

# 4次元球面上のポシェット手術

鈴木 龍正 (東京工業大学理学院数学系数学コース) \*

## 概要

岩瀬 順一氏と松本 幸夫氏は、エキゾチックな4次元多様体を構成する最も一般的な手法の一つであるトラス手術の特別な場合に相当する、ポシェット手術を定義した。本稿では、ポシェット手術がコードとコア球面を用いた手術であると解釈できることを紹介する。更に、コア球面が非自明なリボン2次元結び目である場合に、4次元球面上のポシェット手術が4次元球面に微分同相になるような非自明なコードが存在するための十分条件を、Andrews-Curtis 自明な有限表示群を用いて提示する。また、任意の結び目に沿う3次元球面上のDehn手術の基本群は、あるリボン2次元結び目に沿う4次元球面上のポシェット手術の基本群と同型になることを示す。本研究は丹下 基生氏 (筑波大学数理物質系) との共同研究である。

## 1 導入

本稿では多様体は全て滑らか、連結かつ向き付けられているとし、写像は全て滑らかであるとする。また、2つの群  $G, H$  が同型であることを  $G \cong H$ 、2つの多様体  $X, Y$  がホモトピー同値であることを  $X \simeq Y$ 、2つの多様体  $X, Y$  が微分同相であることを  $X \approx Y$  と表記する。

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  をそれぞれ正の整数全体, 整数全体, 有理数全体, 実数全体とする。

$D^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{k=1}^m x_k^2 \leq 1\}$  を  $m$ 次元球体 ( $m \in \mathbb{N}$ ),

$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\} (= \partial D^{n+1})$  を  $n$ 次元球面とする ( $n \geq 0$ )。

### 1.1 ポシェットとポシェット手術

定義 1.1 (ポシェット, Iwase-Matsumoto [IM]) 4次元多様体  $S^1 \times D^3 \natural D^2 \times S^2$  をポシェット (pochette) と呼び、 $P$  と表す。

$P$  がポシェットと呼ばれる理由は  $P \simeq S^1 \vee S^2$  が成立することによる (図 1)。

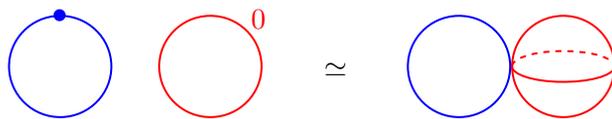


図 1  $P = S^1 \times D^3 \natural D^2 \times S^2$  のハンドル図式 (左) と  $S^1 \vee S^2$  (右)。

\* e-mail: suzuki.t.do@m.titech.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106 (鈴木) の支援と科研費 (課題番号:21K03216)(丹下) の助成を受けたものです。

$l := S^1 \times \{*\} (\subset S^1 \times D^3 \subset P)$ ,  $m := \partial D^2 \times \{*\} (\subset D^2 \times S^2 \subset P)$ ,  
 $B := \{*\} \times \partial D^3 (\subset S^1 \times D^3 \subset P)$ ,  $S := \{*\} \times S^2 (\subset D^2 \times S^2 \subset P)$  とする (図 2).  
 $l, m$  をそれぞれ  $P$  のロンジチュード (longitude), メリディアン (meridian) と呼ぶことにする.

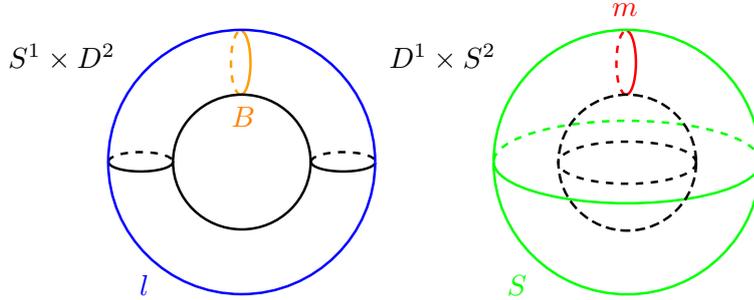


図 2  $P$  の部分多様体  $l, m, B, S$  の位置関係.

$M$  を 4 次元多様体とする.  $X$  を  $M$  の部分集合であるときに,  $E(X) := M - \text{int}(X)$  とする.  
 $e : P \hookrightarrow M$  を埋め込み写像,  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  を微分同相写像とする.

定義 1.2 (ポシェット手術, lwase-Matsumoto [IM]) 4 次元多様体  $E(e(P)) \cup_g P$  を  $M$  上のポシェット手術 (pochette surgery) と呼び,  $M(e, g)$  と表す.

