Shadow-complexity and trisection genus

直江 央寛 * 小川 将輝 †

概要

本稿では, 研究集会「結び目の数理 VI」における講演内容に基づき, 閉 4 次元多様体の加重シャドウ複雑度とトライセクション種数の関係, そして加重シャドウ複雑度が 1/2 以下の閉 4 次元多様体の分類について論ずる.

1 序

シャドウは大雑把に言えば, 4 次元多様体に埋め込まれた 2 次元の多面体である. シャドウは Turaev 氏により 3 次元多様体の量子不変量の研究を目的として導入されたが [19], 後に Costantino 氏により様々な応用が講じられた. 例えば, [2, 4, 5] を参照のこと. 特に, Costantino 氏はシャドウを用いてシャドウ複雑度と呼ばれる 3・4 次元多様体の不変量が定義したが [3], その後, 同氏, Thurston 氏, 石川氏, 古宇田氏らによってシャドウ複雑度と 3 次元多様体の双曲構造や安定写像との関係が見出されたことでシャドウ複雑度の幾何的な解釈が進んだ [5, 7]. 一方, 4 次元多様体の不変量としては, 分類問題を扱うものが多い. 例えば, [3, 8, 11, 16, 17] がある.

今回の我々の研究は, 4 次元多様体のシャドウ複雑度が 4 次元多様体の他の不変量とどのような関係を持つかという問いに答えるものである. 特に, 本稿ではトライセクション種数との関係について論ずる. ここで, トライセクションとは, 3 つのハンドル体への分解として閉 4 次元多様体を記述する手法であり, Gay 氏と Kirby 氏により導入された [6]. トライセクションを表示するために用いられる曲面の種数の最小値は 4 次元多様体の不変量となり, これがトライセクション種数と呼ばれるものである. トライセクション種数に関する研究は, 例えば [14, 20] を参照のこと.

もう少し我々の結果について詳しく述べると, 我々の研究はシャドウ複雑度の別種として r-加重シャドウ複雑度 sc_r を定義し, これとトライセクション種数との比較を行うものである. ここで, r は非負実数のパラメータであり, r を固定する毎に sc_r は 4 次元多様体の不変量を成し, $\{m + rn \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ に値を取る. 我々の主結果 (定理 4.4) は, r が $\frac{1}{2}$ 以上であるときに, 任意の閉 4 次元多様体 W に対し次の不等式が成り立つことを主張する;

$$g(W) \leq 2 + 2\mathrm{sc}_r(W).$$

ここで g はトライセクション種数である. さらに, この不等式は $r = \frac{1}{2}$ のときに最良である. また, この性質を踏まえ $r = \frac{1}{2}$ の場合に焦点を当て, $\mathrm{sc}_{1/2}$ が 0 と $\frac{1}{2}$ となるような閉 4 次元多様体の分類 (定理 5.1, 5.2) も行う.

2 準備

すべての多様体はコンパクト, 連結, 滑らか, 向き付けられているものとする. また, 単体分割可能な位相空間対 $A \subset B$ に対して, A の B における正則近傍を $\mathrm{Nbd}(A; B)$ と表記する. さらに, 閉 n 次元多様体 W と整数 k に対し, kW という記号によって, $k > 0$ のとき W の k 個のコピーの連結和, $k = 0$ のとき n 次元球面 S^n, $k < 0$ のとき W の向きを反転させた n 次元多様体の $|k|$ 個のコピーの連結和を表すものとする. W が境界付き n 次元多様体である場合は, kW という記号によって, $k > 0$ のとき W の k 個のコピーの境界連結和, $k = 0$ のとき n 次元球体 B^n, $k < 0$ のとき W の向きを反転させた n 次元多様体の $|k|$ 個のコピーの境界連結和を表すものとする. また, $\cong$ で微分同相を表すこととする.

2.1 単純多面体とシャドウ

ここではまず単純多面体とシャドウに関して概説する. X を連結, コンパクトな位相空間とする. 各点 $x \in X$ の正則近傍 $\mathrm{Nbd}(x; X)$ が図 1 の (i)-(iv) のいずれかと同相であるとき, X を**単純多面体** (simple polyhedron) という. (iii) 型

* 中央大学 理工学部数学科, e-mail:naoe@math.chuo-u.ac.jp

† 東北大学 数理科学共創社会センター, e-mail:masaki.ogawa.b7@tohoku.ac.jp

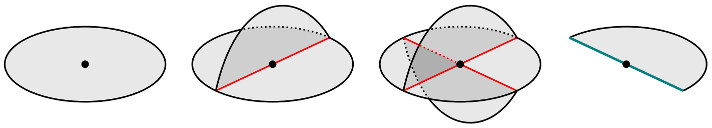

図 1. 単純多面体の局所モデル.

の点を**真頂点** (true vertex) という. (ii) 型および (iii) 型の点全体の集合を X の**特異集合** (singular set) といい, $S(X)$ で表す. この特異集合 $S(X)$ は円周または 4 価グラフらの非交和である. $S(X)$ から真頂点を除いた集合の各連結成分を**三重線** (triple line) といい, $X \setminus S(X)$ の各連結成分を**領域** (region) という. 直ちに分かるように, 各領域はあるコンパクトな曲面からいくつかの点 (0 個も許す) を除いたものと同相である. 領域すべてが開円板であるような単純多面体は**特殊** (special) であるといい, 特にこのとき X を**特殊多面体** (special polyhedron) という. (iv) 型の点全体の集合を X の**境界** (boundary) といい, ∂X と書く. 境界が空である場合は, X は**閉** (closed) であるという.

