4 次元多様体のエキゾチック対に対する トライセクション種数

高橋 夏野 (大阪大学)*

概 要

トライセクション種数とは, 滑らかな 4 次元多様体に対して定まる素朴な整数値不変量である. これは 3 次元多様体に対する Heegaard 種数の 4 次元における類似概念に当たる. この不変量に関して,「4 次元多様体の任意のエキゾチック対は同一のトライセクション種数を持つ」という予想が立てられた. 本稿では, この予想の肯定的例を与える. 境界付き 4 次元多様体のあるエキゾチック対で, トライセクション種数が共に 4 となるものを紹介する. この 4 という値は, 既知の肯定的例の中で最小のトライセクション種数である.

1. 4 次元多様体のトライセクション

本稿では, 多様体は全て連結, コンパクト, 滑らかで, 向き付けられているものとする. また境界付き 4 次元多様体といえば, その境界となる閉 3 次元多様体は, 空でない連結なものであるとする.

トライセクションとは, 滑らかな 4 次元多様体を所定の方法で 3 つの 4 次元 1 ハンドル体に分割するという概念である. これは 3 次元多様体に対する Heegaard 分解の 4 次元におけるアナロジーとして, Gay–Kirby [2] によって導入された. Heegaard 分解とトライセクションの間にはいくつかの類似した性質が存在する. 例えば, 3 次元多様体の位相構造が Heegaard 図式によって表示できるのと同様に, 4 次元多様体の微分構造はトライセクション図式と呼ばれる曲面上の 3 種類の曲線族によって表示可能である. 本稿では, トライセクションの定義に関する基礎的事項の説明を省略する. 閉 4 次元多様体に対するトライセクションおよび, 境界付き 4 次元多様体に対する相対トライセクションについての詳細な解説については, [2], [1] 等を参照のこと.

本稿では, 4 次元多様体のトライセクション種数と呼ばれる不変量に関する結果を報告する. トライセクション種数は, 3 次元多様体の Heegaard 種数の 4 次元版に相当するものである. (境界付き) 4 次元多様体 X に対して, その**トライセクション種数** $g(X)$ は以下で定義される.

$$g(X) := \min\{g \in \mathbb{Z} \mid X \text{ は種数 } g \text{ のトライセクションを許容する.}\}.$$

トライセクション種数は, 滑らかな 4 次元多様体に対して定まる微分同相不変量である. 現状では, トライセクション種数が 2 以下の閉 4 次元多様体は完全に分類されている (Gay–Kirby [2], Meier–Zupan [8]). また境界付き 4 次元多様体に関しては, トライセクション種数が 0 のものは, 4 次元 1 ハンドル体となることが知られている. しかし, 一般に与えられた 4 次元多様体に対してそのトライセクション種数を決定することは容易ではない.

本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2138 の支援を受けたものである.

* 〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-5 大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
e-mail: nt-takahashi@ist.osaka-u.ac.jp

2. トライセクション種数に関する予想

Heegaard 種数は 3 次元多様体の連結和に関して加法的であることが, Haken [5] の結果から従う. 即ち, 任意の閉 3 次元多様体 M, N に対し, 連結和 $M\#N$ の Heegaard 種数は, M, N それぞれの Heegaard 種数の和に等しいということである. この主張の 4 次元におけるアナロジーとして,「トライセクション種数は連結和に関して加法的である」という予想が Lambert-Cole–Meier [7] によって立てられた. 彼らによるオリジナルの予想は閉 4 次元多様体のトライセクション種数にのみ焦点が当てられていたが, 本稿では境界付き多様体にまで拡張した以下の予想を考える.

予想 2.1. 閉 (または境界付き) 4 次元多様体のトライセクション種数は (境界) 連結和に関して加法的である. 即ち, 以下の 2 つの主張は正しい.

- 任意の閉 4 次元多様体 X, Y に対し, $g(X\#Y) = g(X) + g(Y)$ が成り立つ.
- 任意の境界付き 4 次元多様体 X, Y に対し, $g(X\natural Y) = g(X) + g(Y)$ が成り立つ.

ここで, トライセクション種数は 4 次元多様体の微分同相不変量として定義されるのであった. しかし, もし予想 2.1 が正しければ, トライセクション種数は同相に関する不変量でしかないことが従う. 即ち, 次の予想が成立する.

予想 2.2. 4 次元多様体の任意のエキゾチック対 (X, Y) に対し, $g(X) = g(Y)$ である.

ここで, 2 つの多様体がエキゾチックであるとは, それらが同相だが微分同相でないことをいう. 予想 2.1 が正しければ予想 2.2 も成り立つことの証明を与える.

