平面への安定写像と2橋絡み目について

加藤楽人　(日本大学大学院　総合基礎科学研究科)*

滑らかな3次元多様体上のMorse関数の一般化として、3次元多様体から2次元多様体への安定写像が考えられ、研究されている。例えば、3次元球面S^3から$\mathbb{R}^2$への安定写像fに対して、定値折り目特異点、尖点（カスプ）のそれぞれの集合を$S_0(f), C(f)$で表し、fのII^2型不定値折り目特異ファイバーの集合を$\mathrm{II}^2(f)$、II^3型不定値折り目特異ファイバーの集合を$\mathrm{II}^3(f)$と表すとき、$C(f)=\emptyset$かつ$(|\mathrm{II}^2(f)|, |\mathrm{II}^3(f)|)=(1,0)$または$(0,1)$をみたし、$L\subset S_0(f)$となる安定写像$f: S^3\to\mathbb{R}^2$が存在するような絡み目$L$の特徴付けが得られている([2], [1])。今回、2成分2橋絡み目Lに対し、$C(f)=\emptyset$かつ$|\mathrm{II}^2(f)|=0$かつ$S_0(f)=L$となる安定写像$S^3\to\mathbb{R}^2$が存在することが示せた。本稿では、この結果について紹介する。本研究は、日本大学文理学部の市原一裕氏との共同研究である。

1. Introduction

最初に安定写像を定義する。そのための準備として、次のことを定義する。MとNを滑らかな多様体とし、fとgをMからNへの滑らかな写像とする。このとき、2つの微分同相写像$\Phi: M\to M$と$\phi: N\to N$が存在し、次の可換図式を満たすとき、fとgが**左右同値**であると定義する。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ M & \xrightarrow[g]{} & N \end{array}$$

さらに、ホイットニー位相が入ったMから$\mathbb{R}^2$への滑らかな写像全体の空間の中で、滑らかな写像fの近傍U_fが存在し、U_f内の任意の滑らかな写像gとfが左右同値であるとき、fは**安定写像**と呼ばれる。

例えば、Morse関数は滑らかな多様体から$\mathbb{R}$への安定写像の例になっている。図1では、2次元多様体Mから$\mathbb{R}$へのMorse関数を図示した。

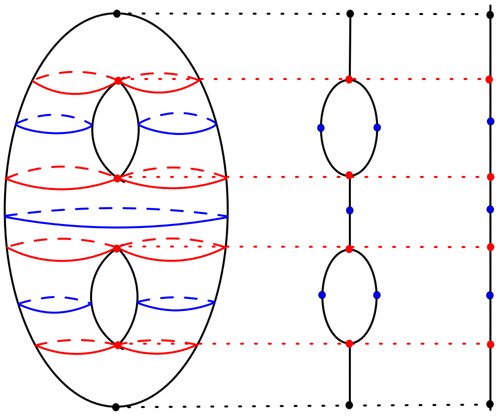

図 1:

* 〒156-8550 東京都世田谷区桜上水3-25-40　日本大学文理学部数学科
e-mail: chga22029@g.nihon-u.ac.jp

ここで、Morse 関数が持つ Morse 特異点と呼ばれる微分のランクが落ちる M 上の点に注目する。図 1 の M 上の赤い点と黒い点が f の特異点である。これらの特異点の像（特異値）は、それぞれ $\mathbb{R}$ 上の赤い点と黒い点である。さらに $\mathbb{R}$ 上にある赤い点の f による引き戻しの連結成分が、M 上の赤い八の字であり、これを特異ファイバーと呼ぶ。また、M 上の黒い点と赤い点以外の点は、f の正則点と呼ばれる。さらに正則点の像の f による引き戻しの 1 つが M 上の青色の円であり、これは正則ファイバーと呼ばれる。

以後、Morse 関数の一般化として、次元を上げて考えられる安定写像について考察する。特に、本稿では 3 次元多様体から $\mathbb{R}^2$ への安定写像について調べる。