続いて, 境界付き 4 次元多様体のシャドウを定義する.

定義 2.1. M を境界付き 4 次元多様体とする. M に局所平坦[*1]かつ $X \cap \partial M = \partial X$ を満たすよう埋め込まれた単純多面体 X が存在し, M が X に縮約する[*2]とき, X は M の**シャドウ** (shadow) という.

4 次元多様体に埋め込まれた閉曲面は, その法束の Eular 数によって埋め込みの情報が記述される. 一般のシャドウに対し, この考えを拡張したものが**グリーム** (gleam) であり, 各領域に対する半整数の割り振りとして与えられる. 詳しくは [19, 1] を参照. グリームを備えた単純多面体 $(X, \mathfrak{gl})$ を**グリーム付き多面体** (shadowed polyhedron) という. $(X, \mathfrak{gl})$ はしばしば単に X と表記される.

定理 2.2 (Turaev [19])**.** グリーム付き多面体 X に対し, X をシャドウとするような境界付き 4 次元多様体を微分同相による違いを除き唯 1 つ指定する写像が存在する.

この定理において, グリーム付き多面体から境界付き 4 次元多様体への対応を **Turaev の再構成** (Turaev reconstruction) という. グリーム付き多面体 X に対して Turaev の再構成によって得られる境界付き 4 次元多様体を M_X と表記する. これも, 本来であれば $M_{(X,\mathfrak{gl})}$ と表記すべきであるが, 混乱がない場合はしばしば略す.

グリーム付き多面体 X に対して, ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し M_X の境界の 3 次元多様体が $k(S^1 \times S^2)$ と同相であったとき, $k(S^1 \times B^3)$ を M_X の境界に沿って接着することで閉 4 次元多様体 W が得られる. このとき, X は W のシャドウと呼ばれる. グリームを用いずに述べれば, 次のような定義になる.

定義 2.3. 閉 4 次元多様体 W に局所平坦に埋め込まれた単純多面体 X に対し, ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し, $W \setminus \mathrm{IntNbd}(X; W)$ が $k(S^1 \times B^3)$ と微分同相であったとき, X を W の**シャドウ** (shadow) という.

定理 2.4 (Turaev [19])**.** 任意の閉 4 次元多様体はシャドウを許容する.

閉 4 次元多様体 W とそのシャドウ X があったとき, その埋め込みから X のグリーム $\mathfrak{gl}$ も定まる. Turaev の再構築と Laudenbach 氏, Poénaru 氏の結果 [9] により, グリーム付き多面体は閉 4 次元多様体の表示として機能する.

2.2 シャドウ複雑度

定義 2.5. X を単純多面体, W を閉 4 次元多様体とする.

(1) X が有する真頂点の個数を $c(X)$ と書き, X の**複雑度** (complexity) という.

(2) W のシャドウの複雑度の最小値を $\mathrm{sc}(W)$ と書き, W の**シャドウ複雑度** (shadow-complexity) という.

[*1] 各 $x \in X$ に対し, 滑らかに埋め込まれた 3 次元球体 $B \subset M$ が存在し, $\mathrm{Nbd}(x; X) \subset B$ であるとき, X は M 内で**局所平坦** (locally-flat) であるという.

[*2] より正確には, M にその微分構造と同調するような単体的複体の構造を与え, それが X の部分複体の構造をも与えているとした下, 縮約 (collapse) によって M から X が得られる, という状況である.

(3) W の特殊シャドウの複雑度の最小値を $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)$ と書き, W の**特殊シャドウ複雑度** (special shadow-complexity) という.

定理 2.4 により, シャドウ複雑度および特殊シャドウ複雑度は非負整数に値を取る閉 4 次元多様体の不変量である. 当然ながら, 任意の閉 4 次元多様体 W に対して $\mathrm{sc}(W) \leq \mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)$ という関係が成り立つ. これらは Costantino 氏により導入され [3], 同論文において特殊シャドウ複雑度が 1 以下の閉 4 次元多様体の分類が行われた.

定理 2.6 (Costantino [3])**.** W を閉 4 次元多様体とする. 以下はすべて同値である;

- $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W) = 0$;
- $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W) \leq 1$;
- W は S^4, $\mathbb{CP}^2$, $\overline{\mathbb{CP}}^2$, $S^2 \times S^2$, $2\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ または $2\overline{\mathbb{CP}}^2$ のいずれかと微分同相である.

さらに, 次を示した.

定理 2.7 (Costantino [3])**.** 任意の非負整数 n に対し, $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W) \leq n$ となる閉 4 次元多様体 W は微分同相による違いを除き高々有限個である.

この定理は, 整数 n を固定した際に, 真頂点をちょうど n 個有するような特殊多面体が高々有限個しか存在しないことと, 次の Martelli 氏の強力な定理から従う.

定理 2.8 (Martelli [10])**.** k を非負整数とし, 絡み目 $L \subset k(S^1 \times S^2) = \partial(k(S^1 \times B^3))$ を固定する. このとき, 境界付き 4 次元多様体 $k(S^1 \times B^3)$ に対して L に沿って 2-ハンドルを接着し, さらに 3-, 4-ハンドルを接着し得られるような閉 4 次元多様体は微分同相による違いを除き高々有限個である.

一方で, (特殊でない) シャドウ複雑度では上記のような有限性は成り立たない. これは後述の Martelli 氏の結果 (定理 5.6) からも確認できる.

さらに関連する話題として, 連結シャドウ複雑度[*3]と呼ばれる別種が [8] にて導入されており, その値が 1 以下となるような閉 4 次元多様体の特徴付けが行われている.