### 1.2 mod 2 framing

$S^3$  内の結び目  $K (\approx S^1)$  の framing 係数と同様に,  $\partial P = \#^2 S^1 \times S^2$  内の  $g(m) (\approx S^1)$  の framing 係数を定義できる.  $m$  と  $g(m)$  の近傍間の同一視を固定すると, 同一視  $\iota : \partial E(e(P)) \rightarrow \#^2 S^1 \times S^2$  を得る.  $m$  上の framing を  $g$  で移すことで得られる  $g(m)$  上の framing を  $\iota$  に依存する整数で表現する.  $P$  は  $S^1 \times D^3$  に  $m$  をベルト球面に持つ 2 ハンドルを接着した 4 次元多様体と解釈できる. framing 係数の差が偶数かつ  $g_1(m) = g_2(m)$  を満たす接着写像  $g_1, g_2 : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  に対して,  $g_1^{-1} \circ g_2|_{N(m)}$  は  $P$  の 2 ハンドルの内側まで拡張可能であるので,  $g_1, g_2$  で接着された 2 つの 4 次元多様体は互いに微分同相である. ここで,  $N(A)$  は  $P$  の部分多様体  $A$  の開管状近傍を表す. よって, ポシェット手術の微分同相類では,  $g(m)$  上の framing として, 2 で割ったときの剰余  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  のみを考えればよい.

定義 1.3 (mod 2 framing)  $g(m)$  の framing 係数  $\varepsilon$  を, 微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  に対する mod 2 framing と呼ぶ.

### 1.3 ポシェット手術の微分同相類

$M$  上のポシェット手術を決定する際に重要な以下の定理が存在する:

定理 1.4 (lwase-Matsumoto [IM, Theorem 2])  $M$  上のポシェット手術  $M(e, g) = E(e(P)) \cup_g P$  の微分同相類は, 以下の 3 つの条件により決まる:

- (1) 埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$ ,

- (2) ホモロジー類  $g_*([m]) \in H_1(\partial E(e(P)))$ ,  
 (3)  $g(m)$  の mod 2 framing  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ .

#### 1.4 ポシエット手術のスロープ, コードと絡み数

$H_1(\partial E(e(P))) = \mathbb{Z}[e(m)] \oplus \mathbb{Z}[e(l)]$  であることから,  $g_*([m]) = p[m] + q[l]$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ) であり, 更に  $g: \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  は微分同相写像であることから,  $\gcd(p, q) = 1$  を満たす.

定義 1.5 (スロープ) 既約分数  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  をポシエット手術のスロープ (**slope**) と呼ぶ.

微分同相写像  $g_1, g_2: \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  に対して,  $g_{1*}([m]) = -g_{2*}([m])$  であるとき  $M(e, g_1) \approx M(e, g_2)$  であることから, 定理 1.4 より  $M$  上のポシエット手術  $M(e, g)$  の微分同相類は

- (i) 埋め込み写像  $e: P \hookrightarrow M$ ,
- (ii) スロープ  $p/q$ ,
- (iii)  $g(m)$  の mod 2 framing  $\varepsilon$

により決まる. 以下,  $e, p/q, \varepsilon$  で得られるポシエット手術を  $M(e, p/q, \varepsilon)$  と表記する.

注意 1.6 任意の 2 次元結び目  $S'$  に沿う 4 次元多様体  $M$  上の Gluck 手術  $\text{Gl}(M, S')$  に対して,  $e(S) = S'$  を満たすように埋め込み写像  $e: P \hookrightarrow M$  が取れる. このとき,  $\text{Gl}(M, S') = \text{Gl}(M, e(S)) = M(e, \infty, 1)$  が成り立つ ( $\infty = 1/0$ ). よって, 任意の 4 次元多様体  $M$  上の Gluck 手術は, ある  $M$  上のポシエット手術そのものであることから, ポシエット手術は Gluck 手術の一般化であることが分かる.

$E(e(S))$  に固有 (proper) に埋め込まれた弧  $C$  の管状近傍を取り除くことで  $E(e(P))$  が得られる.

定義 1.7 (コード)  $C$  をポシエット手術のコード (**cord**) と呼ぶ.

2 次元結び目  $e(S)$  をコア球面 (**core sphere**) と呼ぶことにする. ポシエット手術  $M(e, g) = E(e(P)) \cup_g P$  はコード  $C$  とコア球面  $e(S)$  を用いた手術であると解釈できる.

$M$  を 4 次元ホモロジー球面,  $B^3$  を 3 次元ホモロジー球体とする. このとき, 絡み数  $L(e(S), e(l))$  を [B, Section 15] に基づき, 以下の手順で与えられる:

1.  $e|_S: S \rightarrow M$  を写像  $B^3 \rightarrow M$  に拡張する.
2.  $B^3$  と横断的に交わるように  $e(l)$  を  $E(e(S))$  内で変形し,  $B^3$  の向きは  $e(S)$  の向きから誘導する.
3.  $B^3$  の像と  $e(l)$  との各交差点の符号は  $B^3$  と  $e(l)$  の連結の向きが  $M$  の向きと一致するとき +1, そうでないとき -1 とする.

