $F_e = S^{m-1}$  である。
- $v \in V$  が  $g(v)$  を極値とするような頂点ならば、次数が 1。

このとき、滑らかな連結閉多様体  $M^m$ 、Morse 関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  で、 $W_f$  が  $G$  と適切に同一視され逆像  $q_f^{-1}(p)$  ( $p \in \text{Int } e$ ) が  $F_e$  に微分同相であるようなものが存在する。

なお、 $F_e$  は「**Most fundamental handlebody** といわれる滑らかな連結コンパクト多様体」の境界の連結成分になるようなものへと拡張される: 3次元向き付け可能連結閉多様体等は条件を満たす。さて、Morse-Bott 関数とは、局所的に射影と Morse 関数の合成で表せるような滑らかな関数である(Morse 関数を自然に一般化したものである)。

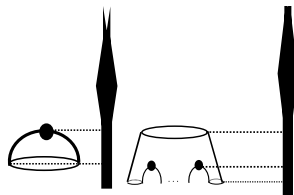


Figure 2: Theorem 2-3 で、極値の周り(球体の自然な高さ関数)の場合と極値ではなく近くの臨界点を含まないような”逆像の連結成分”が球面の場合。

**Theorem 3** (2019-22 K ([4])).  $G := (V, E)$  を有限連結グラフとし、連続関数  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  で  $g|_e$  が各辺  $e \in E$  上単射であるようなものがあるとする。そして  $\{F_e\}_{e \in E}$  を向き付け可能な連結閉曲面の族とする。このとき向き付け可能な連結閉多様体  $M^3$  ( $m = 3$ ) と滑らかな関数  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  で以下を満たすようなものが存在する。

1.  $W_f$  は  $G$  と適切に同一視され逆像  $q_f^{-1}(p)$  ( $p \in \text{Int } e$ ) は  $F_e$  に微分同相である。
2. 頂点  $v \in V$  で  $g(v)$  が極値でないとき、 $q_f^{-1}(v)$  のまわりでは Morse 関数で表される。
3. 頂点  $v \in V$  で  $g(v)$  が極値のとき、 $q_f^{-1}(v)$  内の  $f$  の臨界点のまわりでは、高々有限個の臨界点を除き、Morse 関数または Morse でない Morse-Bott 関数で表される。

なお、講演では触れなかったが、Theorem 3 に関して、有限グラフの型は、ループがないという条件をつければ(多重辺はあってもよいとして)制限を受けない(Theorem 2 は受ける: 例えば次数 1 の頂点がないようなグラフは有限グラフ  $G$  として出て来得ない)。

証明では、これまでの研究でもそうだが、局所的に関数を構成、そして貼り合わせることがポイントである。以下 Theorem 2 の証明の重要な部分を紹介する。詳細は原論文をあたって頂ければ幸いである。

証明のポイントその 1: 臨界点の周りで Morse 関数の場合。

Morse 関数の理論の基礎にある話、Morse 関数の臨界点と多様体の”ハンドル”(球体の直積とみなせるもの)の対応を具体的に適用することがポイントと見抜き適用した。Figure 2 は特別な場合を示す([13] 等参照のこと)。

証明のポイントその 2: 臨界点のまわりで Morse 関数でなく極値を与える場合。

- 極値を与える頂点が次数 2 以上の場合: 前の Morse 関数に  $\pm x^2 + c$  型の関数を合成する( $c$  は定数)。
- 極値を与える頂点が次数 1 の場合: 局所的に平面( $D^2$ )への”Morse 関数と区間上の恒等写像の直積で表せる”全射を構成し、球体の”高さ”関

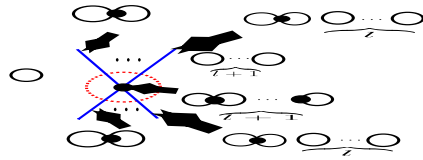


Figure 3: 平面への写像と逆像：青い線が特異値を表し円周と黒い点(特異点を示す点)でできた図形は(指し示す)点の逆像。赤い点線の内部の円における高さ関数を合成。“...”の部分に中心部の黒い点を通るような青い線分が省略されている。

