

多面体空間グラフによる多面体の n 重 covering

佐藤 衡 (埼玉大学)*¹

1 Abstract

多面体空間グラフ P_1 が多面体 P_2 を n 重 covering するとは、多面体 P_2 の covering として P_2 の近傍に構成される多面体空間グラフ P_1 からのある種の被覆写像が存在することである。これまでに多面体から構成される多面体絡み目が知られており、超分子などの構造の記述に用いられている。今回はその拡張を考えて多面体空間グラフを用いることで、より複雑な超分子の構造を表すことができると期待されている。本講演では正多面体と半正多面体から得られる空間グラフ間の対称的な covering の存在について考える。今回の多面体空間グラフは各頂点と各辺で構成したものを組み合わせることで作ることができるものについて述べる。また、covering によって多面体の対称性がどれくらい保たれるかを調べることで、多面体群との関係や covering の構成の可能性について考察していく。

2 多面体の対称性

定義 2.1 (正多面体). 正 n 角形のみを貼り合わせてでき、各頂点の近傍が合同な正多角錐である凸多面体を **正多面体** とよぶ。正多面体は、正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の 5 種類が存在する。

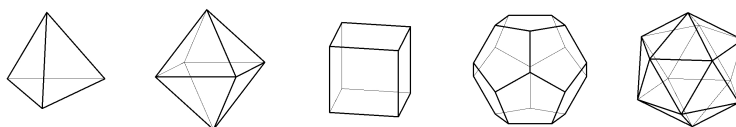


図 1 正多面体 [7]

定義 2.2 (半正多面体). 2 種類以上の正 n 角形を貼り合わせてでき、各頂点の近傍が合同な正多角錐である凸多面体のうち、正 n 角柱、反 n 角柱、ミラーの立体を除いたものを本論文では **半正多面体** とよぶ。半正多面体は、切頂四面体、切頂立方体、切頂八面体、立方八面体、斜方立方八面体、斜方切頂八面体、歪立方体、切頂十二面体、切頂二十面体、二十面体、斜方二十面体、斜方切頂二十面体、歪十二面体の 13 種類が存在する。

正多面体・半正多面体は、四面体的対称性、八面体的対称性、二十面体的対称性のいずれかをもつ。また多面体 P について、 P が四面体的対称性をもつとき $\text{Isom}(P) \cong A_4$ 、 P が八面体的対称性をもつとき $\text{Isom}(P) \cong S_4$ 、 P が二十面体的対称性をもつとき $\text{Isom}(P) \cong A_5$ であることが分かっている。

*¹ 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255 埼玉大学大学院理工学研究科 修士 2 年
mail: k.sato.785@ms.saitama-u.ac.jp

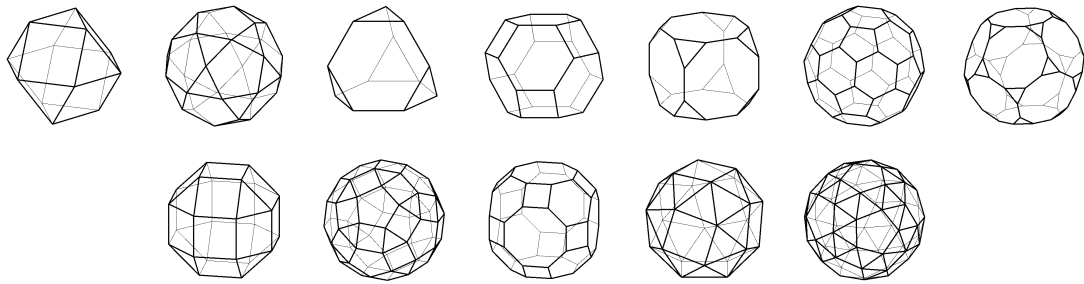
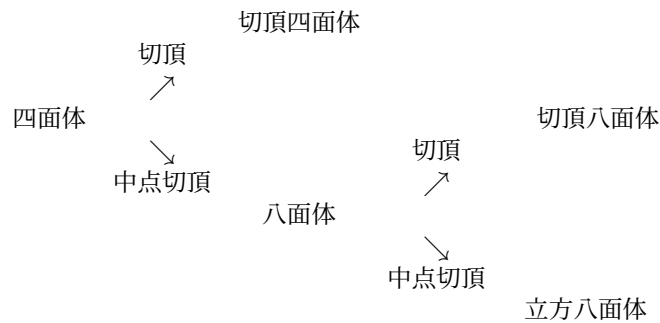