定義 1.8 (絡み数)  $L(e(S), e(l))$  を埋め込み写像  $e: P \hookrightarrow M$  の絡み数と呼び,  $\ell$  と表す.

注意 1.9  $e(S)$  は  $M$  の 2 次元部分多様体,  $e(l)$  は  $M$  の 1 次元部分多様体であるから,  $L(e(l), e(S)) = -L(e(S), e(l)) = -\ell$  が成り立つ.

注意 1.10 絡み数  $l$  は埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  の不変量ではない。

### 1.5 ポシセット手術とトーラス手術との関係

$ST := D^2 \times S^1$  (ソリッドトーラス),  $H^2$  を接着球面が  $S^1 \times \{*\}$  になる 2 ハンドルとしたときに,  $P = S^1 \times ST \cup H^2$  が成り立つ (図 3, 4).

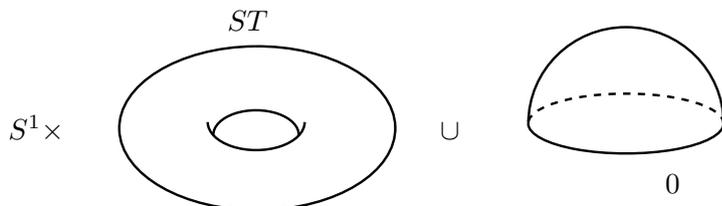


図 3  $P$  の構成法の一つ.

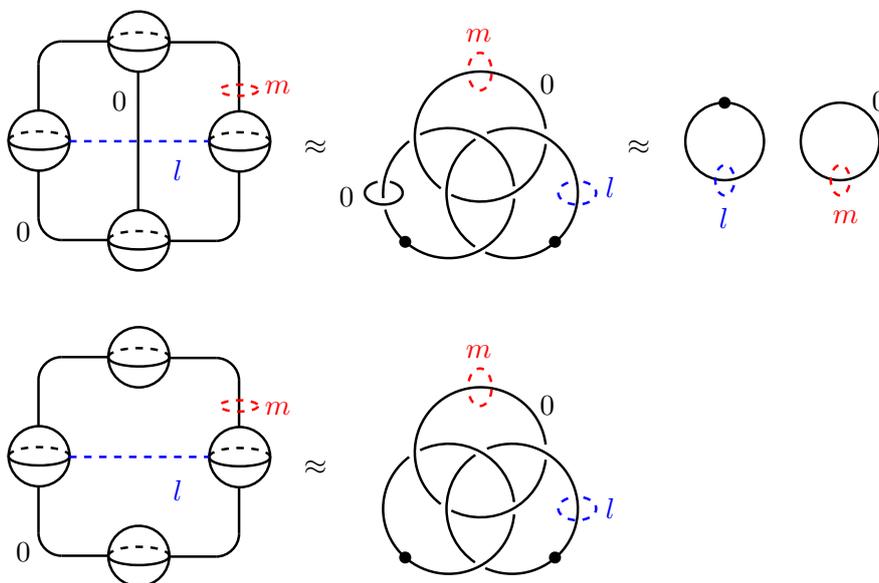


図 4  $P$  のハンドル図式 (上) と  $S^1 \times ST$  のハンドル図式 (下).

$s := S^1 \times \{*\} \times \{*\} \subset S^1 \times ST$ ,  $e_0 : S^1 \times ST \rightarrow M$  を  $e(S^1 \times ST)$  が自明な法束を持つ埋め込み写像,  $g_0 : \partial(S^1 \times ST) \rightarrow \partial E(e_0(S^1 \times ST))$  を微分同相写像とする.

定義 1.11 (トーラス手術) 4次元多様体  $E(e_0(S^1 \times ST)) \cup_{g_0} (S^1 \times ST)$  を  $M$  上のトーラス手術 (torus surgery) と呼ぶ.

$M$  上のトーラス手術  $E(e_0(S^1 \times ST)) \cup_{g_0} (S^1 \times ST)$  の微分同相類は, 埋め込み写像  $e_0 : S^1 \times ST \rightarrow M$  とホモロジー類  $(g_0)_*([m]) \in H_1(S^1 \times \partial ST) = \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[l] \oplus \mathbb{Z}[s]$  で決まる.  $e_0 = e|_{S^1 \times ST}$  とすると,  $M(e, p/q, \varepsilon)$  は埋め込み写像  $e_0 : S^1 \times ST \rightarrow M$  と  $(g_0)_*([m]) = p[m] + q[l] + \varepsilon p[s]$  を満たす微分同相写像  $g_0 : \partial(S^1 \times ST) \rightarrow \partial E(e_0(S^1 \times ST))$  による  $M$  上のトーラス手術である.