2.3 トライセクション

定義 2.9. W を閉 4 次元多様体とする. ある整数 $g, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 次を満たすような W の分解 $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ が存在したとする;

- 各 $i \in \{1,2,3\}$ に対し, $W_i \cong k_i(S^1 \times B^3)$;
- 各 $i, j \in \{1,2,3\}$ に対し, $i \neq j$ ならば $W_i \cap W_j \cong g(S^1 \times B^2)$;
- $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cong g(S^1 \times S^1)$ (すなわち, 種数 g の有向閉曲面).

このような分解 $\mathcal{T}$ を W の**トライセクション** (trisection) という. また, 曲面 $\Sigma = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ を**中心曲面** (central surface) といい, その種数 $g(\mathcal{T}) = g$ を $\mathcal{T}$ の**種数** (genus) という.

トライセクションは Gay 氏と Kirby 氏によって導入された. 彼らは, 4 次元多様体 W から $\mathbb{R}^2$ へのある種の可微分写像の特異点の変形を介し, 次の定理を示している.

定理 2.10 (Gay, Kirby [6])**.** 任意の閉 4 次元多様体はトライセクションを許容する.

次に, トライセクション図式を紹介する. 中心曲面 Σ は, $\partial(W_1 \cap W_2) = \partial(W_2 \cap W_3) = \partial(W_3 \cap W_1)$ としても捉えることができる. $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$, $W_3 \cap W_1$ それぞれ種数 g のハンドル体であるため, 各々が完備メリディアン円板系

[*3] 単純多面体 X の連結複雑度 $c^*(X)$ を $S(X)$ の連結成分ごとの真頂点の個数の最大値として定義し, 閉 4 次元多様体のシャドウの連結複雑度の最小値として**連結シャドウ複雑度** $\mathrm{sc}^*(X)$ (connected shadow-complexity) が定義される. 直ぐ様分かることではあるが, シャドウ複雑度との比較としては, $\mathrm{sc}^*(W) \leq \mathrm{sc}(W)$ という関係が成り立つ.

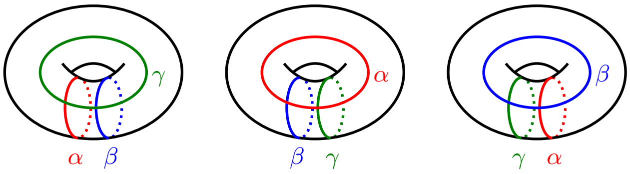

図 2. 安定化と非安定化.

を持つ. その境界は Σ 内の g 個の単純閉曲線族の 3 つ組であるが, これが**トライセクション図式** (trisection diagram) と呼ばれるものである. $W_3 \cap W_1$, $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$ に対応する単純閉曲線族をそれぞれ α, β, γ と名前をつけ[*4], しばしば $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ と表記する. このトライセクション図式は, 完備メリディアン円板系の取り方に依存するため, トライセクション $\mathcal{T}$ に対して (もちろん W に対しても) 一意的ではないことに注意する.

W のトライセクション図式 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ が与えられたとする. このとき, $\Sigma \times D^2$ という境界付き 4 次元多様体に対し, α, β, γ の曲線らに従って 2-ハンドルを接着し, さらに 3-, 4-ハンドルを接着することで W を微分同相による違いを除き一意的に復元することができる. この対応により, トライセクション図式は閉 4 次元多様体の表示として機能する.

トライセクション図式 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ に対し, 図 2 のいずれかの図式との連結和を取るといった操作を**安定化** (stabilization) と呼ぶ. この安定化の操作により得られる図式は, 再びあるトライセクションのトライセクション図式になっており, 種数を 1 つ増やしつつ, 対応する 4 次元多様体の微分同相類を変えないことが知られている [6, 13]. この逆操作を**非安定化** (destabilization) という. また, 図 2 のような位置関係にある α, β, γ の 3 つの曲線の組を**安定化組** (stabilization triple) と呼ぶことにする.

2.4 トライセクション種数

定義 2.11. 閉 4 次元多様体 W のトライセクションの種数の最小値を $g(W)$ と書き[*5], W の**トライセクション種数** (trisection genus) という.

直ぐ様分かるように, $g(S^4) = 0$, $g(\mathbb{CP}^2) = g(\overline{\mathbb{CP}}^2) = g(S^1 \times S^3) = 1$ であり, $g \leq 1$ の閉 4 次元多様体はこれらに限る. $g = 2$ の場合は, Meier 氏と Zupan 氏によって分類が行われ, 既約な閉 4 次元多様体 W に対し, $g(W) = 2$ であることと, W が $S^2 \times S^2$ と微分同相であることが同値であることが証明された [14].

$g \geq 3$ の場合はまだ分類は完了していないが, Meier 氏によって次の予想が立てられている.

予想 2.12 (Maier [12])**.** 既約な閉 4 次元多様体 W に対し, $g(W) = 3$ であることと, ある $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が存在し W が $\mathcal{S}_p$ または $\mathcal{S}'_p$ と微分同相であることが同値である.

ただし, $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}'_p$ はそれぞれレンズ空間 $L(p,1)$ のスパン多様体, 捻れスパン多様体である. p が偶数の場合は $\mathcal{S}_p \not\cong \mathcal{S}'_p$ であり, p が奇数の場合は $\mathcal{S}_p \cong \mathcal{S}'_p$ である [18].