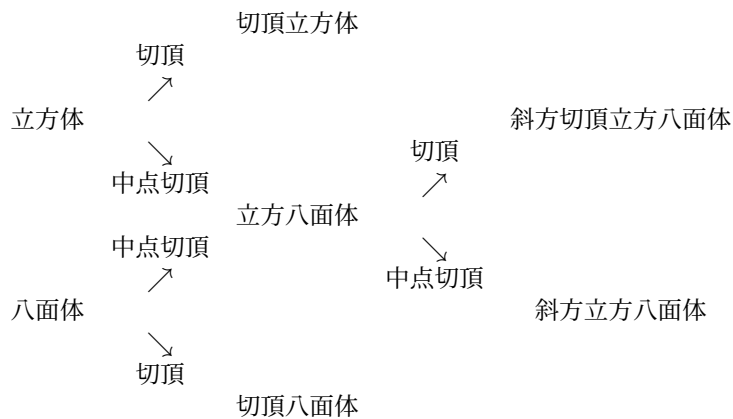
図2 半正多面体 [7]

定義 2.3 (切頂, 中点切頂). 多面体の頂点を, その頂点と隣接する辺の中点より手前で頂点の近傍を切り落とすことを **切頂** という. また, 多面体の頂点を, その頂点と隣接する辺の中点で頂点の近傍を切り落とすことを **中点切頂** という.

例 2.4. 正四面体を切頂, 中点切頂すると以下のように変化していく.



例 2.5. 立方体, 八面体を切頂, 中点切頂すると以下のように変化していく.



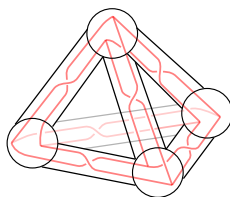
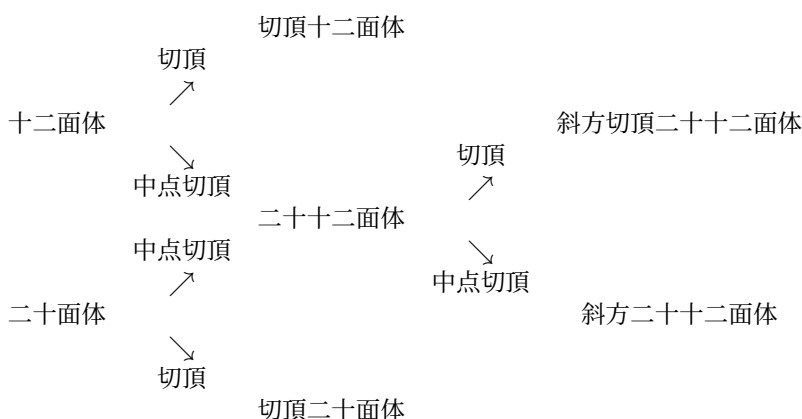


図3 立方体による四面体の2重 covering

例 2.6. 十二面体, 二十面体を切頂, 中点切頂すると以下のように変化していく.



3 多面体の n 重 covering の定義

定義 3.1 (グラフの近傍). 空間グラフ $G = (V, E)$ から辺 $e, e' \in E$, 頂点 $v, v' \in V$ をとる. 辺の近傍 $N(e)$ と頂点の近傍 $N(v)$ を次のように定義する.