## 2 ポシェット手術のホモロジー群

任意の 4 次元ホモロジー球面上のポシェット手術のホモロジー群を計算した:

命題 2.1 (S.-Tange [ST, Proposition 2.5])  $M$  を 4 次元ホモロジー球面,  $e: P \hookrightarrow M$  を絡み数が  $\ell$  の埋め込み写像とする.

$$(i) \quad p + q\ell \neq 0 \text{ のとき, } H_n(M(e, p/q, \varepsilon)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 4), \\ \mathbb{Z}/(p + q\ell)\mathbb{Z} & (n = 1, 2), \\ 0 & (n = 3). \end{cases}$$

$$(ii) \quad p + q\ell = 0 \text{ のとき, } H_n(M(e, p/q, \varepsilon)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1, 3, 4), \\ \mathbb{Z}^2 & (n = 2). \end{cases}$$

$\gcd(p, q) = 1$  であるから,  $p + q\ell = 0 \iff (p, q) = (\ell, -1), (-\ell, 1)$  が成り立つ.

注意 2.2 大川 翼氏は  $\ell = 0$  に限定して, 命題 2.1 の結果を得ている [O, 定理 1.1].

命題 2.1 と Freedman の定理 (詳細は [F], [FQ] を参照) により, 任意の 4 次元ホモロジー球面  $M$  上のポシェット手術が 4 次元球面  $S^4$  と同相になる為の必要十分条件を提示した:

系 2.3 (S.-Tange [ST, Corollary 2.6])  $M$  を 4 次元ホモロジー球面,  $e: P \hookrightarrow M$  を絡み数が  $\ell$  の埋め込み写像とする.  $M(e, p/q, \varepsilon)$  が  $S^4$  と同相であることの必要十分条件は,  $M(e, p/q, \varepsilon)$  が単連結かつ  $|p + q\ell| = 1$  である.

## 3 ポシェット手術の微分同相類の特定

あるハンドル図式に対するポシェット手術後のハンドル図式の具体的な描き方を [S, Proposition 1] で提示した (図 5). この描き方を参考に, 可算無限個の  $S^4$  上のポシェット手術が  $S^4$  と微分同相であることを, ハンドル図式上の変形手法である (相対) ハンドル計算で証明した [S, Theorem 1, 2].

### 3.1 コードまたはコア球面が自明な場合

$S^4$  上のポシェット手術  $S^4(e, p/q, \varepsilon)$  の微分同相類を, コードとコア球面が自明か否かで場合分けすることで, 以下の結果が得られた:

コードとコア球面が共に自明な場合

この場合は,  $e(S)$  が自明な 2 次元結び目かつ  $C$  が boundary parallel な場合である.

$DP$  を  $P$  のダブルとする.  $DP$  は  $S^1 \times S^3 \# S^2 \times S^2$  に微分同相な 4 次元閉多様体である.  $i_P: P \rightarrow DP$  を包含写像とする. 柏木 信一氏の結果 [K, 定理 2], 村瀬 裕一氏の結果 [Mu, 定理 1.2] から,  $DP(i_P, p/q, \varepsilon) \approx L(q; \varepsilon, 1; 1)$  ( $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \varepsilon \in \{0, 1\}$ ) が成り立つ. ここで,  $L(n; \varepsilon, 1; 1)$  ( $n \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \{0, 1\}$ ) は Pao 氏により初めて構成された 4 次元閉多様体である [P].