命題 2.3. 閉 (または境界付き) 4 次元多様体のトライセクション種数が (境界) 連結和に関して加法的であるならば, トライセクション種数は同相に関する不変量である.

証明. 2 つの閉 (または境界付き) 4 次元多様体 X, Y がエキゾチックであると仮定する. (一般化された) Wall の定理 ([13], [3]) により, ある正整数 n が存在し, 次の微分同相が成り立つ.

$$X\#(\#^n S^2 \times S^2) \cong Y\#(\#^n S^2 \times S^2). \tag{1}$$

X, Y が閉 4 次元多様体である場合, もしトライセクション種数が連結和に関して加法的であるならば, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} g(X\#(\#^n S^2 \times S^2)) &= g(Y\#(\#^n S^2 \times S^2)) \\ g(X) + g(\#^n S^2 \times S^2) &= g(X) + g(\#^n S^2 \times S^2) \\ g(X) &= g(Y). \end{aligned}$$

次に, X, Y が境界付き 4 次元多様体である場合を考える. 境界付き多様体 M と閉多様体 N に対して, $M\#N \cong M\natural(N - \operatorname{Int} D^4)$ が成り立つ ([4, p.128]). 従って, 微分同相 (1) によって以下が成り立つ.

$$X\natural((\#^n S^2 \times S^2) - \operatorname{Int} D^4) \cong Y\natural((\#^n S^2 \times S^2) - \operatorname{Int} D^4)$$

もしトライセクション種数が境界連結和に関して加法的であるならば, 閉の場合と同様の計算により, $g(X) = g(Y)$ が従う. $\square$

さらに, 予想 2.2 が正しければ, トライセクション種数が 2 以下の 4 次元多様体にエキゾチック微分構造が存在しないことが従う. 即ち, 以下の閉 4 次元多様体はエキゾチック対を持たないことになる.

$$S^4,\ \pm\mathbb{C}P^2,\ S^1\times S^3,$$
$$\pm 2\mathbb{C}P^2,\ \mathbb{C}P^2\#(-\mathbb{C}P^2),\ (\pm\mathbb{C}P^2)\#(S^1\times S^3),\ 2(S^1\times S^3),\ S^2\times S^2.$$

加えて, 境界付き 4 次元多様体のトライセクション種数に関する分類の結果から, 4 次元 1 ハンドル体 $\natural^k(S^1\times D^3)$ のエキゾチック対も存在しないことが従う.

予想 2.2 の肯定的例となる 4 次元多様体のエキゾチック対について紹介する.

定理 2.4 (Meier–Zupan [9], Lambert-Cole–Meier [7])**.** 閉 4 次元多様体のエキゾチック対で, 同一のトライセクション種数を持つものが無限に存在する.

この定理は, 主張を満たす具体的なエキゾチック対を与えることによって証明された. 以下では, そのようなエキゾチック対の無限族を紹介する. 次数 d の複素超曲面 S_d は 3 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ 内で以下のように定義される.

$$S_d := \{[z_0 : z_1 : z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^d = 0\}.$$

閉 4 次元多様体 S_d にはエキゾチック対が存在することが知られている. 添字 d が奇数のとき, S_d と $p\mathbb{C}P^2\#q\overline{\mathbb{C}P^2}$ はエキゾチックである. また d が偶数のとき, S_d と $pK3\#qS^2\times S^2$ はエキゾチックである. (但し p, q はある整数とする.) これらのエキゾチック対のトライセクション種数は, 全て第 2 Betti 数と一致する.

また Spreer–Tillmann [10] は, $K3$ 曲面のトライセクション種数が 22 であることを証明した. その系として以下の主張が従う.

定理 2.5. 閉 4 次元多様体のエキゾチック対 $(K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}, 20\mathbb{C}P^2\#3\overline{\mathbb{C}P^2})$ は共にトライセクション種数が 23 である.

この 23 という値は, 現状知られている同一のトライセクション種数を持つ閉 4 次元多様体のエキゾチック対の中で, 最小である.

3. 主結果

前節で述べたように, 同一のトライセクション種数を持つ閉 4 次元多様体のエキゾチック対の例は発見されている. その一方で, 境界付き 4 次元多様体のクラスに関する予想 2.2 の肯定的例は, 先行研究において見つかっていなかった. 本稿の主結果は以下である.

定理 3.1 ([12])**.** トライセクション種数が共に 4 となる境界付き 4 次元多様体のあるエキゾチック対が存在する.