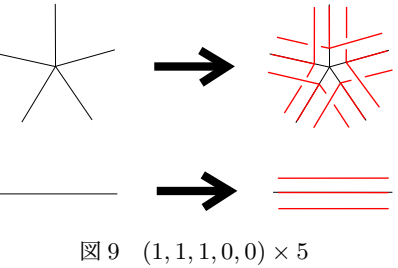
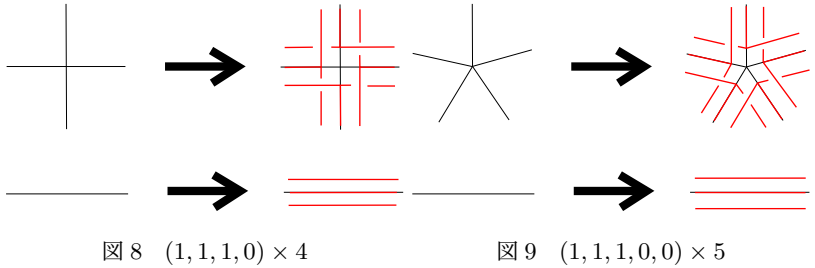
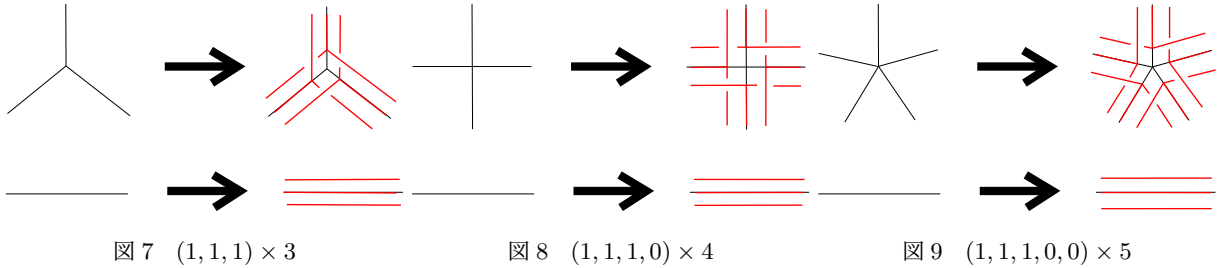
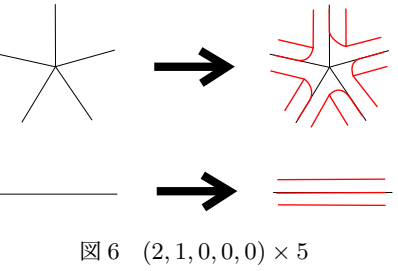
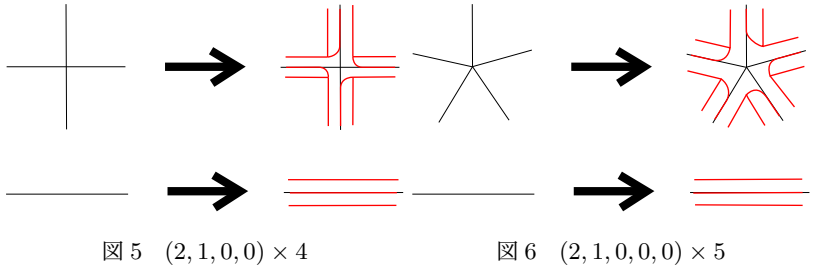
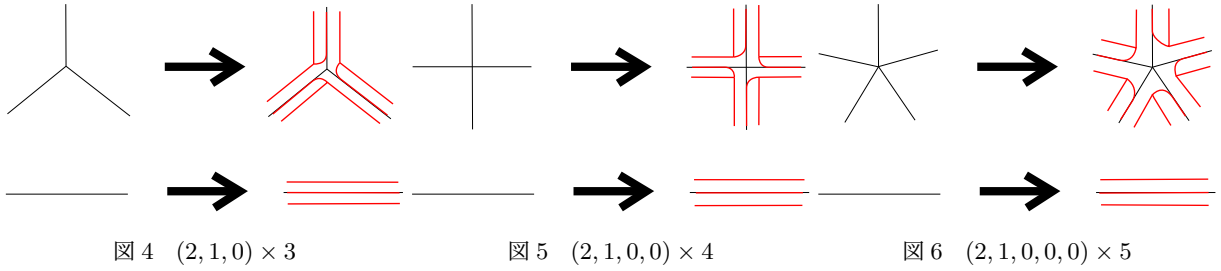
1. $N(e)$ は $e \times D^2$ と同相である近傍である.
2. $N(v)$ は v を中心とする 3次元球体 B^3 である.
3. $e \cap e' = \phi$ ならば, $N(e) \cap N(e') = \phi$ である.
4. e が v に隣接していなければ, $N(e) \cap N(v) = \phi$ である.
5. $v \neq v'$ ならば, $N(v) \cap N(v') = \phi$ である.

以上より, グラフ G の近傍を $N(G) = \bigcup_{e \in E} N(e) \cup \bigcup_{v \in V} N(v)$ と定義する.