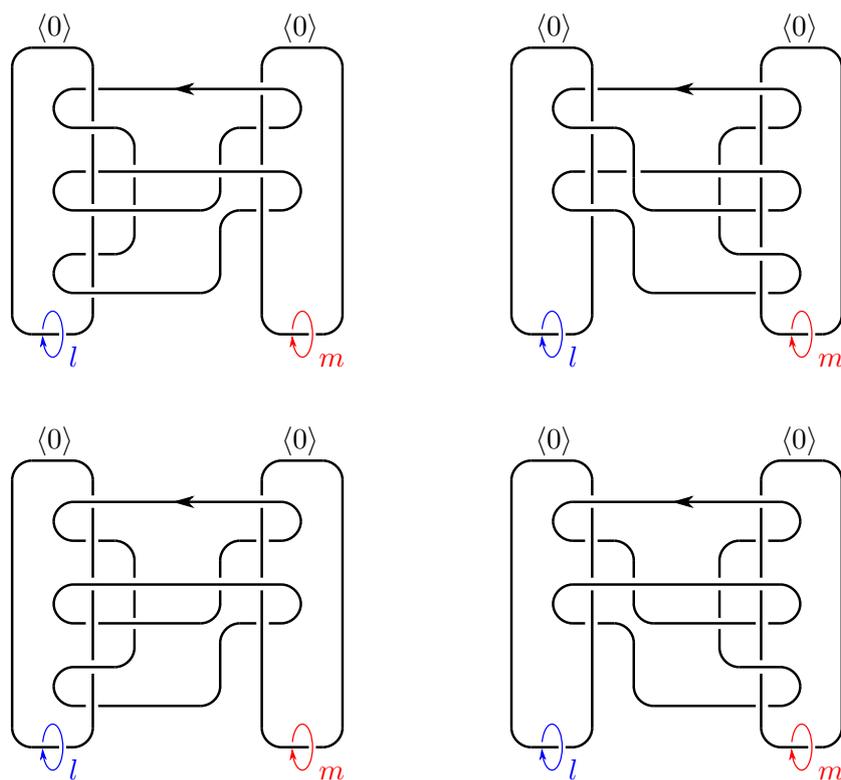


図5  $(p, q) = (2, 3)$  (左上),  $(3, 2)$  (右上),  $(2, -3)$  (左下),  $(3, -2)$  (右下) の場合のハンドル図式.

3次元多様体  $M$  に対して

$$\begin{aligned} \text{Spin}(M) &:= (M - \text{int}(B^3)) \times S^1 \cup_{\text{id}_{S^2 \times S^1}} S^2 \times D^2, \\ \widetilde{\text{Spin}}(M) &:= (M - \text{int}(B^3)) \times S^1 \cup_{\iota} S^2 \times D^2 \end{aligned}$$

( $\iota$  は恒等写像  $\text{id}_{S^2 \times S^1} : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$  に isotopic ではない  $S^2 \times S^1$  上の微分同相写像) とし,  $L(p, q)$  を  $(p, q)$  型のレンズ空間とすると,  $L(p, q, 0, 1; 1) \approx \text{Spin}(L(p, q))$ ,  $L(p, 1; 1, 1) \approx \widetilde{\text{Spin}}(L(p, q))$  である. 以上から, コードとコア球面が共に自明な場合の  $S^4$  上のポシェット手術の微分同相類は

$$S^4(e, p/q, \varepsilon) \approx \begin{cases} \text{Spin}(L(p, q)) & (\varepsilon = 0), \\ \widetilde{\text{Spin}}(L(p, q)) & (\varepsilon = 1) \end{cases}$$

である (図6).

コードが自明な場合

この場合は, 既によく研究されている Gluck 手術の問題に帰着されることを示した:

定理 3.1 (S.-Tange [ST, Theorem 1.4])  $e : P \hookrightarrow M$  が自明なコードを持つ埋め込み写像であるとき, 任意の整数  $q$  に対して,

$$M(e, 1/q, \varepsilon) \approx \begin{cases} M & (\varepsilon = 0), \\ \text{Gl}(M, e(S)) & (\varepsilon = 1). \end{cases}$$

Gordon 氏 [G], Melvin 氏 [Me], Naylor 氏と Schwartz 氏 [NS] により,  $e(S)$  が twist spun 2-knot, 0-slice 2-knot,  $m$ -twist  $n$ -roll spin of 2-knot の場合は  $\text{Gl}(S^4, e(S)) \approx S^4$  である. よって, これらの場合は  $S^4(e, 1/q, \varepsilon) \approx S^4$  ( $q \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \{0, 1\}$ ) が成立する.

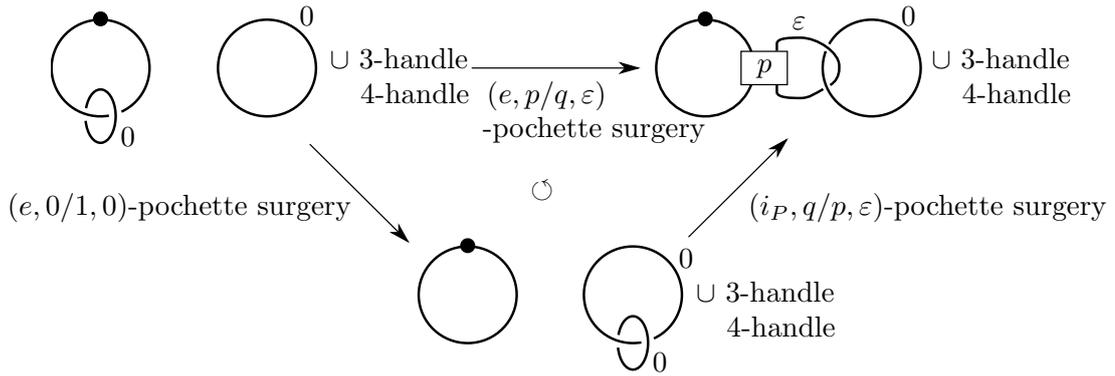


図6  $S^4$  (左上),  $L(p; \varepsilon, 1; 1)$  (右上),  $DP$  (下) のハンドル図式.