この定理の証明の概要を解説する. 定理 3.1 の主張を満たす 4 次元多様体のエキゾチック対 (P, Q) を具体的に与える. 2 つの境界付き 4 次元多様体 P, Q を, 図 1, 2 の Kirby 図式で与えられるものとする. これらはコルクツイストと呼ばれる操作で移り合うエキゾチック対であることが知られている. 本稿では, $g(P) = g(Q) = 4$ であることを証明するために, トライセクション種数の上下からの評価を与える.

まず以下の定理を用いて, トライセクション種数に対する下からの評価を与える.

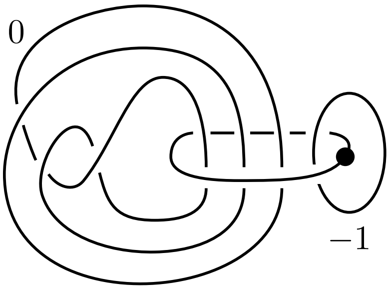

図 1: P の Kirby 図式.

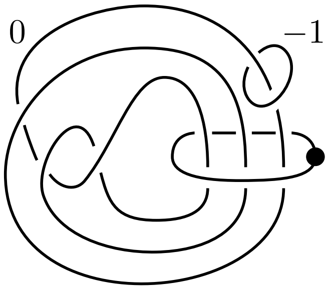

図 2: Q の Kirby 図式.

定理 3.2 ([11])**.** 境界付き 4 次元多様体 X に対して, ∂X が双曲 3 次元多様体ならば, $g(X) \geq \chi(X) + 2$ が成り立つ.

境界 ∂P と ∂Q は共に図 3 の手術図式で与えられる閉 3 次元多様体と微分同相である. (スラムダンクムーブを用いて図式を変形することによってわかる.) 図 3 に現れる 2 橋絡み目は Mazur リンクと呼ばれるものである. Mazur リンクに沿った整数係数の例外的手術の分類の結果 (Yamada [14]) によると, ∂P と ∂Q は双曲的である. 定理 3.2 を適用すると, $g(P) = g(Q) \geq 4$ が成り立つ.

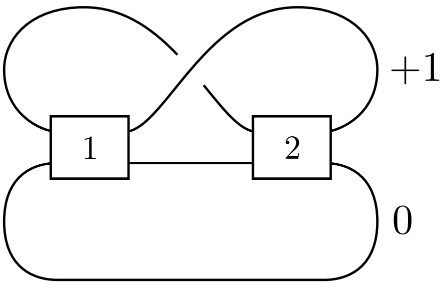

図 3: 境界 ∂P, ∂Q の手術図式

次に 4 次元多様体 P および Q のそれぞれに対し, 具体的に種数 4 の相対トライセクションを構成することによって, 上からの評価を与える. 2 つの図式 $\mathcal{D}_P$ および $\mathcal{D}_Q$ を図 4, 5 で与えられるものとする. これらは $(4, 3; 0, 4)$ 相対トライセクション図式の定義を満たす. (即ち, 曲面の微分同相写像と曲線のスライドによって, 標準的な図式に変形できる.)

Kim–Miller [6] によって, 相対トライセクション図式から Kirby 図式を構成するアルゴリズムが与えられた. それを $\mathcal{D}_P$ および $\mathcal{D}_Q$ に適用すると, 誘導される Kirby 図式はそれぞれ図 6, 7 で与えられる. Kirby 計算によって, 図 6, 7 はそれぞれ図 1, 2 の Kirby 図式に変形できる. 従って, 4 次元多様体 P, Q は共に種数 4 の相対トライセクションを許容する.

4. 謝辞

講演の機会を与えてくださいました世話人の先生方に感謝申し上げます. また, 講演を聞いていただいた参加者の皆様にもお礼申し上げます.

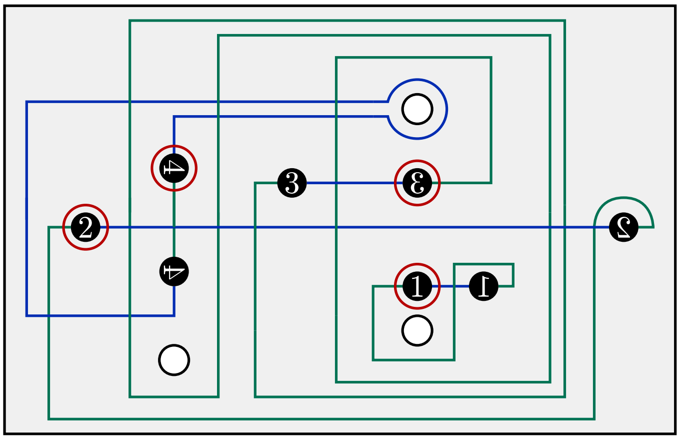

図 4: P の 種数 4 の相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P$.