数を合成する。Figure 3 で、赤い点線の逆像が、頂点を含む辺の内部の点での逆像  $F_e$  に(微分)同相になる。所謂種数  $l+1 > 0$  の向き付け可能閉曲面になる： $l=0$  なら特異点特異値は出て来ず、 $F_e$  は円周の直積(トーラス)となる。

## 5 関連研究。

いくつか講演で紹介した関連研究を紹介する。

### 5.1 逆像の多様体等の条件を他適当に設定して結果を得る。

講演でも紹介した結果を紹介する。

さて、滑らかな閉多様体が零コボルダントとは、次元が1高い滑らかなコンパクト多様体の境界となることである。

**Theorem 4** (2022 Saeki ([17])),  $m > 1$  を整数、 $G := (V, E)$  を有限連結グラフでループのないものとする。 $\{F_e\}_{e \in E}$  を  $m-1$  次元の滑らかな閉多様体の族で各頂点  $v \in V$  について  $\sqcup_{e \ni v} F_e$  が零コボルダントとする。このとき連結閉多様体  $M^m$  と滑らかな関数  $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$  で以下を満たすようなものがある。

1.  $W_f$  は  $G$  と適切に同一視される。
2. 逆像  $q_f^{-1}(p)$  ( $p \in \text{Int } e$ ) は  $F_e$  に微分同相である。

Theorem 3 の直後に書いたことに関連するが、この Theorem では原論文他を尊重し”グラフの上に自然な連続関数がある”という条件の書き方をしない。証明では、実解析とは限らない関数を局所的に構成し貼り合わせる。条件が一般的である一方、臨界点や臨界点を含む逆像の型等を具体的に把握することはできないような関数の構成となっている。

なお、2019年に、講演者は当時ホスト教員であった”佐伯 修 氏(九州大学)”に非公式セミナーで Theorem 3 を紹介した。Theorem 4 はそれを受け氏が得たものと考えられる：後日この定理や関連結果について氏の議論をインフォーマルセミナーにてチェックさせて頂いた。

**Theorem 5** (2019–22 K ([5])).  $m > 1$  を整数、 $G := (V, E)$  を有限連結グラフとし、 $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  を連続で  $g|_e$  が各辺  $e \in E$  上単射であるとする。 $\{F_e\}_{e \in E}$  を  $E$  で添え字づけられた 0 または 1 からなる数列とする。

このとき、 $m$  次元境界なし連結多様体  $M^m$  と滑らかな関数  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$  で以下を満たすようなものが存在する。

1.  $W_f$  は  $G$  と自然に同一視され、逆像  $q_f^{-1}(p)$  ( $p \in \text{Int } e$ ) は  $F_e = 0$  のとき  $S^{m-1}$  に  $F_e = 1$  のとき  $\mathbb{R}^{m-1}$  に微分同相である。
2. 各頂点  $v \in V$  について、 $q_f^{-1}(v)$  内の  $f$  の臨界点のまわりでは、高々有限個の臨界点を除き、”Morse 関数” または ”Morse でない Morse-Bott 関数” または ”Morse 関数と  $\pm x^2 + c$  型表示を持つ関数の合成” または ”「Morse でない Morse-Bott 関数」と  $\pm x^2 + c$  型表示を持つ関数の合成” で表される。

詳細は省く: なお、スライドにもあるが、講演では鍵となる局所的な関数のひとつを紹介させて頂いた。コンパクトでない多様体上の、Morse(-Bott) 関数のクラスを自然に一般化したクラスを考えた点に新しさがある。