コア球面が自明な場合

定理 3.2 (S.-Tange [ST, Theorem 1.5])  $e(S)$  が自明な 2 次元結び目であるとき,  $C$  は常に自明なコードに isotopic になる.

注意 3.3 コア球面  $e(S)$  が自明な場合は, コードとコア球面が共に自明な場合に帰着されるので,  $S^4(e, p/q, 0) \approx \text{Spin}(L(p, q))$ ,  $S^4(e, p/q, 1) \approx \widetilde{\text{Spin}}(L(p, q))$  ( $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ) が成立する. つまり, コア球面  $e(S)$  が自明な場合は常に  $S^4(e, 1/q, \varepsilon) \approx S^4$  ( $q \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \{0, 1\}$ ) が成立する.

注意 3.4 [S, Theorem 1, 2] は, コア球面が自明な場合の一部を証明したことに相当する.

3.2 Andrews-Curtis 自明

$R = \langle x_1, \dots, x_n | w_1, \dots, w_n \rangle$  を自明群の有限表示であるとする.

定義 3.5 (Andrews-Curtis 変形) 基本変形 (生成元同士の置換, 関係子同士の置換, 生成元を逆元にする操作), 関係子  $w_1, \dots, w_n$  の変形:

(AC1)  $w_i \longleftrightarrow w_i w_j$  ( $j \neq i$ ),

(AC2)  $w_i \longleftrightarrow w_i^{-1}$ ,

(AC3)  $w_i \longleftrightarrow v w_i v^{-1}$  ( $v$ : 任意の  $x_1, \dots, x_n$  の語)

((AC1), (AC2), (AC3) において全ての  $k \neq i$  に対して  $w_k$  は固定), および生成元  $x$  と関係子  $x$  を同時に追加または削除する操作を Andrews-Curtis 変形と呼ぶ.

定義 3.6 (Andrews-Curtis 自明) 基底と関係子に対する Andrews-Curtis 変形の有限列で  $R$  を  $\langle \emptyset | \emptyset \rangle$  にできるとき,  $R$  を Andrews-Curtis 自明な表示と呼ぶ.

3.3 リボン 2 次元結び目に沿うポシェット手術

コードとコア球面が共に非自明な  $S^4$  上のポシェット手術については以下の結果が得られた:

定理 3.7 (S.-Tange [ST, Theorem 1.8])  $S_r$  を  $\pi_1(E(S_r)) \cong \mathbb{Z}$  を満たすリボン 2 次元結び目とする。このとき、ある 3 ハンドルを持たない 4 次元ホモロジー球体  $H(S_r)$  が存在して、 $S^4(e, g) \approx DH(S_r)$  かつ  $e(S) = S_r$  を満たす非自明なコード  $C$  を持つ埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する。

注意 3.8 Akbulut 氏のハンドル計算と自明群の有限表示の Andrews-Curtis 変形を関連付けた手法 [A] により、 $H(S_r)$  のハンドル分解の様子から得られる基本群の有限表示  $R(S_r)$  が Andrews-Curtis 自明になる場合は、 $S^4(e, g) \approx S^4$  が成り立つ。

注意 3.9 (S.-Tange [ST, Theorem 1.7])  $e(S)$  が ribbon 2-knot of 1-fusion になる場合は、 $S^4(e, g) \approx S^4$  を満たす非自明なコード  $C$  を持つ埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する。

$n, p \in \mathbb{N}$ ,  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  を階数  $n+1$  の自由群  $F_{n+1}$  の生成元、 $w$  を  $x_1, \dots, x_{n+1}$  の任意の語であるとする。更に  $1 \leq i < n$  のとき、

$$r_i(w) := \begin{cases} wx_{i+1}w^{-1}x_{i+2}^{-1} & (i \in 2\mathbb{N} - 1) \\ wx_{i+2}w^{-1}x_{i+1}^{-1} & (i \in 2\mathbb{N}) \end{cases}, r_n(w) := \begin{cases} wx_{n+1}w^{-1}x_1^{-1} & (n \in 2\mathbb{N} - 1) \\ wx_1w^{-1}x_{n+1}^{-1} & (n \in 2\mathbb{N}) \end{cases}$$

とし、 $R(n, p, w) := \langle x_1, \dots, x_{n+1} | r_1(w), \dots, r_n(w), x_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^p \rangle$  とする。

補題 3.10 (S.-Tange [ST, Lemma 4.5])  $R(n, p, w)$  は Andrews-Curtis 自明な表示である。

注意 3.11  $R(S_r) = R(n, p, w)$  になる場合は、 $S^4(e, g) \approx S^4$  を満たす非自明なコード  $C$  を持つ埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する。

