

Trisections of the doubles of some Mazur type 4-manifolds

磯島 司 (東京工業大学)*

1 予備知識

本稿では、4次元多様体は全て滑らか、コンパクト、連結かつ向き付けられているとする。また、滑らかな多様体 X と Y が微分同相であることを $X \cong Y$ で表し、向きづけられた多様体 Z に対し、その逆の向きが与えられた多様体を \bar{Z} で表す。

1.1 trisections of 4-manifolds

本節では、Gay-Kirby[GK16]により導入された4次元多様体の trisection に関する基本事項を紹介する。

定義 1.1.1. 4次元閉多様体 X に対し、3つ組 (X_1, X_2, X_3) は以下を満たすとき、 X の $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection と呼ばれる。ここで g, k_i ($i = 1, 2, 3$) は $0 \leq k_i \leq g$ を満たす整数である。

- $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
- $i = 1, 2, 3$ に対し、 $X_i \cong \natural_{k_i} S^1 \times D^3$.
- $i = 1, 2, 3$ に対し、 $X_i \cap X_{i+1} = \partial X_i \cap \partial X_{i+1} \cong \natural_g S^1 \times D^2$ ($X_4 = X_1$).
- $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cong \Sigma_g$. ここで、 Σ_g は種数 g の向きづけ可能な閉曲面を表す。

3つ組 (X_1, X_2, X_3) を trisection と呼ぶ代わりに、 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を trisection と呼ぶこともある。 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ のときは **balanced** trisection と呼ばれ、 (g, k) -trisection と表される。それ以外の場合は **unbalanced** trisection と呼ばれる。 g を trisection の種数という。 $H_\alpha = X_3 \cap X_1$, $H_\beta = X_1 \cap X_2$, $H_\gamma = X_2 \cap X_3$ に対し、 $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ を trisection の spine という。 trisection は spine により一意的に定まる [LP72].

例 1.1.2.

- 4-ball 3つによる S^4 の自然な3分割は種数0, つまり $(0, 0)$ -trisection である。
- $B_{i,j,k} := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid \|z_i\|, \|z_j\| \leq \|z_k\|\}$ とする。このとき、 $\mathbb{C}P^2 =$

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学理学院数学系

e-mail: isoshima.t.aa@m.titech.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/tsukasaisoshimatitech>

本研究は科研費(課題番号: 23KJ0888)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57Q37, 57R65

キーワード: Trisection diagram, Stabilization, Mazur type

$B_{0,1,2} \cup B_{2,0,1} \cup B_{1,2,0}$ は $(1, 0)$ -trisection である.

3次元多様体を図示する Heegaard 図式と同様に, trisection diagram と呼ばれる, 4次元多様体を表す図式を定義することが出来る.

定義 1.1.3. $T = (X_1, X_2, X_3)$ を $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection とし, $\Sigma = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ とする. 4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は以下を満たすとき, $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection diagram と呼ばれる.

- (Σ, α, β) は $\#_{k_1} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.
- (Σ, β, γ) は $\#_{k_2} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.
- (Σ, γ, α) は $\#_{k_3} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.

図 1 は $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式を表す. α, β, γ は全て g 本の Σ 上の単純閉曲線の組であり, 図 2, 3 のようにそれぞれ赤, 青, 緑で表される.

spine が $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ である trisection に対し, α, β, γ をそれぞれ $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ のメリディアン円板系とすると, $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ はこの trisection に関する trisection diagram である. 逆に, trisection diagram $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ に対し, $\Sigma \times D^2$ に, $\alpha \times \{e^{\frac{2\pi i}{3}}\}, \beta \times \{e^{\frac{4\pi i}{3}}\}, \gamma \times \{e^{2\pi i}\}$ に沿って 2 ハンドルを接着し, 3, 4 ハンドルを接着することで, この trisection diagram に対応する trisected な 4次元閉多様体を構成することができる. ただし, 2 ハンドルの framing は surface framing とする.

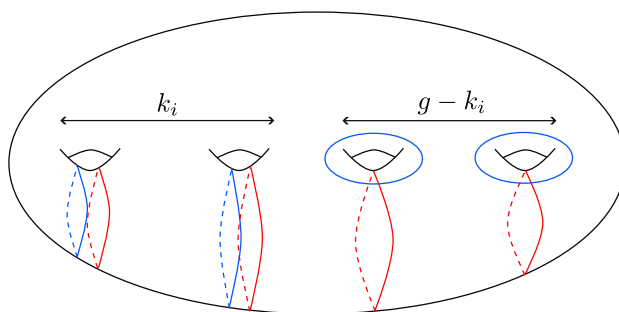


図 1: $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

例 1.1.4. 図 2 は例 1.1.2 の trisection に関する CP^2 の $(1, 0)$ -trisection diagram を表す.