Levin[4] によって、3 次元多様体から $\mathbb{R}^2$ への安定写像の同値条件が与えられている。

定理 1.1 (Levin[3],[4]). *f を滑らかな 3 次元多様体 M から $\mathbb{R}^2$ への安定写像とする。このとき、f は以下のうち 1 つの表示を局所的にもつ:*

1. $(u, x, y) \mapsto (u, x)$
2. $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$
3. $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$
4. $(u, x, y) \mapsto (u, y^2 + ux - x^3)$

さらに f は大域的に次の 2 つの条件を満たす:

1. *尖点 p に対して、$f^{-1} \circ f(p) \cap S(f) = p$*
2. *f を尖点を除いた特異点集合に制限写像は 2 重交差しか持たないようなはめ込みである。*

上記の条件 1 から 4 の 4 つの表示で表される局所座標近傍をもつ M 上の点は、上から順にそれぞれ、正則点、定値折り目特異点、不定値折り目特異点、尖点（カスプ）と呼ばれる。特に、f の特異点は上の条件 2, 3, 4 の 3 つを用いて、分類されることが知られている。

Levin によって与えられた局所的な 4 つの表示は視覚的には、次のようになっている。

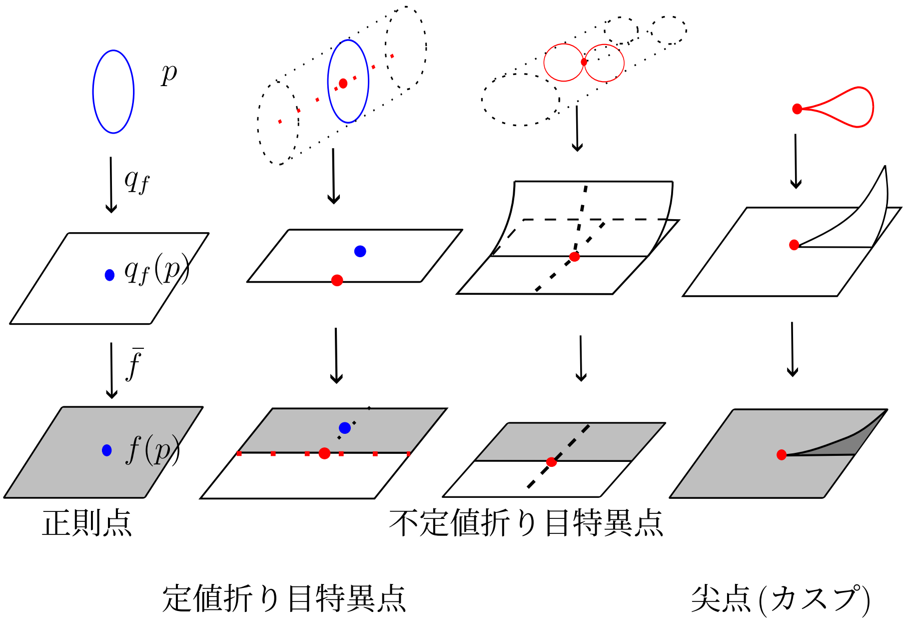

図 2:

この図2の中で、シュタイン分解と呼ばれる$\mathbb{R}^2$上の点のfによる引き戻しのファイバーの連結成分を1点に同一視することで得られる商空間を用いている。また、$\mathbb{R}^2$上で定値折り目特異点全体の像は単純閉曲線になり、不定値折り目特異点全体の像は、平面上のはめ込まれた曲線になることが知られている。

ここまでで見たfの特異点を調べることで、安定写像の定義域多様体の情報を得られることがあり、いくつかの結果が知られている。

結果を紹介する前に、改めていくつかの定義と事実を述べる。滑らかな写像$f : M \to \mathbb{R}^2$に対し、fの微分のランクが落ちるMの点を**特異点**といい、その点からなる集合を**特異点集合**という。本稿では、特異点集合を$S(f)$で表す。さらに、定値折り目特異点、不定値折り目特異点、尖点（カスプ）のそれぞれの集合を$S_0(f), S_1(f), C(f)$で表す。