2.5 ハンドル分解から得られるトライセクション

閉 4 次元多様体 W にハンドル分解が与えられたとき, そこからトライセクションを構成することができる. 簡単のため, ハンドル分解は, 0-ハンドルと 4-ハンドルをちょうど 1 つずつ有しているものとする. ここで, H_{01} として 0-,1-ハンドルらの和集合, H_2 として 2-ハンドルらの和集合, H_{34} として 3-,4-ハンドルらの和集合を表すことにする. また, $L \subset \partial H_{01}$ を 2-ハンドルの接着円周からなる絡み目とし, τ を L の解消トンネル[*6]とする.

$$W_1 = H_{01} \setminus \mathrm{IntNbd}(L \cup \tau; W), \qquad W_2 = H_2 \cup \mathrm{Nbd}(L \cup \tau; W), \qquad W_3 = H_{34} \setminus \mathrm{IntNbd}(L \cup \tau; W)$$

[*4] $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$, $W_3 \cap W_1$ に対応する単純閉曲線族をそれぞれ α, β, γ とする流儀もあるようだが, 我々は本文の流儀を採用する.
[*5] $g_t(W)$ とも書く.
[*6] 一般の閉 3 次元多様体 N と, その中の絡み目 L に対し, L の解消トンネル τ とは, L に端点を置く線分らの N への埋め込みであり, $\mathrm{Nbd}(L \cup \tau; N)$ と $N \setminus \mathrm{IntNbd}(L \cup \tau; N)$ が N の Heegaard 分解を与えるものである.

と定義すると, これらは W のトライセクションを与える [15]. このときの中心曲面は, $\partial\mathrm{Nbd}(L\cup\tau;\partial H_{01})$ と同一視できる. また, 2-ハンドルの枠の情報からトライセクション図式を具体的に描くことができる.

3 切断系と加重複雑度

この章では, 単純多面体に対して切断系と加重複雑度という概念を導入し, 閉 4 次元多様体の新たな不変量, 加重シャドウ複雑度を定義する.

X を単純多面体とし, $S(X)\neq\emptyset$ であるとする. このとき, X の**切断系** (sut system) とは, 互いに交わらない弧らの X への埋め込みの族 Γ であり, 次を満たすものである;

- 各弧の境界は三重線または ∂X に含まれる;
- 各弧の内部は $X\setminus(S(X)\cup\partial X)$ に含まれる;
- ∂X の各連結成分に対して, 唯 1 つの弧がその端点で交わる;
- 各領域から Γ を除くと単連結である.

ここで, 領域 R に含まれる Γ (正確には $\mathrm{Int}\Gamma$) の連結成分数はちょうど $1-\chi(R)$ であることに注意する.

単純多面体 X の複雑度 $c(X)$ は, その真頂点の個数として定義されていたことを思い出す. つまり, 謂わば $c(X)$ とは "特異集合の複雑さ" であるが, 次で導入される加重複雑度 $c_r(X)$ は "領域の複雑さ" も考慮に入れた量である.

定義 3.1. 実数 $r\geq 0$ を固定する.

(1) 単純多面体 X に対し, X が閉曲面でないときは

$$c_r(X)=c(X)+\sum_{R:\text{領域}} r(1-\chi(R)).$$

とし, X が 2 次元球面 S^2 に同相であるときは $c_r(X)=0$ として X の r-**加重複雑度** $c_r(X)$ (r-weighted complexity) を定義する.

(2) 閉 4 次元多様体 W の r-**加重シャドウ複雑度** $\mathrm{sc}_r(W)$ (r-weighted shadow complexity) を W のすべてのシャドウの r-加重複雑度の最小値として定義する.

注意 3.2. 上記の定義では, S^2 以外の閉曲面に対して加重複雑度を定義していないが, それは補題 4.2 が理由である. また, $1-\chi(R)$ は 0 以上となるため, $0<r<r'$ に対し $c(X)=c_0(X)\leq c_r(X)\leq c_{r'}(X)$ が成り立つ.

$\mathrm{sc}_r(W)$ は閉 4 次元多様体の不変量であり, $\{m+rn\mid m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ に値を取る. この新たな不変量と, 既存のシャドウ複雑度, 特殊シャドウ複雑度との比較として, 次が成立する.

命題 3.3. W を閉 4 次元多様体とし, r,r' を非負実数とする.

(1) $r<r'$ であるとき, 次が成立する;

$$\mathrm{sc}(W)\leq\mathrm{sc}_r(W)\leq\mathrm{sc}_{r'}(W)\leq\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W).$$

(2) $\mathrm{sc}(W)=\mathrm{sc}_0(W)$.

(3) $r\geq 2$ のとき, $\mathrm{sc}_r(W)=\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)$.

証明の概略. (1) 注意 3.2 より, 2 つの不等式 $\mathrm{sc}(W)\leq\mathrm{sc}_r(W)\leq\mathrm{sc}_{r'}(W)$ が成り立つ. X が特殊であるとき, $c(X)=c_r(X)$ であるため最後の不等式 $\mathrm{sc}_r(W)\leq\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)$ も成り立つ.

(2) $c(X)=c_0(X)$ より明らか.

(3) X を W のシャドウとしたとき, $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)\leq c_2(X)$ を示せば十分.

まず $S(X)=\emptyset$ のとき, つまり X は S^2, あるいは境界付き曲面である場合を考える. このとき, W は $k(S^1\times S^3)$, $\mathbb{CP}^2$ または $\overline{\mathbb{CP}}^2$ のいずれかと微分同相である. ただし, $k=\frac{c_2(X)}{2}$. 論文 [3, 17] において, これらの 4 次元多様体の特殊シャドウ複雑度は決定されており, $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W)\leq c_2(X)$ が確認できる.