定義 1.1.5. X を 4次元閉多様体とし, $T = (X_1, X_2, X_3), T' = (X'_1, X'_2, X'_3)$ を X の trisection とする. X の isotopy $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ で, $h_0 = id, h_1(X_i) = X'_i$ を満たすものが存在するとき, T と T' は isotopic であるという.

Heegaard 分解における stabilization と同様に, trisection に対して stabilization を定めることが出来る.

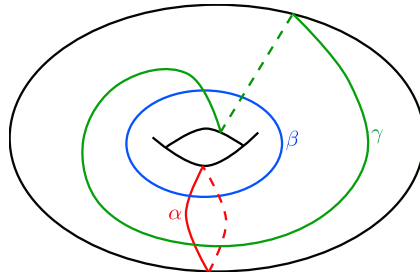


図 2: $\mathbb{C}P^2$ の $(1, 0)$ -trisection diagram.

定義 1.1.6. $X = (X_1, X_2, X_3)$ を trisection とする. また, C を, $X_i \cap X_j$ にプロパーに埋め込まれた boundary parallel な arc であるとする. このとき, X'_i, X'_j, X'_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) を次のように定める.

- $X'_i = X_i - \nu(C)$
- $X'_j = X_j - \nu(C)$
- $X'_k = X_k \cup \overline{\nu(C)}$

このとき, trisection (X_1, X_2, X_3) を (X'_1, X'_2, X'_3) に置き換える操作を k -stabilization という. ここで, (X'_1, X'_2, X'_3) も X の trisection になることに注意する. また, stabilization の反対の操作を **destabilization** という.

trisection diagram に対する stabilization は以下のように定められる.

定義 1.1.7. trisection diagram \mathcal{D} に対し, \mathcal{D} と図 3 のいずれかとの連結和をとる操作, もしくはこの操作により得られる trisection diagram のことを, \mathcal{D} の **stabilization** という. 左から順に, 1, 2, 3-stabilization に対応している.

図 3 は左から順に S^4 の $(1; 1, 0, 0)$, $(1; 0, 1, 0)$, $(1; 0, 0, 1)$ -trisection diagram を表している.

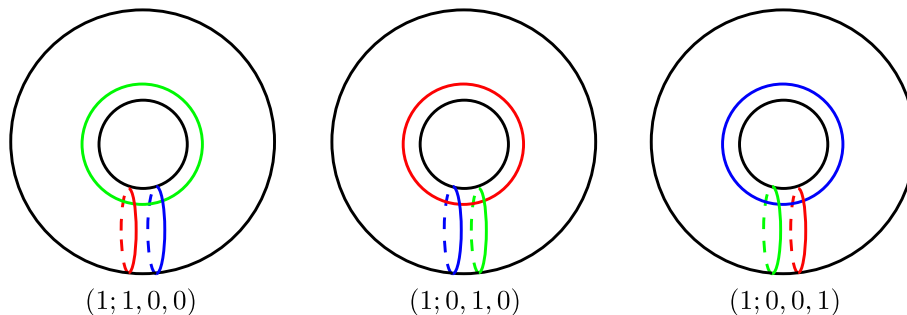


図 3: S^4 の unbalanced な種数 1 の trisection diagram

定理 1.1.8. [GK16] 任意の 4 次元閉多様体は trisection を許容する. 同じ 4 次元閉多様

体に対する任意の2つの trisection は stably isotopic である.

すなわち, trisection は stabilization の差を除いて一意である. また, 定理 1.1.8 の系として次が知られている.

系 1.1.9. [GK16] 2つの4次元閉多様体 X_1, X_2 が微分同相であるための必要十分条件は, それらに対応する trisection diagram が (balanced) (de)stabilization, 曲面の微分同相, 同族曲線間のハンドルスライドで移りあうことである.

Waldhausen により, S^3 の各種数における Heegaard 分解は一意であることが示されている. 次の予想は, この定理の4次元のアナロジーであり, **4次元の Waldhausen 予想**と呼ばれている. 本稿では, この予想の特別な場合に該当する問題を考える (問題 2.0.2).