図 7 は  $R(S_r) = R(n, p, w)$  に対応する  $S^4$  における非自明なリボン 2 次元結び目  $e(S)$  の補空間  $E(e(S))$  のハンドル図式的具体例である。

## 4 ポシエット手術と群の有限表示

### 4.1 ポシエット手術の基本群と群の有限表示

$$l' := [e(l)], m' := [e(m)] \in \pi_1(\partial E(e(P))),$$

$$c'_{p,q} := \begin{cases} m'^p l'^q & (pq = 0), \\ \prod_{k=1}^{|p|} l'^{q/|q|(\lfloor k|q|/|p| \rfloor - \lfloor (k-1)|q|/|p| \rfloor)} m'^{p/|p|} & (pq \neq 0) \end{cases}$$

とし、 $\pi_1(E(e(S))) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R} \rangle$  ( $\mathcal{S}$ : 生成集合,  $\mathcal{R}$ : 関係子全体の集合) とする。

命題 4.1 (S.-Tange [ST])

$$\pi_1(M(e, p/q, \varepsilon)) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R}, c'_{p,q} \rangle.$$

注意 4.2  $\pi_1(M(e, \pm 1, \varepsilon)) = \langle \mathcal{S} | \mathcal{R}, (m')^{\pm 1} l' \rangle$  が成り立つ。

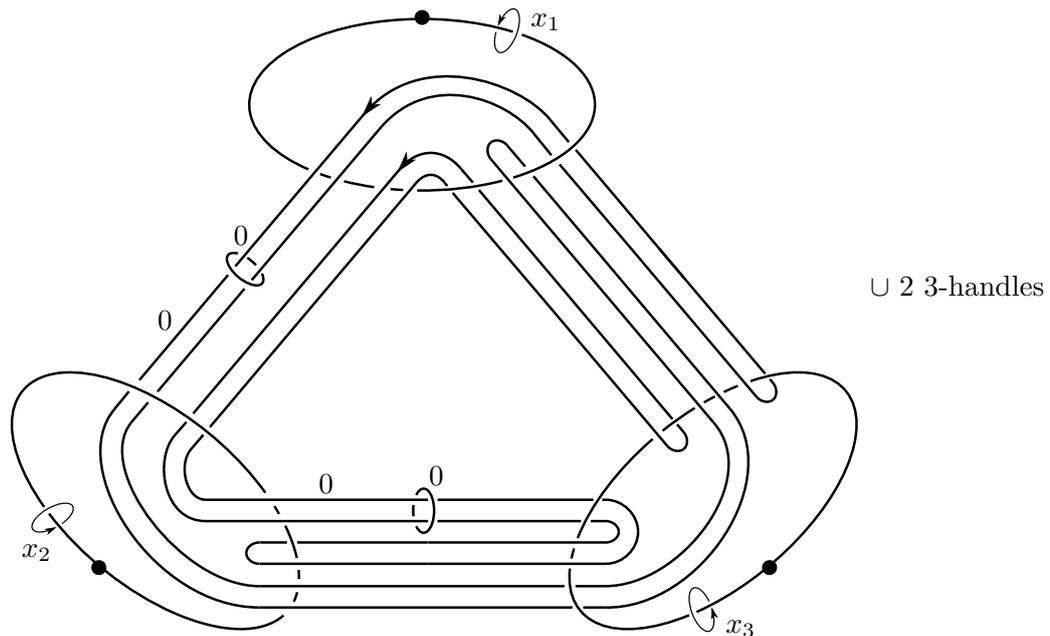


図7  $R(S_r) = R(2, p, x_1 x_2 x_3)$  に対応する非自明なりボン2次元結び目の補空間  $E(e(S))$  のハンドル図式.

定理 4.3 (S.-Tange 2023)  $K$  を任意の  $S^3$  内の結び目とする.

- (1) コア球面  $e(S)$  がリボン2次元結び目,
- (2) ある  $K$  の結び目群の有限表示  $R(K) = \langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_{k-1} \rangle$  が存在して, 任意の  $x_1, \dots, x_k$  における語  $r$  に対して,  $\pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon)) \cong \langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_{k-1}, r \rangle$

を満たす埋め込み写像  $e: P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g: \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する.

[証明] [GS, Section 6.2] により,  $E(e(S))$  が  $S^4$  におけるリボン2次元結び目  $e(S)$  の補空間かつ  $\pi_1(E(e(S))) \cong \pi_1(E(K))$  を満たすように,  $e: P \hookrightarrow S^4$  が取れる. このとき,  $\pi_1(E(e(P))) = \pi_1(E(e(S)))$  であり,  $E(e(S))$  のハンドル図式における dotted circle を生成元とし, framed knot の各 dotted circle との絡まり方を関係子で表現した, ある  $K$  の結び目群の有限表示  $R(K) = \langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_{k-1} \rangle$  が得られるので,  $\pi_1(E(e(P))) \cong \langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_{k-1} \rangle$  である. 更に,  $m' = x_i, l' = x_i^{-1}r$  を満たすようにコード  $C$  が取れるので, 定理の主張が成立する.  $\square$

## 4.2 ポシエット手術と Dehn 手術の基本群

$S_{p/q}^3(K)$  を係数  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  の  $S^3$  上の Dehn 手術とする.