定義 3.2 (n 重 covering). $P_1 = (V_1, E_1), P_2 = (V_2, E_2)$ を多面体空間グラフ, $N(P_2)$ を多面体空間グラフ P_2 の近傍, $P_1 \subset N(P_2), n \in \mathbb{N}$ とする. 以下のような条件を満たす埋め込み $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ が存在するとき, P_1 が P_2 を n 重 covering するという. このとき $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ を covering 写像 という.

1. $r: N(P_2) \times [0, 1] \rightarrow N(P_2)$ を $N(P_2)$ の P_2 への変位レトラクションとすると, $r \circ f(P_1) = P_2$ が成立する.
2. 任意の P_2 の辺 e' , e' 上の点 x に対して, $|f^{-1}(x)| = n$ が成立する.
3. 任意の P_2 の頂点 v' に対して, $|f^{-1}(v')| = t$ を満たす整数 t が存在する.

定義 3.3 (交代である n 重 covering). $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ を covering 写像であると, v を P_1 の頂点とする.



$f(v)$ の近傍のダイアグラムをとってきたとき、そのダイアグラムでできる各領域が交代になっているとき、covering は交代であるといい、 f は交代な covering であるという。

定義 3.4 (対称的な n 重 covering). $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ を covering 写像, $\gamma_2 \in \text{Isom}(P_2)$ を P_2 の回転対称移動であるとする. $\gamma_2(f(P_1)) = f(P_1)$ が成立するとき, covering は対称的であるといい, f は対称的な covering 写像であるという。

本研究では、多面体の n 重 covering は covering 写像が交代で対称的であるものを中心に扱っていく。頂点数と辺の本数から n 重 covering できる可能性のある多面体の組み合わせを考え、covering の存在の有無を考えていく。

4 n 重 covering の構成

この章では、今回の研究で発見した n 重 covering の構成方法を紹介する。

命題 4.1 (構成方法 1). P_2 を正多面体, P_1 を P_2 の双対多面体を切頂してできた多面体とする。図 4, 図 5, 図 6 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 3 重 covering する。

命題 4.2 (構成方法 2). P_2 を三角形で構成された正多面体, P_1 を P_2 を切頂した多面体とする。図 7, 図 8, 図 9 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 3 重 covering する。

命題 4.3 (構成方法 3). P_2 を三角形で構成された正多面体, P_1 を P_2 を中点切頂し, 更に中点切頂した多面体とする。図 10, 図 11, 図 12 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 4 重 covering する。

命題 4.4 (構成方法 4). P_2 を三角形で構成された正多面体, P_1 を P_2 の双対多面体の歪多面体とする。図 13, 図 14, 図 15 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 5 重 covering する。