予想 1.1.10 ([MSZ16]). S^4 の任意の trisection は種数0の trisection かその stabilization に isotopic である.

1.2 relative trisections of 4-manifolds with boundary

上記は4次元閉多様体, つまり境界がない場合に対する trisection を考えていたが, 境界付き4次元多様体に対しても trisection は導入されている. それは **relative trisection** と呼ばれているが, 本稿では relative trisection の定義は省略する. 詳しくは [Cas16, CGPC18, CO19] 等を参照されたい. trisection と同様に, relative trisection に対して **relative trisection diagram** を考えることができる. 定義は以下の通りである.

定義 1.2.1. 4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は次を満たすとき, $(g, k; p, b)$ -**relative trisection diagram** と呼ばれる: $(\Sigma, \alpha, \beta), (\Sigma, \beta, \gamma), (\Sigma, \gamma, \alpha)$ はそれぞれ曲面の微分同相とハンドルスライドにより図4と移り合う.

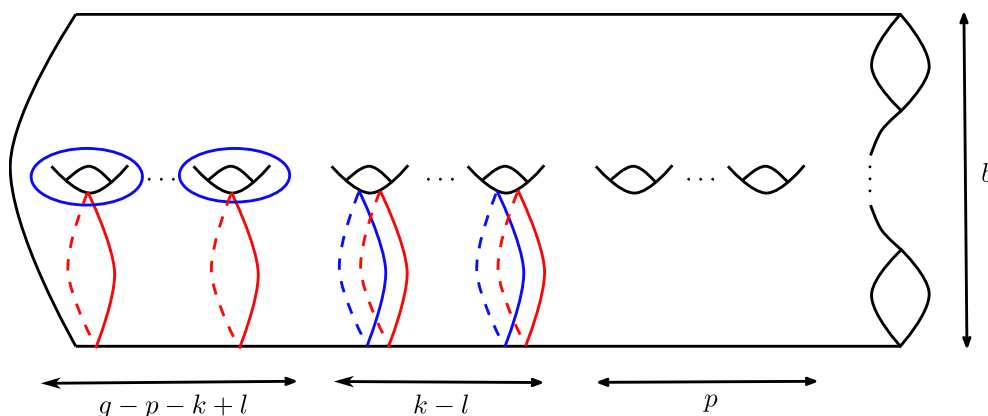


図 4: $l = 2p + b - 1$

relative trisection diagram には arc を描くことができ、arc が描かれた relative trisection diagram は **arced relative trisection diagram** と呼ばれる。[CGPC18, Theorem 5] により、arc を描くためのアルゴリズムが開発されている。

定理 1.2.2 ([CGPC18]). $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ を X の relative trisection diagram とし、 Σ_α を、 α に沿って Σ を手術して得られる曲面とする。

1. Σ_α を disk D^2 に切り開く arc を Σ に描き、これを a と呼ぶ。
2. a と β の交わりがなくなるように a のコピーを α 上でハンドルスライドする。このとき、必要であれば β 間のハンドルスライドは行っても良い。こうして得られる arc と β をそれぞれ b, β' と呼ぶ。
3. b と γ の交わりがなくなるように b のコピーを β' 上でハンドルスライドする。このとき、必要であれば γ 間のハンドルスライドは行っても良い。こうして得られる arc と γ をそれぞれ c, γ' と呼ぶ。

このとき、 $(\Sigma, \alpha, \beta', \gamma', a, b, c)$ は X の arced relative trisection diagram である。

1.3 ダブルの trisection diagram

境界付き 4 次元多様体 X に対し、 X の二つのコピーの境界 ∂X 同士を恒等写像 $id_{\partial X}$ で貼り合わせて得られる 4 次元閉多様体を X の**ダブル**という。Castro-Ozbagci [CO19, Corollary 2.13] により、 X の relative trisection diagram から X のダブルの trisection diagram を構成する方法が得られている。

系 1.3.1 ([CO19]). X を境界付き 4 次元多様体とし、 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c)$ を X の arced relative trisection diagram とする。さらに、 $(\bar{\Sigma}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ を $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c)$ の鏡像をとって得られる arced relative trisection diagram とする。このとき、 $(\Sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ は X のダブルの trisection diagram である。ここで、 $\Sigma^* = \Sigma \cup_{id} \bar{\Sigma}$, $\alpha^* = \alpha \cup \bar{\alpha} \cup (a \cup_{\partial \Sigma} \bar{a})$, $\beta^* = \beta \cup \bar{\beta} \cup (b \cup_{\partial \Sigma} \bar{b})$, $\gamma^* = \gamma \cup \bar{\gamma} \cup (c \cup_{\partial \Sigma} \bar{c})$ である。