## 5.2 滑らかな関数のクラスを強める、例えば実代数的な関数で構成を考える。

非常に学際的な領域である。単位球面の射影として自然な高さから得られる関数の Reeb グラフは辺 1 個、頂点 2 個からなる(ループのない)グラフである。これを最も簡単なものとして含む自然な関数のクラスを考えたいものである。なお、実代数関数は、実多項式写像の零点集合の連結成分の非交和で非特異なものに自然な射影を制限したものとする。深入りはしないが、こういう集合を実代数超曲面(実多項式関数を考えたときの余次元 1 の零点集合の場合)とか実代数多様体とよぶ。非特異性は、陰関数定理を介して自然に定義される(滑らかな部分多様体になっているものを考える)。

**Theorem 6** (2023 K ([6])).  $m$  を十分大きな整数とし、(例えば)連結な有限グラフ  $G := (V, E)$  で以下を満たすようなものを考える。

1. 頂点の次数は 1 または 3。
2. 連続関数  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  で以下を満たすようなものがとれる: 各辺では単射で、極値をとるような頂点で次数は 1 で、各頂点で値が異なり、さらに埋め込み  $\tilde{g}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  で  $g = \pi_{2,1} \circ \tilde{g}$  となるようなものが選べる。

このとき  $m$  次元非特異閉連結実代数多様体  $M^m$  と、実代数関数  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$  でグラフ  $W_f$  と  $G$  が同型であるようなものがある。

例えば、各臨界点で値が異なり、臨界点を含まない逆像の連結成分が単位球面と微分同相であるような、Morse 関数の Reeb グラフで、自然に平面へと埋め込めるようなものを考えている。後でもう少し説明するが、Figure 4 の場合は一般にそうではない(臨界点での値が同じになり得る)。が、この場合も本 Theorem で扱える範囲にある。

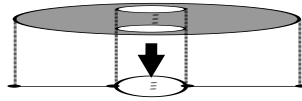


Figure 4: 円周で囲まれた algebraic domain  $R^2 \subset \mathbb{R}^2$  とその Poincaré-Reeb グラフ :”...” は省略を意味。

Definition 1.  $k, l \geq 1$  を整数とする。Algebraic domain  $R^k \subset \mathbb{R}^k$  とは連結な有界開集合で以下を満たすようなものとする。

- 閉包  $\bar{R}$  について  $\bar{R} - R = \sqcup_{j=1}^l S_j$ : なお、 $\{S_j\}_{j=1}^l \subset \bar{R} - R$  は有限個の互いに交わらない  $\mathbb{R}^k$  の(非特異な)実代数超曲面の族である。
- $S_j$  は、実多項式  $f_j$  の零点集合  $\{x \mid f_j(x) = 0\}$  の連結成分である。
- 任意の  $1 \leq j \leq l$  を満たす整数  $j$  で、 $(\{x \in \mathbb{R}^k \mid f_j(x) = 0\} - S_j) \cap \overline{U_R} = \emptyset$  が  $\bar{R}$  の十分小さい開近傍  $U_R$  とその閉包  $\overline{U_R}$  について成立する。

Definition 2 (2018 Sorea ([20])). 以下のような性質・条件を満たすようなグラフを algebraic domain  $R^k \subset \mathbb{R}^k$  の Poincaré-Reeb グラフ  $G_R$  という (Definition 1 の記法等使用)。

- $G_R$  は関数  $\pi_{k,1}|_{\bar{R}}$  の逆像の連結成分からなる  $\bar{R}$  の商空間である。
- $G_R$  の頂点集合は「 $\pi_{k,1}|_{\bar{R}-R}$  の臨界点」をもつような”逆像の連結成分”を示す点全体の集合である。

なお、Sorea 氏らは、実質  $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^2$  の場合のみ考えている。