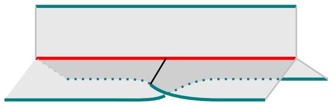

図 3. φ が単射でなくなる部分の像.

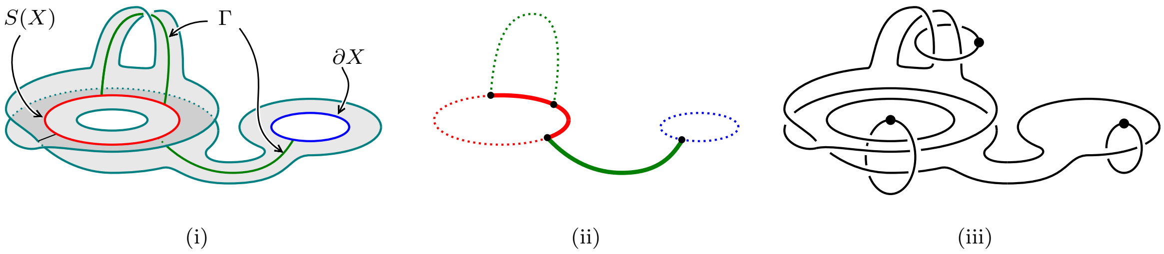

図 4. シャドウから Kirby 図式を得る例. (i) $X_{\tilde{\Gamma}}$ の φ による像. (ii) $\tilde{\Gamma}$ の極大木 T. (iii) M_X の Kirby 図式.

続いて $S(X) \neq \emptyset$ の場合を考える. Γ を X の切断系とし, e をその連結成分の 1 つとする. 4 次元多様体を変えない局所変形を e のまわりで適切に施すとこで, e を消去し, 真頂点が 2 個増えるよう変形でき, 別の単純多面体 X' が得られる. このとき, 簡単な計算から $c_2(X') = c_2(X)$ である. この操作を Γ の連結成分それぞれで行うことで, X の特殊シャドウ X'' であり, $c(X'') = c_2(X'') = c_2(X)$ を満たすものが構成できる. したがって, $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W) \leq c_2(X)$. □

この章の最後に, 定理 2.7 と同様の性質が sc_r でも成立することを紹介する.

命題 3.4. 任意の正の実数 r と非負実数 a に対し, $\mathrm{sc}_r(W) \leq a$ となる閉 4 次元多様体 W は微分同相による違いを除き高々有限個である.

証明. r-加重複雑度 c_r は $\{m + rn \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ に値を取ることを思い出す. ここで, $\{m + rn \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cap [0, a]$ は有限集合である. ここから元 a_0 を任意に選ぶ. このとき, a_0 を $m + rn$ の形で表したときの (m, n) の個数は有限個である. その中の 1 つ (m_0, n_0) を固定する. ここで, $c(X) = m_0$ かつ $\displaystyle\sum_{R:\text{領域}} (1 - \chi(R)) = n_0$ を満たす単純多面体 X は同相による違いを除き有限個である. したがって, Martelli 氏の結果, 定理 2.8 によって証明が完了する. □

4 シャドウ, Kirby 図式, トライセクション

4.1 シャドウから得られる Kirby 図式

ここでは, シャドウから Kirby 図式を描く方法を概説する. X をグリーム付き多面体とし, $S(X) \neq \emptyset$ であるとする. また, Γ を X の切断系とする. $\tilde{\Gamma} = S(X) \cup \Gamma \cup \partial X$ とおくと, $\tilde{\Gamma}$ は自然にグラフの構造を持ち, その頂点の次数は 3 または 4 である. ここで, T を $\tilde{\Gamma}$ の極大木として, X の各三重線に対し, それが $\tilde{\Gamma}$ 内でいくつかの辺に分かれているとき, T は高々 1 つを除いてその全てを含むものとする.

$X_{\tilde{\Gamma}} = \mathrm{Nbd}(\tilde{\Gamma}; X)$ とおく. $\partial X_{\tilde{\Gamma}} \setminus \partial X$ の連結成分数は X の領域の数と一致している. 特に, $X_{\tilde{\Gamma}}$ に対し, $\partial X_{\tilde{\Gamma}} \setminus \partial X$ の各円周に沿って円板を接着することで X を復元することができる.

さて, 嵌め込み $\varphi : X_{\tilde{\Gamma}} \to S^3$ であって, 次を満たすものを考える.

- $\varphi(X_{\tilde{\Gamma}}) \subset \mathrm{Nbd}(\varphi(\tilde{\Gamma}); S^3)$, かつ
- φ はいくつかの三重線の近傍を除き埋め込みであり, 単射でない点は, その近傍の像が図 3 のようになっている.

図 4-(i) に $X_{\tilde{\Gamma}}$ の φ による像の一例を示した.

次に, $\varphi(\tilde{\Gamma} \setminus T)$ の各弧に対し, そのメリディアンとして 1-ハンドルを表す点付き円周を描く. その際に, 各点付き円周は $\varphi(X_\Gamma)$ と交わらないものとする. 点付き円周らのなす絡み目を L_1 とする. さらに, $L_2 = \varphi(\partial X_{\tilde{\Gamma}} \setminus \partial X)$ とおく.

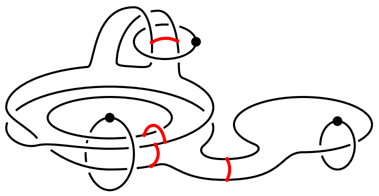

図 5. 解消トンネル τ.