次に、Levinによって尖点に関して、次の結果が与えられている。

命題 1.2 ([4]). 安定写像$M \to \mathbb{R}^2$が持つ尖点はホモトピックな変形により除去できる。

これにより、以後、安定写像は尖点を持たないとする。次に佐伯[5]によって、次の結果が与えられた。

定理 1.3 (佐伯[5]). $C(f) = \emptyset$かつ$f(S_1(f))$が単純閉曲線となる安定写像$f : M \to \mathbb{R}^2$が存在することと、Mがグラフ多様体であることは同値である。

ここでは、グラフ多様体の定義は省略する。詳しくは、[5]を見よ。

この結果は、$\mathbb{R}^2$上で$f(S_1(f))$が交点を持たない場合である。ここから自然な疑問として、$\mathbb{R}^2$上で$f(S_1(f))$が交点を持つ場合は、どうなるかが考えられる。まず、$\mathbb{R}^2$上の$f(S_1(f))$の交点のfによる引き戻しを考える。

$\mathbb{R}^2$上で$f(S_1(f))$が交点のfによる引き戻しは、2つの場合に分けられることが知られている。

定義 1. 安定写像$f : M \to \mathbb{R}^2$に対し、$f(S_1(f))$の交点の引き戻しの特異ファイバーには、図3のように表されるII^2型とII^3型の2つの種類がある([3])。fのII^2型特異ファイバーの集合を$\mathrm{II}^2(f)$、II^3型特異ファイバーの集合を$\mathrm{II}^3(f)$と表す。

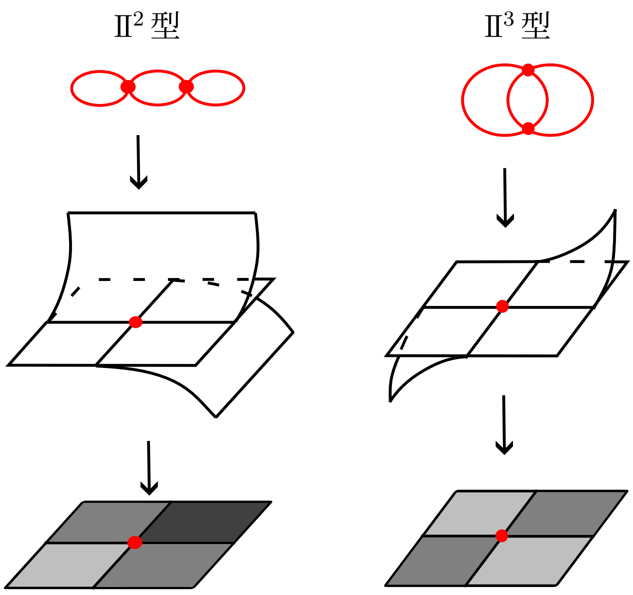

図 3: II^2型とII^3型

石川-古宇田 [2] は、3 次元球面 S^3 から平面への安定写像 f で $|\mathrm{I\!I}^2(f)| = 1$ かつ $|\mathrm{I\!I}^3(f)| = 0$ となるものを調べ、$S_0(f)$ が含む絡み目 L について、次の結果を得た。

定理 1.4 (石川-古宇田 [2]). L を S^3 内の絡み目とする。このとき $C(f) = \emptyset$ かつ $L \subset S_0(f)$ かつ $|\mathrm{I\!I}^2(f)| = 1$ かつ $|\mathrm{I\!I}^3(f)| = 0$ を満たす安定写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^2$ が存在することと図の 6 個の S^3 内の絡み目の 1 つの外部空間に絡み目の境界のトーラスに沿ってデーン手術を行って得られる 3 次元多様体が L の外部空間と微分同相であることは同値である。