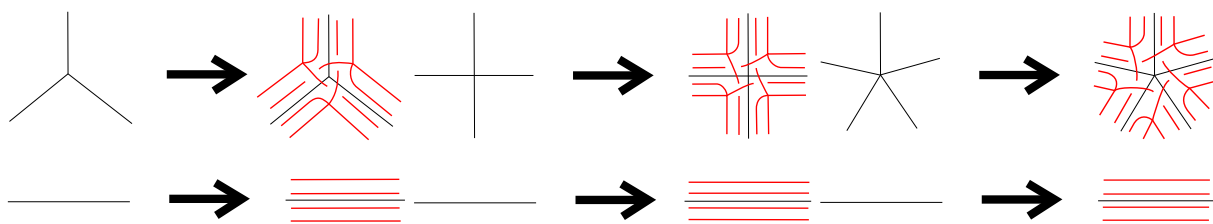


図 10 $(2, 1, 1) \times 3$

図 11 $(2, 1, 1, 0) \times 4$

図 12 $(2, 1, 1, 0, 0) \times 5$

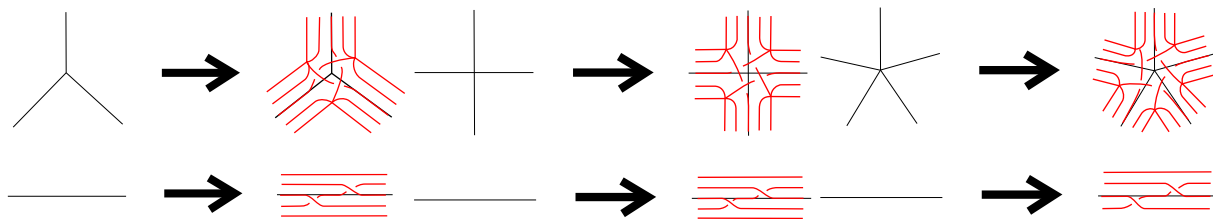


図 13 $(2, 2, 1) \times 3$

図 14 $(2, 2, 1, 0) \times 4$

図 15 $(2, 2, 1, 0, 0) \times 5$

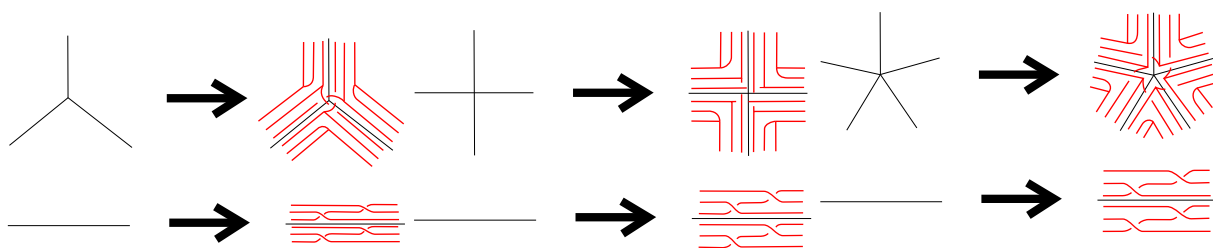


図 16 $(1, 1, 1) \times 3 + (2, 1, 0) \times 3$

図 17 $(1, 1, 1, 0) \times 4 + (2, 1, 1, 0) \times 4$

図 18 $(1, 1, 1, 0, 0) \times 5 + (2, 1, 1, 0, 0) \times 5$

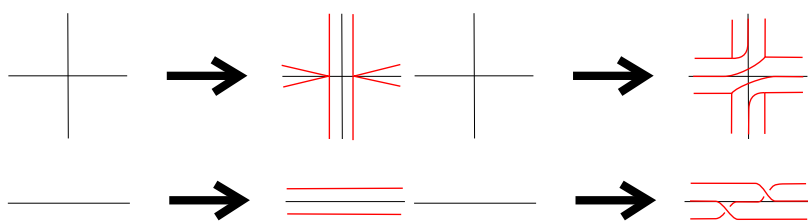


図 19 $(2, 1, 0, 1) \times 2$

図 20 $(1, 1, 1, 0) \times 2 + (2, 1, 0, 0) \times 2$

命題 4.5 (構成方法 5). P_2 を三角形で構成された正多面体, P_1 を P_2 を中点切頂し, 更に切頂した多面体とする. 図 16, 図 17, 図 18 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 6 重 covering する.

命題 4.6 (構成方法 6). P_2 を正多面体を中点切頂した多面体, P_1 を P_2 を中点切頂した多面体とする. 図 19 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 2 重 covering する.

命題 4.7 (構成方法 7). P_2 を正多面体を中点切頂した多面体, P_1 を P_2 を切頂した多面体とする. 図 20 のような構成を頂点, 辺上で行うと, P_1 は P_2 を 3 重 covering する.

命題 4.8 (covering の合成). P_1 が P_2 を n 重 covering, P_2 が P_3 を m 重 covering するとする. このとき covering 写像を合成することで P_1 は P_3 を nm 重 covering する.

命題 4.9 (covering できるための必要条件). P_1 が P_2 を n 重 covering, $v \in V_1$, $v' \in V_2$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$ とする. P_1 が v から q -サイクルを持つとき, P_2 は v' から 2 個以上の頂点を通る q -サイクルを持たなければならない.

5 本研究の主結果

前章までに構成によって得られた結果をまとめると, 次のような表になる.

ただし, 「○」は対称的な covering が構成できる, 「△」は部分的に対称的な covering が構成できる, 「×」は covering が構成することができない多面体の組み合わせであり, k_i ($i = 1, 2$) は多面体 P_i の頂点の次数である.