図 4-(ii) のように T を選んだとすれば, L_1 と L_2 は図 4-(iii) のように描かれる. L_2 に適切に枠を設定することで, 絡み目 $L_1 \sqcup L_2$ が M_X を表す Kirby 図式となる. L_2 の枠は X のグリームと φ によって具体的に計算できるが, ここでは詳細を省く.

4.2 トライセクション種数の評価

前節で与えた Kirby 図式と対応するハンドル分解をもとに, 第 2.5 節で説明した方法によりトラセクション $\mathcal{T}$ を構成する. その際に, 2-ハンドルの接着円周 L_2 に対する解消トンネルの指定が必要となるが, 図 4 の例に対しては, 図 5 のように与えることができる. 証明は省略するが, より一般に $S(X) \setminus T$ の各連結成分に対し 2 本, Γ の各連結成分に対し 1 本のトンネルを用意することで L_2 の解消トンネル τ を与えることができる. T は $S(X)$ の極大木であるため, $S(X) \setminus T$ の連結成分数は $\mathrm{rank}\pi_1(S(X)) = c(X) + 1$ に等しい. 一方で, Γ の連結成分数は $\displaystyle\sum_{R:\text{領域}} (1 - \chi(R))$ に等しい. したがって, このときの解消トンネル τ の成分数は

$$2(c(X)+1) + \sum_{R:\text{領域}} (1-\chi(R)) = 2 + 2\left(c(X) + \frac{1}{2}\sum_{R:\text{領域}} (1-\chi(R))\right) = 2 + 2c_{1/2}(X)$$

となる. さらに, これらから構成されるトライセクション $\mathcal{T}$ の種数は, 簡単な計算から τ の成分数に 1 を加えたものであることが分かるため, 次が得られる.

命題 4.1. 任意の閉 4 次元多様体 W に対して, $g(W) \leq 3 + 2c_{1/2}(W)$ が成り立つ.

4.3 評価の精密化

命題 4.1 の不等式は, もう少し強めることができる. これを行うために, 次の 2 つの補題を用意する. 重要となるのは, X が閉 4 次元多様体の (グリーム付き) シャドウであったとき, ∂M_X は $k(S^1 \times S^2)$ と同相であることである.

補題 4.2. 球面でない任意の閉曲面はいかなる閉 4 次元多様体のシャドウにもなり得ない.

証明. X を閉曲面とし, グリームを任意に与える. このとき, ∂M_X は X 上の S^1-束であるが, そのような閉 3 次元多様体は, 底空間が S^2 でない限り $k(S^1 \times S^2)$ と同相になり得ない. □

補題 4.3. X は閉単純多面体で, $S(X) \neq \emptyset$ であり, 唯 1 つの領域を有するとする. このとき, X はいかなる閉 4 次元多様体のシャドウにもなり得ない.

証明の概略. X のグリームを任意に与え, 境界付き 4 次元多様体 M_X を考える. 縮約に対する射影 $M_X \to X$ の引き戻しにより, X の分解から ∂M_X のトーラスらに沿った分解が得られる. この分解の各ピースの既約性から, ∂M_X も既約であることが分かる. 特に, この分解は標準的 (所謂, JSJ 分解) となり, ∂M_X は $k(S^1 \times S^2)$ と同相になり得ない. □

次が我々の主定理である.

定理 4.4. 任意の実数 $r \geq \frac{1}{2}$ と任意の閉 4 次元多様体 W に対して, $g(W) \leq 2 + 2\mathrm{sc}_r(W)$ が成り立つ.

証明の概略. X を W の任意のシャドウとする. 命題 3.3 により, $g(W) \leq 2 + 2c_{1/2}(X)$ が示せれば十分. また, 補

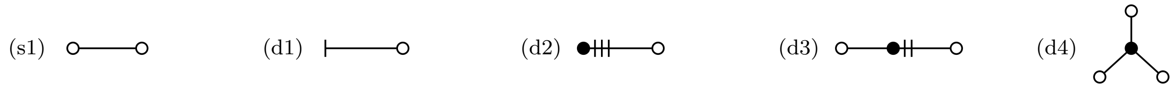

図 6. $c_{1/2} = 0$ の単純多面体のエンコードグラフ.

題 4.2, 4.3 により,

- X は S^2 と同相,
- X は 境界付き曲面と同相,
- $S(X) \neq \emptyset$ かつ X は領域を少なくとも 2 つ以上有する,

のいずれかが成り立つ.

X が S^2 と同相であるとき, W は S^4, $\mathbb{CP}^2$, $\overline{\mathbb{CP}}^2$ のいずれかと微分同相である. いずれの場合も $g(W) \leq 1 < 2 + 2\mathrm{sc}_{1/2}(X)$ が成り立つ.

X が境界付き曲面であるとき, W は $k(S^1 \times S^3)$ と微分同相である. ただし $k = 2c_{1/2}(X)$. このとき, $g(W) = k < 2 + 2c_{1/2}(X)$ が成り立つ.