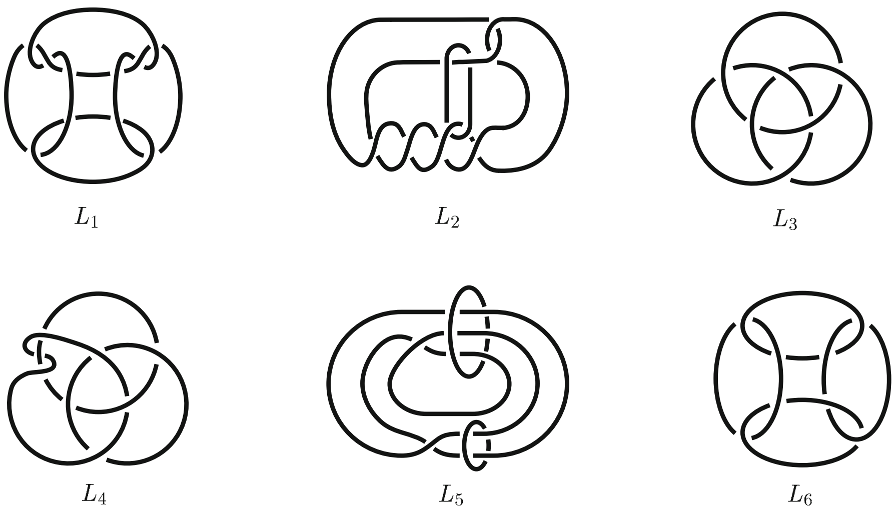

図 4: [2] Fig.2 より

さらに古谷-古宇田 [1] により次が与えられた。

定理 1.5 (古谷-古宇田 [1]). L を S^3 内の絡み目とする。このとき $C(f) = \emptyset$ かつ $L \subset S_0(f)$ かつ $|\mathrm{I\!I}^2(f)| = 0$ かつ $|\mathrm{I\!I}^3(f)| = 1$ を満たす安定写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^2$ が存在することと図の 4 個の S^3 内の絡み目の 1 つの外部空間に絡み目の境界のトーラスに沿ってデーン手術を行って得られる 3 次元多様体が L の外部空間と微分同相であることは同値である。

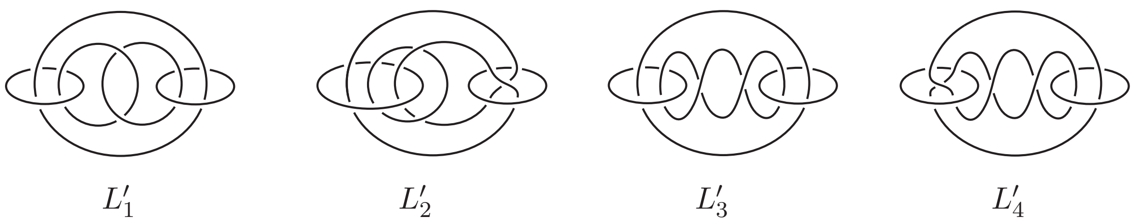

図 5: [1] Fig.2 より

2. Results

本稿の主結果は、次である。

定理 2.1. S^3 内の任意の 2 成分 2 橋絡み目 L に対して、$S_0(f) = L$ かつ $\mathrm{II}^2(f) = \emptyset$ を満たす安定写像 $f : S^3 \to \mathbb{R}^2$ が存在する。

また、表にここまでの特異点に関する安定写像の結果についてまとめると次のようになる。

	Saeki	I-K	F-K	Ichihara-K
Link	Graph link	Six links	Four links	Two bridge link
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Downarrow$
II^2 型	0	1	0	0
II^3 型	0	0	1	$*$

定理 2.1 は、与えられた 2 橋絡み目に対して、安定写像 $S^3 \to \mathbb{R}^2$ を構成することで証明される。例えば、ホワイトヘッド絡み目に対して、安定写像 $S^3 \to \mathbb{R}^2$ を構成すると、特異ファイバーの様子は図 6 のようになる。中央の特異ファイバーが II^3 型のファイバーで、それ以外の特異ファイバーは全て II^2 型である。