1.4 Mazur type 4-manifolds

本節では、Mazur type と呼ばれる 4 次元多様体に関する基本事項を紹介する。可縮な境界付き 4 次元多様体 X が一つの 0, 1, 2 ハンドルからなるハンドル分解を持つとき、 X は **Mazur type** であると言われる。Mazur type の初めての例は Mazur [Maz61] によって考えられた。[Maz61] にある observation により次のことが示される。

命題 1.4.1 ([Maz61]). 任意の Mazur type のダブルは S^4 に微分同相である。

この命題は、2 章で用いられる重要な事実である。

Akbulut-Kirby [AK79] は、Mazur が考えた Mazur type とは異なる Mazur type を導入している。これは、図 5 の Kirby diagram で表される 4 次元多様体である。本稿では

この4次元多様体を $W^\pm(\ell, k)$ で表す. ここで, ℓ, k は任意の整数である. $W^\pm(\ell, k)$ は次の性質をもつ.

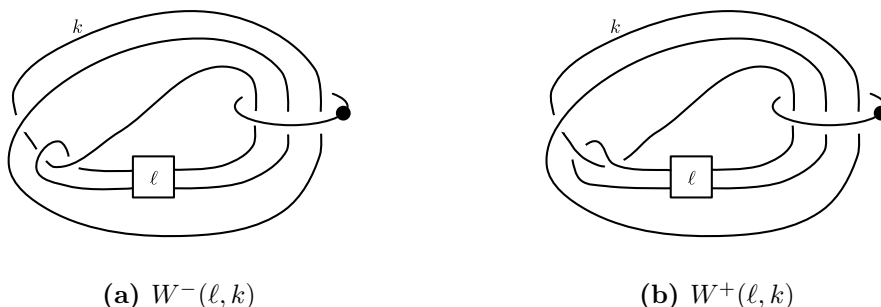


図 5: $W^\pm(\ell, k)$ の Kirby diagram.

命題 1.4.2 ([AK79]).

- $W^\pm(\ell, k) \cong W^\pm(\ell + 1, k - 1)$
- $W^-(\ell, k) \cong \overline{W^+(-\ell, -k + 3)}$

2 主結果

まず, 系 1.1.9 を受けて, 次を定義する.

定義 2.0.1. X を S^4 に微分同相な 4次元閉多様体とし, \mathcal{D} を X の trisection diagram とする. \mathcal{D} は次を満たすとき **standard** であると言われる: \mathcal{D} は, 曲面の微分同相, ハンドルスライド, destabilization を有限回行うことで種数 0 の trisection diagram に移る.

本章では, 次の問題を考える.

問題 2.0.2. X を S^4 に微分同相な 4次元閉多様体とする. このとき, X の任意の trisection diagram は standard か?

この問題は 4次元の Waldhausen 予想の特別な場合に該当する問題である. 筆者は今までに X が次の場合にこの問題を肯定的に解決してきた: 樹下型の P^2 -knot に沿った自明な Price twist により得られる S^4 [Iso22], ある spun torus knot に沿った非自明な Gluck twist により得られる 4次元多様体 [IO23, Iso23]. 本稿では, X として, Akbulut-Kirby により導入された Mazur type $W^-(0, n + 2)$ (n は任意の整数) のダブルを考える.

高橋夏野氏 [Tak23] は $W^-(0, n + 2)$ の $(3, 3; 0, 4)$ -relative trisection diagram を図 6 のように構成した. 図 7 はこの diagram に, [CGPC18] のアルゴリズムを用いて arc を描くことで得られる arced relative trisection diagram である. この図に対し, [CO19] の方法を用いることで, 図 8 を得る. これは, $W^-(0, n + 2)$ のダブルの $(9, 3)$ -trisection