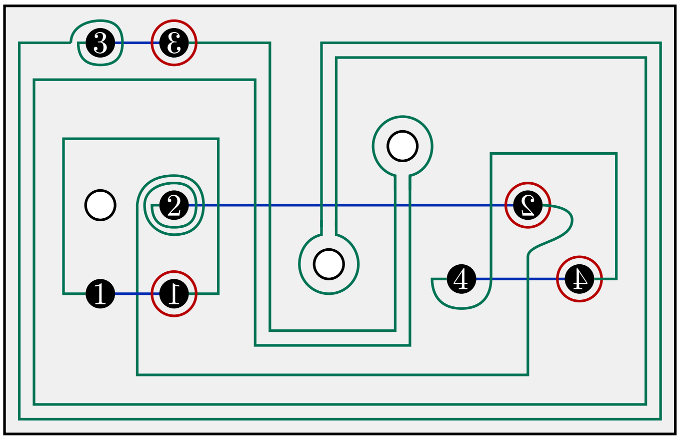

図 5: Q の 種数 4 の相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_Q$.

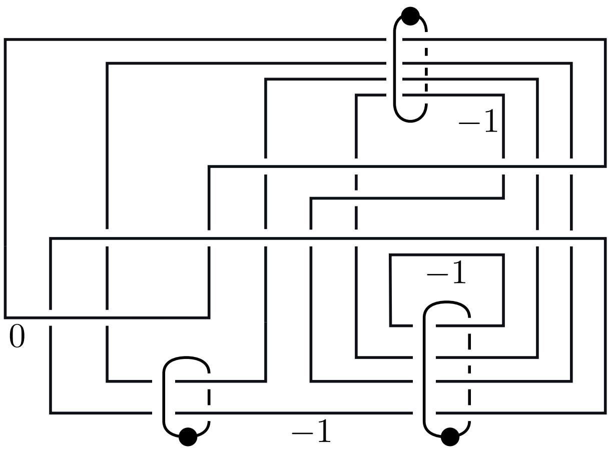

図 6: $\mathcal{D}_P$ が誘導する Kirby 図式.

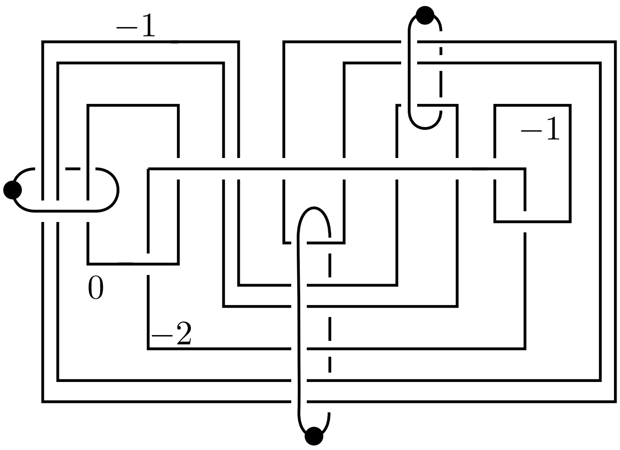

図 7: $\mathcal{D}_Q$ が誘導する Kirby 図式.

参考文献

[1] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.

[2] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[3] Robert E. Gompf, *Stable diffeomorphism of compact* 4*-manifolds*, Topology Appl. **18** (1984), no. 2-3, 115–120.

[4] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz, 4*-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[5] Wolfgang Haken, *Some results on surfaces in* 3*-manifolds*, (1968), 39–98.

[6] Seungwon Kim and Maggie Miller, *Trisections of surface complements and the Price twist*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 1, 343–373.

[7] Peter Lambert-Cole and Jeffrey Meier, *Bridge trisections in rational surfaces*, J. Topol. Anal. **14** (2022), no. 3, 655–708.

[8] Jeffrey Meier and Alexander Zupan, *Genus-two trisections are standard*, Geom. Topol. **21** (2017), no. 3, 1583–1630.

[9] Jeffrey Meier and Alexander Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.

[10] Jonathan Spreer and Stephan Tillmann, *The trisection genus of standard simply connected PL 4-manifolds*, **99** (2018), Art. No. 71, 13.

[11] Natsuya Takahashi, *Minimal genus relative trisections of corks*, arXiv preprint arXiv:2208.08144 (2022).

[12] Natsuya Takahashi, *Exotic 4-manifolds with small trisection genus*, arXiv preprint arXiv:2308.00482 (2023).

[13] Charles T. C. Wall, *On simply-connected* 4*-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.

[14] Yuichi Yamada, *Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **12** (2018), 40–70.