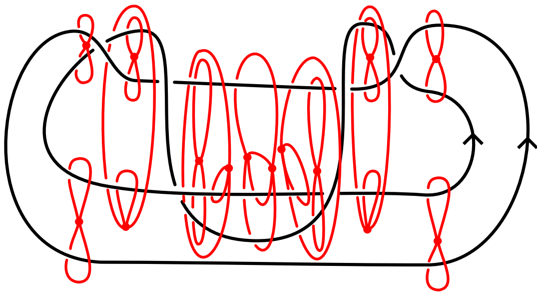

図 6:

3. Key proposition

最後に、主結果の証明に重要な命題を紹介する。まず、準備として、1 つ定義をする。

定義 2. $f : M \to N$ を滑らかな写像とする。このとき任意の M の点 p_1, p_2 に対し、2 点が f のファイバーの同じ連結成分に含まれるとき、p と q は同値であるという。さらに、この同値関係によって M から得られる商空間を f の**シュタイン分解**といい、W_f と表す。例えば、図 7 の Morse 関数に対応するシュタイン分解 W_f は図のようになる。

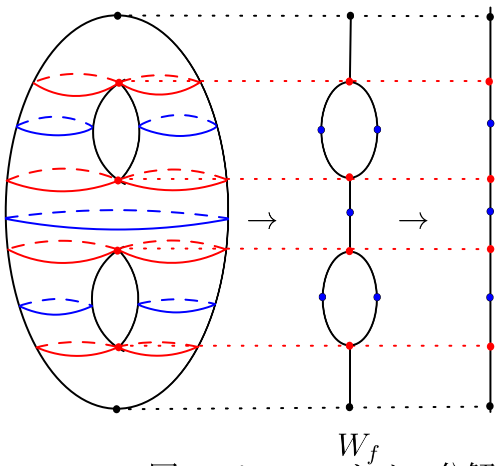

図 7: f のシュタイン分解

このとき、古谷-古宇田 [1] は II^2 型と II^3 型の特異ファイバーの像の近傍について、次の命題を示した。

命題 3.1 (古谷-古宇田 [1])**.** $f : S^3 \to \mathbb{R}^2$ をシュタイン分解 Q_f を持つ安定写像とする。このとき図 *8* の左で表される Q_f の一部分を X に入れ替えて得られるものをシュタイン分解としてもつ安定写像 $g : S^3 \to \mathbb{R}^2$ が存在する。

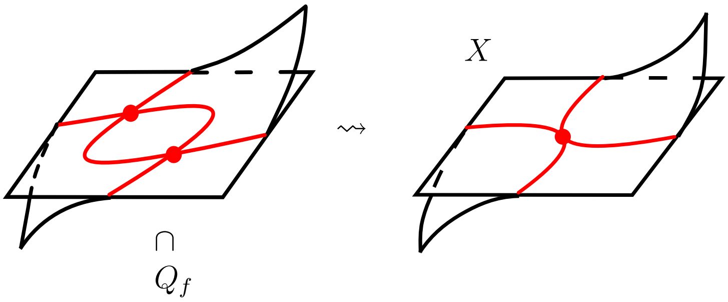

図 8:

謝辞

研究集会「結び目の数理 VI」での講演の機会をくださった東京女子大学の大山淑之先生、新國亮先生に心より感謝申し上げます。また、本研究を進めるに当たり、ご助言をくださった佐伯修先生、石川昌治先生、古宇田悠哉先生、古谷凌雅氏を初め多くの方に感謝いたします。

参考文献

[1] Ryoga Furutani and Yuya Koda, *Stable maps and hyperbolic links*, 2021.

[2] Masaharu Ishikawa and Yuya Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, Math. Ann. **367** (2017), no. 3-4, 1819–1863. MR 3623239

[3] Harold Levine, *Classifying immersions into* $\mathbf{R}^4$ *over stable maps of* 3*-manifolds into* $\mathbf{R}^2$, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1157, Springer-Verlag, Berlin, 1985. MR 814689

[4] Harold I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3** (1965), no. suppl, 263–296. MR 176484

[5] Osamu Saeki, *Simple stable maps of* 3*-manifolds into surfaces*, Topology **35** (1996), no. 3, 671–698. MR 1396772