$S(X) \neq \emptyset$ かつ X は領域を少なくとも 2 つ以上有するとする. Γ を X の切断系とし, 第 4.1 節の方法で Kirby 図式描くと, そこから第 4.2 節で説明したように $g(W) \leq 3 + 2c_{1/2}(X)$ という評価が得られる. もし X が境界成分を持つ場合は, その境界成分に端点を置く Γ の弧に対して 1 つ安定化組を見つけることができる. これに対し非安定化を行い, $g(W) \leq 2 + 2c_{1/2}(X)$ を得る. もし X が境界成分を持たない場合, X は領域を少なくとも 2 つ以上有することから, ある三重線が存在し, その三重線に沿って貼られる 3 つの領域のうち, 1 つは他の 2 つと異なる領域である. そのような三重線に対しても, 1 つ安定化組を見つけることができ, この場合でも非安定化により $g(W) \leq 2 + 2c_{1/2}(X)$ を得る. □

注意 4.5. k を 1 以上の整数とする. S^2 に $k-1$ 個の互いに交わらない円板を指定し, それぞれの境界に沿って新たに別の $k-1$ 個の円板を接着し得られる単純多面体を X とする. X の領域は $2(k-1)$ 個の円板と, 唯 1 つの $k-1$ 個穴あき球面からなり, 真頂点はないため $c_{1/2}(X) = \frac{k-2}{2}$ である. 実は, この X は $k\mathbb{CP}^2$ にシャドウとして埋め込むことができる. したがって, $\mathrm{sc}_{1/2}(k\mathbb{CP}^2) \leq \frac{k-2}{2}$. 一方で, 直ぐに分かるように $g(k\mathbb{CP}^2) = k$ である. 以上より, 等式 $g(k\mathbb{CP}^2) = 2 + 2\mathrm{sc}_{1/2}(k\mathbb{CP}^2) = k$ が成立する. すなわち, 不等式 $g(W) \leq 2 + 2\mathrm{sc}_{1/2}(W)$ は最良である.

5 $\frac{1}{2}$-加重シャドウ複雑度が $\frac{1}{2}$ 以下の閉 4 次元多様体の分類

定理 4.4 と注意 4.5 を踏まえ, $r = \frac{1}{2}$ の状況に着目し閉 4 次元多様体の分類問題を考える.

5.1 $\frac{1}{2}$-加重複雑度が $\frac{1}{2}$ 以下の単純多面体

まず, $\frac{1}{2}$-加重複雑度が $\frac{1}{2}$ 以下 (つまり, 0 または $\frac{1}{2}$) の単純多面体を列挙する. $c_{1/2} = 0$ であるような単純多面体は S^2 と同相であるか, あるいは真頂点を持たず全ての領域の Euler 標数が 1 であるような単純多面体である. そのような単純多面体は, エンコードグラフ[*7]を用いて表すと図 6 のいずれかである. 一方で, $c_{1/2} = \frac{1}{2}$ であるような単純多面体は真頂点を持たず, Euler 標数が 0 の領域を唯 1 つ持ち, その他の領域の Euler 標数はすべて 1 であるような単純多面体である. そのような単純多面体は, 図 7 のいずれかである.

5.2 $\frac{1}{2}$-加重シャドウ複雑度が $\frac{1}{2}$ 以下の閉 4 次元多様体

$\frac{1}{2}$-加重シャドウ複雑度に関する 4 次元多様体の分類として, 次の結果が得られた.

定理 5.1. W を閉 4 次元多様体とする. 以下は同値である;

*7 エンコードグラフはグラフで単純多面体を表示するもので, [11] で導入された. 大雑把に言うと, 単純多面体を単純閉曲線らに沿っていくつかの基本的なピースに分解し, その各ピースに対して頂点を用意し, 単純閉曲線で貼り合うピース同士を辺で結ぶことで得られるグラフである.

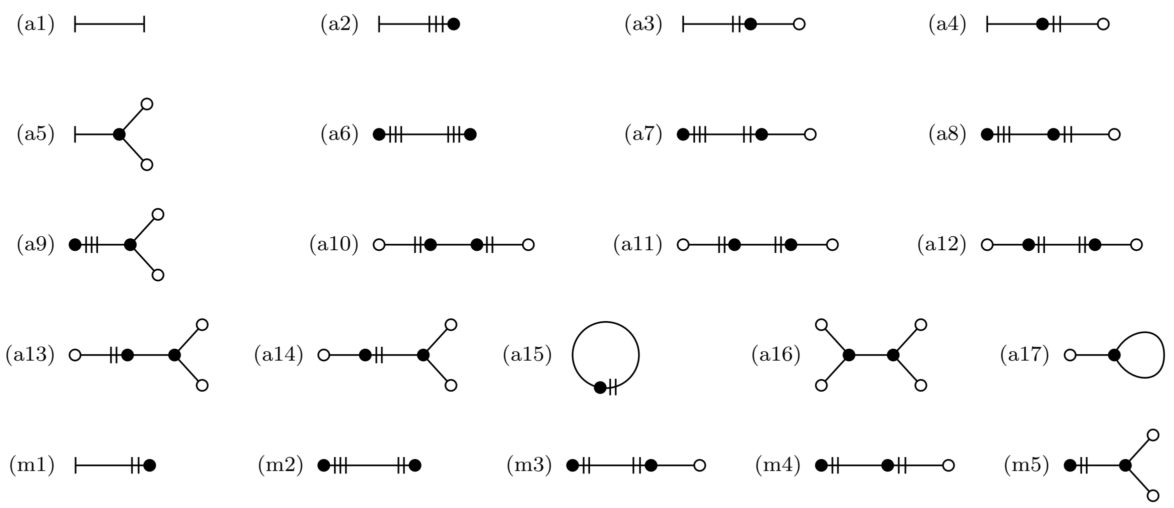

図 7. $c_{1/2} = \frac{1}{2}$ の単純多面体のエンコードグラフ.

- $\mathrm{sc}_{1/2}(W) = 0$;
- W は S^4, $\mathbb{CP}^2$, $\overline{\mathbb{CP}}^2$, $S^2 \times S^2$, $2\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ または $2\overline{\mathbb{CP}}^2$ のいずれかと微分同相である.