有無	P_1	群	P_2	群	t	n	k_1	k_2
○	立方体	O	四面体	T	2	2	3	3
○	十二面体	I	四面体	T	5	5	3	3
○	二十面体	I	四面体	T	3	5	5	3
○	切頂四面体	T	四面体	T	3	3	3	3
○	切頂立方体	O	四面体	T	6	6	3	3
○	切頂八面体	O	四面体	T	6	6	3	3
○	立方八面体	O	四面体	T	3	4	4	3
○	斜方立方八面体	O	四面体	T	6	8	4	3
○	歪立方体	O	四面体	T	6	10	5	3
○	斜方切頂立方八面体	O	四面体	T	12	12	3	3
○	切頂十二面体	I	四面体	T	15	15	3	3
○	切頂二十面体	I	四面体	T	15	15	3	3
○	斜方二十面体	I	四面体	T	15	20	4	3
○	斜方切頂二十面体	I	四面体	T	30	30	3	3
○	歪十二面体	I	四面体	T	15	25	5	3
×	切頂立方体	O	立方体	O	3	3	3	3
○	切頂八面体	O	立方体	O	3	3	3	3
○	斜方切頂立方八面体	O	立方体	O	6	6	3	3
×	斜方立方八面体	O	立方体	O	3	4	4	3
×	歪立方体	O	立方体	O	3	5	5	3
	斜方切頂二十面体	I	立方体	O	15	15	3	3
○	切頂立方体	O	八面体	O	4	3	3	4
○	切頂八面体	O	八面体	O	4	3	3	4
△	立方八面体	O	八面体	O	2	2	4	4
○	斜方立方八面体	O	八面体	O	4	4	4	4

○	歪立方体	O	八面体	O	4	5	5	4
△	二十面体	I	八面体	O	5	5	4	4
○	斜方切頂立方八面体	O	八面体	O	8	6	3	4
△	斜方二十面体	I	八面体	O	10	10	4	4
△	斜方切頂二十面体	I	八面体	O	20	15	3	4
×	切頂十二面体	I	十二面体	I	3	3	3	3
○	切頂二十面体	I	十二面体	I	3	3	3	3
×	斜方二十面体	I	十二面体	I	3	4	4	3
	斜方切頂二十面体	I	十二面体	I	6	6	3	3
×	歪十二面体	I	十二面体	I	3	5	5	3
×	歪立方体	T	二十面体	I	2	2	5	5
○	切頂十二面体	I	二十面体	I	5	3	3	5
○	切頂二十面体	I	二十面体	I	5	3	3	5
○	斜方二十面体	I	二十面体	I	5	4	4	5
○	斜方切頂二十面体	I	二十面体	I	10	6	3	5
○	歪十二面体	I	二十面体	I	5	5	5	5
○	切頂立方体	O	切頂四面体	T	2	2	3	3
×	切頂八面体	O	切頂四面体	T	2	2	3	3
○	斜方切頂立方八面体	O	切頂四面体	T	4	4	3	3
×	切頂十二面体	I	切頂四面体	T	5	5	3	3
	斜方切頂二十面体	I	切頂四面体	T	10	10	3	3
×	切頂八面体	O	切頂立方体	O	1	1	3	3
×	斜方切頂立方八面体	O	切頂立方体	O	2	2	3	3
	斜方切頂二十面体	I	切頂立方体	O	5	5	3	3
×	切頂立方体	O	切頂八面体	O	1	1	3	3
○	斜方切頂立方八面体	O	切頂八面体	O	2	2	3	3
	斜方切頂二十面体	I	切頂八面体	O	5	5	3	3
○	斜方立方八面体	O	立方八面体	O	2	2	4	4
○	斜方切頂立方八面体	O	立方八面体	O	4	3	3	4
	斜方二十面体	I	立方八面体	O	5	5	4	4
△	斜方切頂二十面体	I	歪立方体	O	5	3	3	5
×	切頂二十面体	I	切頂十二面体	I	1	1	3	3
×	斜方切頂二十面体	I	切頂十二面体	I	2	2	3	3
×	切頂十二面体	I	切頂二十面体	I	1	1	3	3
×	斜方切頂二十面体	I	切頂二十面体	I	2	2	3	3
○	斜方二十面体	I	二十面体	I	2	2	4	4
○	斜方切頂二十面体	I	二十面体	I	4	3	3	4

6 n 重 covering の対称性

多面体 P_1 の対称性が covering 写像 $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ がよってどのように変化していくのかを調べるために, (Γ_1, Γ_2) -同変を定義していく.