Theorem 6 の証明では、「適切なクラスのグラフならばそれを Poincaré-Reeb グラフとするような algebraic domain  $R$  がとれるという事実(2022-3 A. Bodin, P. Popescu and M. S. Sorea ([1]))」を基本にし、閉包  $\bar{R}$  への写像を構成するのが鍵である。正確には、 $R = \bigcap_{j=1}^l \{x \in \overline{U_R} \mid f_j(x) > 0\}$ 、 $\bar{R} = \bigcap_{j=1}^l \{x \in \overline{U_R} \mid f_j(x) \geq 0\}$  とでき、 $M := \{(x, y) \in \overline{U_R} \times \mathbb{R}^{m-k+1} \mid \prod_{j=1}^l (f_j(x) - \|y\|^2)\}$  が得たい零点集合の連結成分となるという話である。なお [10] でこの議論に関する”追加コメント的な考察”をしている。

さて、 $\bar{R}$  への写像に射影を合成して得られた関数  $f$  について、例えば Figure 4 だと、 $f$  の臨界点を含まないような逆像の連結成分は、単位球面と微分同相となる。この場合、 $f$  は、Theorem 2 の例を与えるような Morse 関数となる。

Problem 4. Theorem 6 のような実代数関数での考察で、逆像のトポロジー等も考慮したようなものはできるか。

いくつか講演者は、この問題の解答といえる結果を得ている。が、詳細は省略する(興味があれば [9] 他 [7] 等を参考にして頂ければ幸いである)。

### 5.3 Reeb グラフと逆像と多様体の関係。

**Theorem 7** (2006 Saeki ([16])). Theorem 2 と 3 で、Morse 関数で  $F_e = S^2, S^1 \times S^1$  の場合、多様体は  $S^3, S^2 \times S^1$ , 所謂 Lens 空間かそれらの連結和で表せるようなものに同相となる。逆にそういう多様体はこれらの Theorem のような Morse 関数をもつ。

なおこれは、紹介してきた、Reeb グラフを絡めた研究と独立といえる研究である。証明は、3次元多様体の有名な手法でなされる。

閉曲面の場合、最近 Reeb グラフと頂点の次数や個数等と閉曲面のトポロジーの関係についての考察に関する研究がいくつかある。以下挙げておく。

- (2018 Michalak ([13])) 閉曲面のトポロジーと、Morse 関数の Reeb グラフとその位相と次数 2 の頂点の個数の関係についての考察。
- (2022– Gelbukh ([2, 3])) 閉曲面上の Morse-Bott 関数に、前述の結果・考察を拡張。

現在講演者は、”Theorem 7 の深化” を”続き”でできないか検討中である。これらの詳細は紙面等の都合により割愛する。興味があれば、原論文等をあたって頂ければ幸いである。

## 6 謝辞等。

今回の内容は例えば以下より補助等受けております。

- JSPS KAKENHI Grant Number JP17H06128 ”Innovative research of geometric topology and singularities of differentiable mappings” (代表者: 佐伯 修(九州大学))。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。特に、[17] そして [4] に関して議論させて頂けたこと等に感謝申し上げます。
- JSPS KAKENHI Grant Number JP22K18267 ”Visualizing twists in data through monodromy”(代表者: 佐伯 修(九州大学))。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。
- 講演者は九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員で、詳細にはマス・フォア・イノベーション連係学府の”ヤングメンター”(https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/en/)として働いております。今回の内容は業務とも関連しております。  
なお今回の発表は業務とは”公式には独立”して行われており、また JSPS KAKENHI Grant Number 21H04428 または 19K03502 より補助を受けて行われております(世話人の先生方補助の方ありがとうございます)。
- 講演者は大阪公立大学数学研究所特別研究員(MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165)でもあり、金銭的な補助等はないですが、我々の研究はこちらにも支えて頂いております。



- IMI 若手研究-短期共同研究 20200027 ”高次元多様体の世界の幾何的構成的と高次元データへの応用”(代表者: 北澤 直樹)。金銭的な補助等はないですがこちらにも関係しております。特異点論の可視化への応用に関して詳しい情報系の研究者に助けて頂くことで実施した応用系のプロジェクトで、[18]はこの研究プロジェクトに関係します。