定理 5.2. W を閉 4 次元多様体とする. 以下は同値である;

- $\mathrm{sc}_{1/2}(W) = \frac{1}{2}$;
- W は $3\mathbb{CP}^2$, $2\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$, $\mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}}^2$, $3\overline{\mathbb{CP}}^2$, $S^1 \times S^3$, $(S^1 \times S^3) \# \mathbb{CP}^2$, $(S^1 \times S^3) \# \overline{\mathbb{CP}}^2$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_2'$ または $\mathcal{S}_3$ のいずれかと微分同相である.

注意 5.3. 定理 5.1 において, $\mathrm{sc}^{\mathrm{sp}}(W) = 0$ も同値である (cf. 定理 2.6).

X を $\frac{1}{2}$-加重複雑度が 0 または $\frac{1}{2}$ の単純多面体とする. 証明に当たって, まずは X が閉 4 次元多様体のシャドウになり得るか, 候補を絞るところから始める.

補題 5.4 (Costantino [3, Lemma 3.12])**.** X は $H_2(X) = 0$ かつ $\mathrm{tor} H_1(X) \neq 0$ を満たすとする. このとき, X の任意のグリームに対し, ∂M_X は $k(S^1 \times S^2)$ と同相でない. とくに, X はいかなる閉 4 次元多様体のシャドウにもならない.

X のグリームを任意に与え, M_X の Kirby 図式を描く. 点付き円周は 0-手術と見做すことで境界の 3 次元多様体 ∂M_X の手術図式が得られる. ここから具体的に位相不変量を計算し, ∂M_X が $k(S^1 \times S^2)$ と同相になり得るか検証する. 今回は初等イデアルを用いた.

補題 5.5. 任意の非負整数 k に対し, $\pi_1(k(S^1 \times S^2))$ の d 番目初等イデアルは $d < k$ のとき (0), $k \leq d$ のとき $(1) = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_k^{\pm 1}]$ と同型である.

以上の補題を用い候補を絞った後, 具体的にどのような閉 4 次元多様体が現れるかを特定するため Kirby 計算を行う. また, その際に, 考えるべき単純多面体らは真頂点を持たないため, Martelli 氏の分類が使える. なお, 今回考えるべき単純多面体の中で, 基本群が有限なものはその位数が 3 以下である.

定理 5.6 (Martelli [11, Theorem 1.7])**.** W を閉 4 次元多様体とする. 以下は同値である;

- $\mathrm{sc}(W) = 0$ かつ $|\pi_1(W)| \leq 3$.
- ある非負整数ら n_1, n_2, n_3 が存在し, $W \cong W' \# n_1 \mathbb{CP}^2 \# n_2 \overline{\mathbb{CP}}^2 \# n_3 (S^2 \times S^2)$. ただし, W' は S^4, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_2'$ または $\mathcal{S}_3$ のいずれかである.

ここでは $|\pi_1(W)| \leq 3$ という条件を課しているが, Martelli 氏はより広く基本群が有限であるような閉 4 次元多様体でシャドウ複雑度が 0 であるようなものの分類を行っており, 上記はその一部を抜粋したものである.

6 謝辞

研究集会「結び目の数理 VI」での講演の機会を下さいました世話人の先生方に深く御礼申し上げます. また, 本研究は科研費 (課題番号:JP20K14316) の助成を受けたものです.

参考文献

[1] F. Costantino, *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*. Scuola Normale Superiore, Edizioni della Normale, Pisa, Italy, 2005.

[2] F. Costantino, *Stein domains and branched shadows of* 4*-manifolds*, Geom. Dedicata **121** (2006), 89–111.

[3] F. Costantino, *Complexity of* 4*-manifolds*, Exp. Math. **15** (2006), no. 2, 237–249.

[4] F. Costantino, *Branched shadows and complex structures on* 4*-manifolds*, J. Knot Theory Ramif. **17** (2008), no. 11, 1429–1454.

[5] F. Costantino and D. Thurston, 3*-manifolds efficiently bound* 4*-manifolds*, J. Topol. **1** (2008), no. 3, 703–745.

[6] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting* 4*-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[7] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of* 3*-manifolds*, Math. Ann. **367** (2017), no. 3-4, 1819–1863.

[8] Y. Koda, B. Martelli and H. Naoe, *Four-manifolds with shadow-complexity one*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **31** (2022), no. 4, 1111–1212.

[9] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on* 4*-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.

[10] B. Martelli, *Links, two-handles, and four-manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2005**, no. 58, 3595–3623.

[11] B. Martelli, *Four-manifolds with shadow-complexity zero*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2011**, no. 6, 1268–1351.

[12] J. Meier, *Trisections and spun four-manifolds*, Math. Res. Lett. **25** (2018), no. 5, 1497–1524.

[13] J. Meier, T. Schirmer and A. Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no.11, 4983—-997.

[14] J. Meier and A. Zupan, *Genus-two trisections are standard*, Geom. Topol. **21** (2017), no. 3, 1583–1630.

[15] J. Meier and A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.

[16] H. Naoe, *Shadows of* 4*-manifolds with complexity zero and polyhedral collapsing*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 10, 4561–4572.

[17] H. Naoe, *The special shadow-complexity of* $\#k(S^1 \times S^3)$, preprint. arXiv:2309.09225.

[18] P. S. Pao, *The topological structure of* 4*-manifolds with effective torus actions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279–317.

[19] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[20] M. Williams, *Trisections of Flat Surface Bundles over Surfaces*, PhD Thesis, The University of Nebraska (2020), 81 pp.