diagram である。主結果は以下の通りである。

定理 2.0.3. 任意の整数 n に対し、図 8 で表される trisection diagram は standard である。

証明 曲面の微分同相とハンドルスライドを多数回行い、destabilizable part を九つ見つける。□

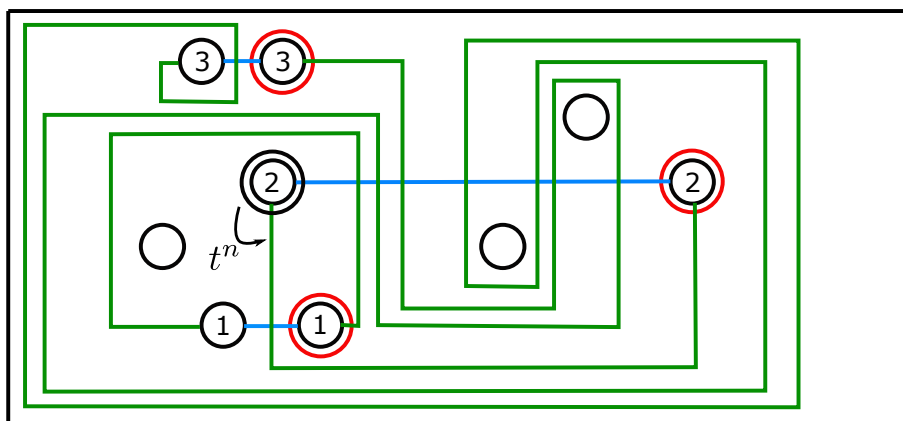


図 6: $W^-(0, n+2)$ の $(3, 3; 0, 4)$ -relative trisection diagram. t^n の矢印は、黒い曲線と交わる γ 曲線を黒い曲線に沿って n 回 Dehn twist することを意味している。

参考文献

- [AK79] Selman Akbulut and Robion Kirby, *Mazur manifolds*, Michigan Math. J. **26** (1979), no. 3, 259–284. MR 544597
- [Cas16] Nickolas Andres Castro, *Relative trisections of smooth 4-manifolds with boundary*, Ph.D. thesis, University of Georgia, 2016.
- [CGPC18] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Cañedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.
- [CO19] Nickolas A. Castro and Burak Ozbagci, *Trisections of 4-manifolds via Lefschetz fibrations*, Math. Res. Lett. **26** (2019), no. 2, 383–420. MR 3999550
- [GK16] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [IO23] Tsukasa Isoshima and Masaki Ogawa, *Trisections induced by the Gluck surgery along certain spun knots*, 2023, arXiv:2305.12042.
- [Iso22] Tsukasa Isoshima, *Trisections obtained by trivially regluing surface-knots*, 2022, arXiv:2205.04817.
- [Iso23] Tsukasa Isoshima, *Infinitely many standard trisection diagrams for Gluck twisting*, 2023, arXiv:2309.06778.
- [LP72] François Laudenbach and Valentin Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.