系 4.4 (S.-Tange 2023) 任意の結び目  $K$  と任意の  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して,  $\pi_1(S_{p/q}^3(K)) \cong \pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon))$  を満たす埋め込み写像  $e: P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g: \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する.

[証明] 定理 4.3 の証明より,  $E(e(S))$  のハンドル図式から自然に得られる,  $K$  の結び目群の有限表示  $\langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_{k-1} \rangle$  が存在する. このとき,  $\pi_1(S_{p/q}^3(K)) \cong \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{k-1}, r_{p/q} \rangle$  を満たす  $x_1, \dots, x_n$  の語  $r_{p/q}$  が存在するから, 定理 4.3 より系の主張が成立する.  $\square$

系 4.5 (S.-Tange 2023)  $\pi_1(S_{1/q}^3(K)) \cong \pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon))$  かつ  $S^4(e, 1, \varepsilon)$  が 4 次元ホモロジー球面になる埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する.

[証明] 定理 4.3 と系 4.4 から,  $\pi_1(S_{1/q}^3(K)) \cong \pi_1(S^4(e, 1, \varepsilon))$  を満たす, 埋め込み写像  $e : P \hookrightarrow M$  と微分同相写像  $g : \partial P \rightarrow \partial E(e(P))$  が存在する. Hurewicz の定理から,  $H_1(S^4(e, 1, \varepsilon)) \cong H_1(S_{1/q}^3(K)) = 0$  が成り立つ. これと命題 2.1 より,  $H_n(S^4(e, 1, \varepsilon)) \cong H_n(S^4)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) が分かるので,  $S^4(e, 1, \varepsilon)$  は 4 次元ホモロジー球面である.  $\square$

## 謝辞

本講演の機会を与えてくださった本研究集会の運営に携わった皆様へ感謝致します. 本稿の内容を書く際に参考になった貴重な意見や助言をしてくださった鎌田 聖一氏, 北澤 直樹氏, 安井 弘一氏, 浅野 喜敬氏, 飯田 暢生氏, 地引 知栄氏に感謝致します. Gluck 手術, Pochette 手術, トーラス手術の間の関係性とポシェット手術後のハンドル図式の具体的な描き方について発表後に質問し, 議論していただいた若槇 洋平氏に感謝致します.  $L(p; 0, 1; 1) \approx \text{Spin}(L(p, q))$ ,  $L(p, 1; 1, 1) \approx \widetilde{\text{Spin}}(L(p, q))$  であることをご教示してくださった磯島 司氏に感謝致します. 改めて, 共同研究者の丹下 基生氏と私が所属している遠藤 久顕氏の研究室の皆様へこの場を借りて感謝申し上げます. 最後に, 講演を聞いていただいた全ての方に感謝を申し上げます.

## 参考文献

- [A] S. Akbulut, *Cork twisting Schoenflies problem*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **8** (2014), 35–43.
- [B] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer, New York, 1997.
- [F] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453.
- [FQ] M. H. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-Manifolds*, Princeton Math. Series **39**, Princeton University Press, 1990.
- [GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, Volume **20**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [G] C. M. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 4, 585–596.
- [IM] Z. Iwase and Y. Matsumoto, *4-dimensional surgery on a “pochette”*, pp. 161–166 in Proceedings of the East Asian School of knots, links and related topics, 2004.
- [K] 柏木 信一, Pochette surgery と Kirby diagram, 大阪大学修士論文, 2013 年 2 月.
- [Me] P. M. Melvin, *Blowing up and down in 4-manifolds*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1977.
- [Mu] 村瀬 裕一, Pochette surgery and Kirby diagrams, 東京工業大学修士論文, 2015 年 2 月.
- [NS] P. Naylor and H. R. Schwartz, *Gluck twisting roll spun knots*, Algebr. Geom. Topol. **22** (2022), no. 2, 973–990.
- [O] 大川 翼, 四次元球面上のポシェット手術について, 東京工業大学修士論文, 2020 年 2 月.
- [P] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279–317.
- [S] T. Suzuki, *Constructions of homotopy 4-spheres by pochette surgeries*, Geom. Dedicata **217** (2023), no. 6, Paper No. 106, 22 pp.
- [ST] T. Suzuki and M. Tange, *Pochette surgery of 4-sphere*, Pacific J. Math. **324** (2023), no.2, 371–398.