最後に、講演を聴講して下さった皆様、講演前後や合間に関連して議論をして下さった方々、講演させて下さり、研究集会の運営をして下さった世話人の”大山 淑之 先生(東京女子大学)”、”新國 亮 先生(東京女子大学)”や現地で準備に携われた周辺の先生方や学生の皆さんにも感謝申し上げます。

## References

- [1] A. Bodin, P. Popescu-Pampu and M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains*, *Revista Matemática Complutense*, <https://link.springer.com/article/10.1007/s13163-023-00469-y>, 2023, arXiv:2207.06871v2.
- [2] I. Gelbukh, *Realization of a digraph as the Reeb graph of a Morse-Bott function on a given surface*, *Topology and its applications*, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0166864123003383?via%3Dihub>, <https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108745>, 2024.
- [3] I. Gelbukh, *Reeb graphs of Morse-Bott functions on a given surface*, 10.13140/RG.2.2.30725.52967/1, [https://www.researchgate.net/publication/374385277\\_Reeb\\_graphs\\_of\\_Morse-Bott\\_functions\\_on\\_a\\_given\\_surface](https://www.researchgate.net/publication/374385277_Reeb_graphs_of_Morse-Bott_functions_on_a_given_surface), 2023.
- [4] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, *Topol. Methods in Nonlinear Anal.* Vol. 59 No. 2B (2022), 897–912, arXiv:1902.08841.
- [5] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces*, *Methods of Functional Analysis and Topology* Vol. 28 No. 2 (2022), 127–143, arXiv:1908.04340.
- [6] N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs*, *Methods of Functional Analysis and Topology* Vol. 28 No. 4 (2022), 302–308, arXiv:2302.02339, 2023.
- [7] N. Kitazawa, *Explicit construction of explicit real algebraic functions and real algebraic manifolds via Reeb graphs*, *Algebraic and geometric methods of analysis* 2023, 49–51, <https://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf>, this is the abstract of our talk in an international conference ”Algebraic and geometric methods of analysis 2023” and has appeared after a short review (<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/>).

- [8] N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, submitted to a refereed journal, arXiv:2108.06913.
- [9] N. Kitazawa, *Construction of real algebraic functions with prescribed preimages*, a positive report for major revision has been sent, we have found no errors and also found that we need more precise arguments, which are in our preprint [10], and a revised version of this will be submitted again to a refereed journal, arXiv:2303.00953v2.
- [10] N. Kitazawa, *A note on real algebraic maps which are topologically special generic maps*, submitted to a refereed journal, arXiv:2312.10646v2.
- [11] 北澤 直樹, 「逆像のトポロジー」に関する具体的な条件を満たす滑らかな関数の構成, 「結び目の数理 VI」講演スライド, [http://www.math.twcu.ac.jp/~mathsciknot6/msk6\\_slides/kitazawa.pdf](http://www.math.twcu.ac.jp/~mathsciknot6/msk6_slides/kitazawa.pdf).
- [12] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, *Kyushu J. Math.* 65 (2011), 75–84.
- [13] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. *Topol. Methods in Nonlinear Anal.* 52 (2) (2018), 749–762, arXiv:1805.06727.
- [14] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.
- [15] G. Reeb, *Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences* 222 (1946), 847–849.
- [16] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, *Hiroshima Math. J.* Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.
- [17] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, *International Mathematics Research Notices*, maa301, Volume 2022, Issue 11, June 2022, 8740–8768, arXiv:2006.01689.
- [18] D. Sakurai, O. Saeki, H. Carr, H. Wu, T. Yamamoto, D. Duke and S. Takahashi, *Interactive Visualization for Singular Fibers of Functions  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$* , *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* (Volume: 22, Issue: 1, Jan. 31 2016), 945–954.
- [19] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, *Methods of Functional Analysis and Topology* 12 (2006), 389–396.
- [20] M. S. Sorea, *The shapes of level curves of real polynomials near strict local maxima*, Ph. D. Thesis, Université de Lille, Laboratoire Paul Painlevé, 2018.