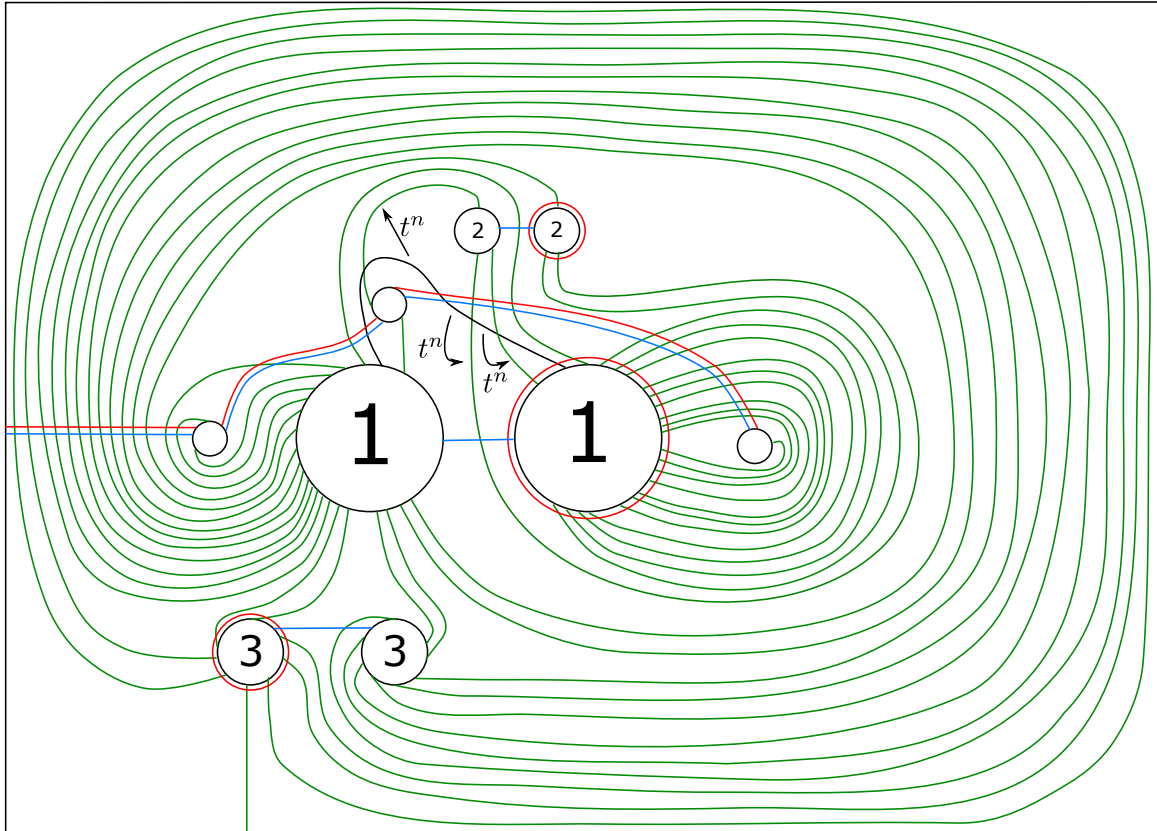


図 7: $W^-(0, n+2)$ の arced relative trisection diagram.

- [Maz61] Barry Mazur, *A note on some contractible 4-manifolds*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 221–228. MR 125574
- [MSZ16] Jeffrey Meier, Trent Schirmer, and Alexander Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 11, 4983–4997.
- [Tak23] Natsuya Takahashi, *Exotic 4-manifolds with small trisection genus*, 2023, arXiv:2308.00482.

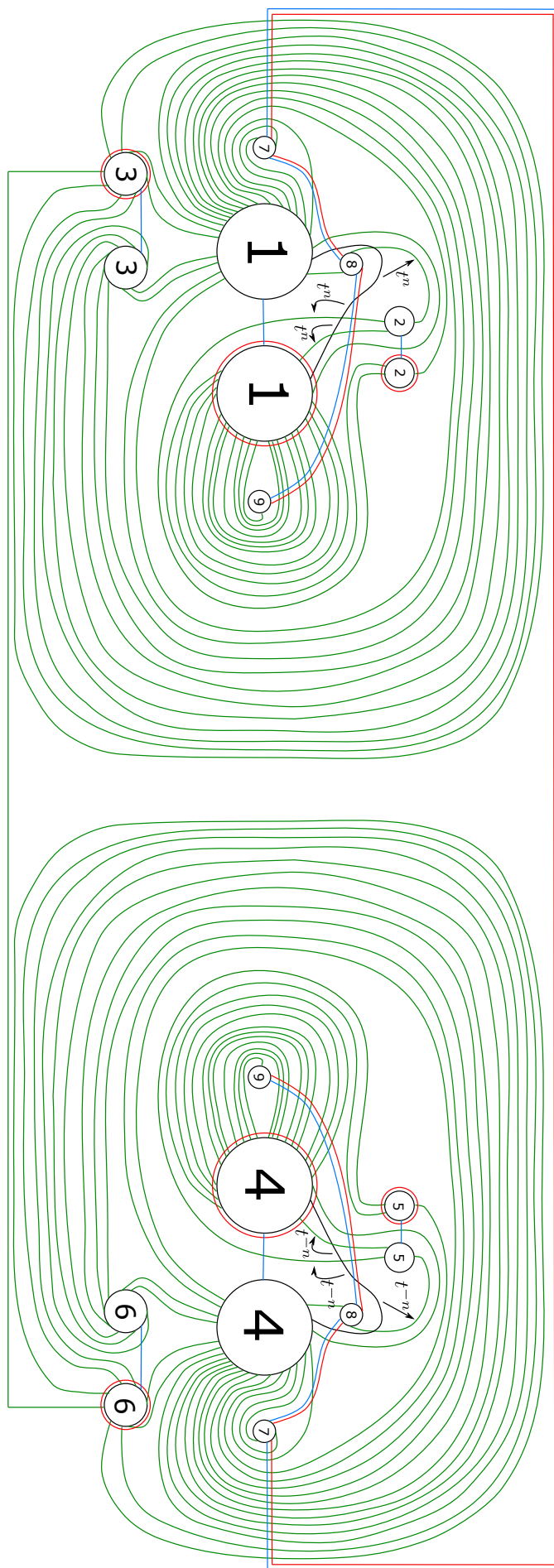


図 8: $W^-(0, n + 2)$ のダブルの $(9, 3)$ -trisection diagram.