定義 6.1 ((Γ_1, Γ_2) -同変). $P_1 = (V_1, E_1)$ が $P_2 = (V_2, E_2)$ を多面体空間グラフとし, P_1 が P_2 を n 重 covering しているとする. また, $f: P_1 \rightarrow N(P_2)$ を covering 写像とし, $\Gamma_i = \langle \gamma_i: P_i \rightarrow P_i \rangle \subseteq \text{Isom}(P_i)$, ($i = 1, 2$) とする. $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $v \in V_1$ について, $f(\gamma_1(v)) = \psi(\gamma_1)(f(v))$ をみたす同型写像 $\psi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ が存在するとき, f は (Γ_1, Γ_2) -同変であるという.

Γ_i は $\text{Isom}(P_i)$, ($i = 1, 2$) の部分群であり, Γ_i の元は多面体 P_i の回転対称移動である. (Γ_1, Γ_2) -同変の構成を知ることによって, どの回転対称性が保存されているかを理解することができる. 本研究で構成した covering 写像が (Γ_1, Γ_2) -同変であるかどうかを調べていく.

命題 6.2 (四面体に関連した covering). P_1, P_2 がいずれも四面体を切頂または中点切頂をして得られる多面体, もしくは四面体の歪多面体 (二十面体) であるとき, 本研究で構成した covering 写像 f は (Γ_1, Γ_2) -同変であり, $\Gamma_i \cong A_4$ ($i = 1, 2$) である.

命題 6.3 (立方体・八面体に関連した covering). P_1, P_2 がいずれも立方体・八面体を切頂または中点切頂をして得られる多面体, もしくは立方体の歪多面体であるとき, 本研究で構成した covering 写像 f は (Γ_1, Γ_2) -同変であり, $\Gamma_i \cong S_4$ ($i = 1, 2$) である.

命題 6.4 (十二面体・二十面体に関連した covering). P_1, P_2 がいずれも十二面体・二十面体を切頂または中点切頂をして得られる多面体, もしくは十二面体の歪多面体であるとき, 本研究で構成した covering 写像 f は (Γ_1, Γ_2) -同変であり, $\Gamma_i \cong A_5$ ($i = 1, 2$) である.

7 今後の研究課題

本研究では正多面体・半正多面体間の covering の有無について考察した. まだ構成の有無が分かっていない組み合わせについて調べた上で, 考察する範囲を広げた covering について考察していきたい.

- 部分的に対称な covering について
- 角柱や角錐, 菱形多面体等の covering について
- 隣接する頂点を同じ頂点に写す “拡張した” covering について

参考文献

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty(2022) 「グラフ理論」(山下登茂紀・千葉周也訳), 丸善出版
- [2] P. R. Cromwell(2014), 「多面体」(下川航也, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上斉訳), 数学書房
- [3] 川久保勝夫(1987) 「変換群論」, 岩波書店
- [4] 小林正典(2012) 「線形代数と正多面体」, 朝倉書店

- [5] G. Hu, X. -D.Zhai, D. Lu, W. -Y. Qiu, The architecture of Platonic polyhedral links. *J. Math. Chem.* 46(2009), 592-603.
- [6] D. Lu, G. Hu, Y. -Y. Qiu, W. -Y. Qiu. Topological transformation of dual polyhedral links, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 63(2010), 67-78.
- [7] 三谷純『多面体データ』, <https://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/polyhedron/>
- [8] 村杉邦男 (1993) 「結び目理論とその応用」, 日本評論社
- [9] W. -Y. Qiu, X. -D. Zhai, Y. -Y. Qiu, Architecture of Platonic and Archimedean polyhedral links. *J. Math. Chem.*, 51(2008), 13-18.
- [10] T. Sawada, M. Fujita, Orderly Entangled Nanostructures of Metal–Peptide Strands. *Bull. Chem. Soc. Jpn.* 94, 2342-2350(2021).
- [11] T. Sawada, Y. Inomata, K. Shimokawa, M. Fujita, A metal–peptide capsule by multiple ring threading. *Nat Commun* 10, 5687(2019).
- [12] T. Sawada, A. Saito, K. Tamiya, K. Shimokawa, Y. Hisada, M. Fujita, Metal–peptide rings form highly entangled topologically inequivalent frameworks with the same ring-and crossing-numbers. *Nat Commu* 10, 921(2019)